

大學用書

解析數論導引

K. Chandrasekharan 著

李 恭 晴 譯

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

大學用書

解析數論導引

K. Chandrasekharan 著

李 恭 晴 譯



國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

版權所有

翻印必究

310 (69—167)

解 析 數 論 導 引

著 作 者：K. Chandrasekharan
翻 譯 者：李 恭 晴
譯 作 權：國 立 編 譯 館
出 版 者：黎明文化事業股份有限公司
地 址：臺北市信義路二段二一三號十一樓
行政院新聞局出版事業登記臺業字第一八五號
總發行所：
臺北市長安東路一段五十六號
門 市 部：
臺北市信義路二段二一三號綜合書城
臺北市長安東路一段五十六號
臺北市重慶南路一段四十九號
臺北市林森南路一〇七號文化大樓
高雄市五福四路九十五號
郵政劃撥帳戶一八〇六一號
印 刷 者：海王印刷廠有限公司
地 址：臺北縣中和市民有街35號
中華民國七十一年七月初版
定 價：新台幣叁佰壹拾元

◀如有缺頁倒裝請寄回換書▶

緒 言

這一套書共有兩冊，這本書爲其上冊，它是作者從過去二十五年在加州理工學院所講授的一門課（數學 160）中整理而寫成的：它提供解析數論導引給具有一些高等微積分之基礎而不需具有數論之預備知識的大學生閱讀。事實上本書很多地方並不需要用到微積分，所以程度好的高中學生也適宜閱讀。

數論是一門很廣大，豐富的領域，所以一年的課程實無法包含它的每一部份，本書取材儘量能提供各種問題，並深入的加以探討。一些曾經使得好幾代職業數學家與業餘數學家着迷的問題將與解決它們所須的一些技術在此書中一起加以討論。

本課程的一個目的是要促使很多年輕數學學生對於數論已有的興趣加以發揮，並爲他們敞開窺探最近不斷發展的數學文獻之門，作者很高興的看到在過去二十五年之中選讀過此課程的學生之中有些已經成爲職業數學家，並且他們之中有些人對於數論作了很多貢獻。謹此向獻身於本書的人仕致謝。

目 錄

緒 言	1
歷史介紹	1
第 一 章 算術的基本定理	16
1-1 引言	16
1-2 整除性	17
1-3 最大公因數	17
1-4 質數	20
1-5 算術的基本定理	21
1-6 質數之倒數所成的級數	23
1-7 歐幾里得除法	24
1-8 多於兩個數的最大公因數	25
第 二 章 算術函數與 Dirichlet 乘積	29
2-1 引言	29
2-2 Möbius 函數 $\mu(n)$	29
2-3 Euler φ 函數 $\varphi(n)$	30
2-4 φ 與 μ 的一個關係式	31
2-5 $\varphi(n)$ 的一個乘積公式	32
2-6 算術函數的 Dirichlet 積	34
2-7 Dirichlet 反元素與 Möbius 反轉公式	36
2-8 Mangoldt 函數 $\Lambda(n)$	37
2-9 積性函數	39

2 解析數論導引

2-10	積性函數與 Dirichlet 積	41
2-11	完全積性函數的反元素	43
2-12	Liouville 函數 $\lambda(n)$	44
2-13	因數函數 $\sigma_\alpha(n)$	45
2-14	廣義的合成	46
2-15	形式冪級數	48
2-16	算術函數的 Bell 級數	50
2-17	Bell 級數與 Dirichlet 積	52
2-18	算術函數的導函數	53
2-19	Selberg 恒等式	54
第三章	算術函數的平均	61
3-1	引言	61
3-2	記號“大 O ”。函數的漸近等式	63
3-3	Euler 和公式	64
3-4	一些基本的漸近公式	65
3-5	$d(n)$ 的平均階數	68
3-6	因數函數 $\sigma_\alpha(n)$ 的平均階數	70
3-7	$\varphi(n)$ 的平均階數	72
3-8	應用於從原點可見的格子點的分配	73
3-9	$\mu(n)$ 與 $\Lambda(n)$ 的平均階數	76
3-10	Dirichlet 積的部份和	77
3-11	應用於 $\mu(n)$ 與 $\Lambda(n)$	77
3-12	Dirichlet 積之部份和的其他公式	81
第四章	質數分布的一些基礎定理	87
4-1	引言	87
4-2	Chebyshev 函數 $\psi(x)$ 與 $\theta(x)$	89

4-3	$\theta(x)$ 與 $\pi(x)$ 之關係	90
4-4	質數定理的一些等價關係	94
4-5	關於 $\pi(n)$ 與 P_n 的不等式	98
4-6	Shapiro 的 Tauber 型定理	102
4-7	Shapiro 定理的應用	105
4-8	部分和 $\sum_{p \leq x} (1/p)$ 的一個漸近公式	107
4-9	Möbius 函數的部份和	109
4-10	質數定理的初等證明概略	117
4-11	Sellberg 漸近公式	118
第五章 同 餘		129
5-1	同餘的定義與基本性質	129
5-2	剩餘組與完全剩餘系	133
5-3	線性同餘	134
5-4	既約剩餘系與 Euler-Fermat 定理	137
5-5	模 P 的多項式同餘式。Lagrange 定理	138
5-6	Lagrange 定理的應用	140
5-7	線性聯立同餘式。中國剩餘定理	142
5-8	中國剩餘定理的應用	143
5-9	對於模為質數乘幂的多項同餘式	145
5-10	交叉分類原理	148
5-11	既約剩餘系的分解性質	151
第六章 有限交換羣與其特徵		156
6-1	定義	156
6-2	羣與子羣的例子	157
6-3	羣的基本性質	157
6-4	子羣的構造	159

4 解析數論導引

6-5	有限交換羣的特徵	161
6-6	特徵羣	163
6-7	特徵的正交關係	164
6-8	Dirichlet 特徵	166
6-9	關於 Dirichlet 特徵的和	169
6-10	對於實非主特徵 $X, L(1, X)$ 不爲零	171
第七章 算術數列的質數的 Dirichlet 定理		177
7-1	引言	177
7-2	具有 $4n+1$ 及 $4n+3$ 形式之質數的 Dirichlet 定理	178
7-3	Dirichlet 定理之證明計劃	179
7-4	引理 7-4 之證明	182
7-5	引理 7-5 之證明	183
7-6	引理 7-6 之證明	184
7-7	引理 7-8 之證明	185
7-8	引理 7-7 之證明	186
7-9	在算術數列中質數的分布	187
第八章 週期函數與 Gauss 和		190
8-1	模 k 週期函數	190
8-2	週期算術函數的有限 Fourier 級數存在	191
8-3	Ramanujan 和及其推廣	194
8-4	和 $S_k(n)$ 的積性性質	197
8-5	關於 Dirichlet 特徵的 Gauss 和	200
8-6	Gauss 和不爲零的 Dirichlet 特徵	201
8-7	誘導模及原始特徵	203
8-8	誘導模的進一步的性質	204
8-9	特徵的導子	207

8-10	原始特徵與可分離的 Gauss 和	208
8-11	Dirichlet 特徵的有限 Fourier 級數	209
8-12	原始特徵的部份和的 Pólya 不等式	210
第 九 章 平方剩餘與平方逆換律		217
9-1	平方剩餘	217
9-2	Legendre 符號及其性質	218
9-3	計算 $(-1/p)$ 與 $(2/p)$	220
9-4	Gauss 引理	221
9-5	平方逆換律	225
9-6	平方逆換律的應用	228
9-7	Jacobi 符號	229
9-8	應用於 Diophantus 方程式	233
9-9	Gauss 和與平方逆換律	235
9-10	Gauss 和的互逆律	239
9-11	平方逆換律的另一證明	245
第 十 章 原 始 根		251
10-1	一數 mod m 的指數。原始根	251
10-2	原始根與既約剩餘系	252
10-3	對於 $\alpha \geq 3 \pmod{2^2}$ 的原始根不存在	253
10-4	對於奇質數 p , mod p 原始根存在	253
10-5	原始根與平方剩餘	256
10-6	mod p^2 原始根存在	256
10-7	mod $2p^2$ 的原始根存在	259
10-8	在其他情形下原始根不存在	259
10-9	mod m 的原始根的個數	261
10-10	指標計算	264

6 解析數論導引

802	10-11	原始根與 Dirichlet 特徵.....	268
901	10-12	$\text{mod } p^2$ 的實值 Dirichlet 特徵.....	271
011	10-13	$\text{mod } p^2$ 的原始 Dirichlet 特徵.....	272
第十一章 Dirichlet 級數與 Euler 乘積.....			277
712	11-1	引言.....	277
812	11-2	Dirichlet 級數的絕收對數半平面.....	278
032	11-3	由 Dirichlet 的數所定義的函數.....	279
132	11-4	Dirichlet 級數的乘積.....	281
232	11-5	Euler 乘積.....	284
332	11-6	Dirichlet 級數的收斂半平面.....	287
432	11-7	Dirichlet 級數的解析性質.....	290
532	11-8	非負係數的 Dirichlet 級數.....	293
632	11-9	Dirichlet 級數表示成 Dirichlet 級數的指數.....	295
732	11-10	Dirichlet 級數的均值公式.....	297
832	11-11	Dirichlet 級數之係數的積分公式.....	300
932	11-12	Dirichlet 級數之部份和的積分公式.....	302
第十二章 函數 $\zeta(\mathbf{R})$ 與 $L(\mathbf{P}, \mathbf{X})$.....			311
032	12-1	引言.....	311
132	12-2	Γ 函數的性質.....	312
232	12-3	Hurwitz ζ 函數的積分表示.....	313
332	12-4	Hurwitz ζ 函數的線積分表示.....	316
432	12-5	Hurwitz ζ 函數的解析延拓.....	318
532	12-6	$\zeta(s)$ 與 $L(s, X)$ 的解析延拓.....	319
632	12-7	$\zeta(s, a)$ 的 Hurwitz 公式.....	320
732	12-8	Riemann ζ 函數的泛函方程式.....	324
832	12-9	Hurwitz ζ 函數的泛函方程式.....	326

12-10	L 函數的泛函方程式	327
12-11	計算 $\zeta(-n, a)$	329
12-12	Bernoulli 數與 Bernoulli 多項式的性質	331
12-13	$L(o, X)$ 的公式	334
12-14	$\zeta(s, a)$ 以有限和的逼近	335
12-15	$ \zeta(s, a) $ 的不等式	338
12-16	$ \zeta(s) $ 與 $ L(s, X) $ 的不等式	340
第十三章 質數定理的解析證明		347
13-1	證明的構想	347
13-2	引理	350
13-3	$\psi_1(x)/x^2$ 的線積分表示	354
13-4	$ \zeta(s) $ 與 $ \zeta'(s) $ 在靠近直線 $\sigma=1$ 之上界	356
13-5	$\zeta(s)$ 在直線 $\sigma=1$ 上不等於 0	358
13-6	$ 1/\zeta(s) $ 與 $ \zeta'(s)/\zeta(s) $ 的不等式	359
13-7	質數定理的完全證明	362
13-8	$\zeta(s)$ 的無零點區	365
13-9	Riemann 臆測	367
13-10	因數函數的應用	368
13-11	應用於 Euler φ 函數	372
13-12	特徵和的 Pólya 不等式的擴展	375
第十四章 分 割		381
14-1	引言	381
14-2	分割的幾何表示	385
14-3	分割的形成函數	385
14-4	Euler 五角數定理	390
14-5	Euler 五角數定理的組合證明	393

8 解析數論導引

14-6	$p(n)$ 的 Euler 遞迴公式	396
14-7	$p(n)$ 的上界	397
14-8	Jacobi 的三數積公式	400
14-9	Jacobi 恒等式的影響	403
14-10	展生函數的對數積分	404
14-11	Ramanujan 的分割恒等式	407
參考資料		415
符號索引		424
索引		426
13-2	引理	390
13-3	$\psi(x)$ 的積分表示	394
13-4	$ \zeta(s) $ 與 $ \zeta(s) $ 在臨近直線 $\sigma=1$ 之上界	396
13-5	$\zeta(s)$ 在直線 $\sigma=1$ 上不等於 0	398
13-6	$ \zeta(s) $ 與 $ \zeta(s) $ 的不相等	399
13-7	實數定理的完全證明	399
13-8	$\zeta(s)$ 的無零點區	399
13-9	Riemann 假測	399
13-10	以數函數的應用	399
13-11	應用於 Euler ϕ 函數	373
13-12	特選和的 Pólya 不等式的應用	376
第十四章 分 割		
14-1	引言	381
14-2	分割的幾何表示	385
14-3	分割的生成函數	385
14-4	Euler 五角數定理	390
14-5	Euler 五角數定理的組合證明	393

歷史介紹

數論是數學上處理全數

1, 2, 3, 4, 5, ……………

之性質的一支，這些數也只做計物數或正整數。

正整數無疑的是人類最早的數學創作。我們幾乎很難想像人類會缺乏計算能力，至少在某一限度範圍內的計算能力。歷史上的記載指出早在西元前5700年，古索瑪人即已有日曆，所以他們必定已經發展出某種形式的算術。

在西元前2500年索瑪人已經發展出用60為底的一個數系，它傳到巴比倫人，使得巴比倫人變成高技術的計算家。人們已經發現西元前2000年以前的一些帶有精細數字表的巴比倫墓碑。

當古代的人民達到一個有休閒時間去深思問題的水準時，有一些人就開始思索數的性質。這個好奇心發展為一種數的神秘主義以及數字計算。甚至到今天諸如 3, 7, 11, 13 等數還被認為是好運或壞運的徵兆。

在人們想到要用有系統的方法去探討數字本身之前，數字就已被用於保持記載以及交易行為，至少有5000年之久。最早用科學方法去研究整數，也就是說數論的真正起源，一般是歸因於希臘人。大約在西元前600年 Pythagoras 以及他的門徒對整數做相當透徹的研究，他們是最先將整數做各種不同的分類的人：

偶數：2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ………

奇數：1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ………

質數：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, ………

2 解析數論導引

61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ……

合數: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ……

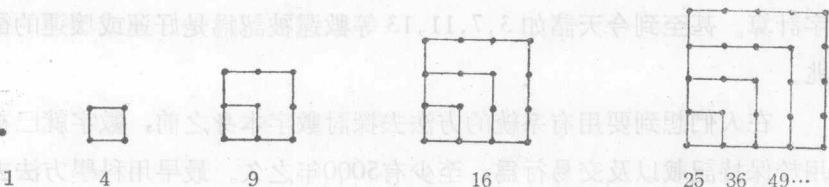
一個質數是大於 1 的數，它只有 1 和它本身兩個因數。不是質數的數，除掉 1 外，都稱為合數。1 被認為既不是質數，又不是合數。

Pythagoras 學派也將數與幾何連結在一起，他們介紹多邊形數：三角數、平方數、五角數等等。當我們將數視為代表排成三邊形、正方形、五邊形等之點時，如圖 I-1 所示，這些帶有幾何性的名稱的由來就很顯然了。

三角數:



平方:



五角數:

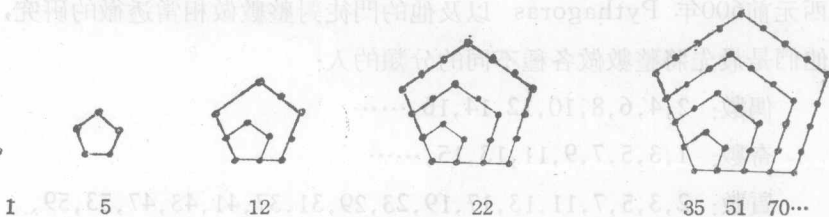


圖1-1

其他與幾何有關的是著名的畢氏定理，它敘說在任何直角三角形中斜邊的平方等於兩股平方的和（見圖1-2）

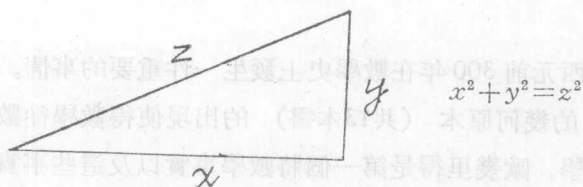


圖 1-2

Pythagoras 學派對於邊長為整數之直角三角形（見圖 1-3）充滿興趣這種三角形稱為 Pythagoras 三角形。代表邊長的對應的三數組 (x, y, z) 稱為 Pythagoras 三數組。

西元前1700年的一塊巴比倫的墓碑上刻有很多 Pythagoras 三數組，有些數還相當的大。Pythagoras 學派是最早繪出決定無限多個 Pythagoras 三數組之方法的人。以現代的記號，它可以被描述如下：

$$x = m, \quad y = \frac{1}{2}(n^2 - 1), \quad z = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$$

這樣的三數組 (x, y, z) 一定是一個 Pythagoras 三數組，且 $z = y + 1$ 。這裏是一些例子：

x	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y	4	12	24	40	46	84	112	144	180
z	5	13	25	41	47	85	113	145	181

除此之外，還有其他的 Pythagoras 三數組，例如：

x	8	12	16	20
y	15	35	63	99
z	17	37	65	101

在此例子中， $z = y + 2$ 。Plato（西元前430-349）發現一個決定所

4 解析數論導引

有這種三數組的方法；以現代的記號，它們是由公式

$$x=4n, y=4n^2-1, z=4n^2+1$$

所給定。

大約在西元前 300 年在數學史上發生一件重要的事情。歐幾里德 (Euclid) 的幾何原本 (共 13 本書) 的出現使得數學從數字計算轉換到演繹科學。歐幾里德是第一個將數學事實以及這些事實的證明結合在一起的人。這十三本書中的三本是

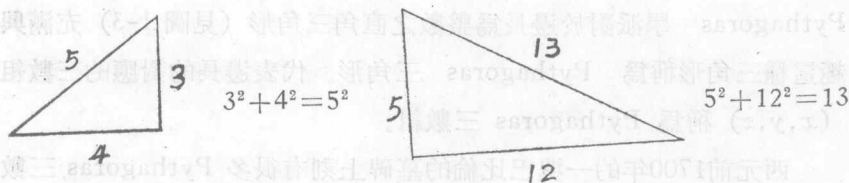


圖 1-3

從事於數論的探討(第 VII、IX 及 X)。在書 IX 中歐幾里德證明質數有無限多個。他的證明目前還在學校中教給學生。在書 X 中他繪一個求所有 Pythagoras 三數組的方法。事實上，是繪出全部的 Pythagoras 三數組而沒有證明他的方法能找出全部的 Pythagoras 三數組。他的方法可以大略寫成公式

$$x=t(a^2-b^2), y=2tab, z=t(a^2+b^2)$$

其中 t, a, b 為任意正整數。使得 $a > b$ ， a 與 b 無公因數且 a 與 b 有一為奇數，另一為偶數。

歐幾里德對於 Pythagoras 學派所提出的另一個問題做了重要的貢獻，這個問題是找出所有的完全數。6 稱為完全數，因為 $6=1+2+3$ 為它的所有的真因數的和 (即所有小於 6 之因數的和)。另一個完全數的例子是 28，因為 $28=1+2+4+7+14$ ，而 1, 2, 4, 7 與 14 都是 28 的因數中小於 28 本身者。希臘人認為一個數的真因數是它的“部份”。他們稱 6 與 28 為完全數是因為這兩個數都等於它的所有的部份

的和。

在書中歐幾里得發現所有的偶完全數。他證明一個偶數若具有 $2^{p-1}(2^p-1)$ 之形式，其中 p 與 2^p-1 都為質數，則為完全數。

兩千年以後，Euler 證明了歐幾里得定理之逆定理，即每一個偶完全數都是歐幾里得型，例如對於 6 與 28 有

$$6 = 2^{2-1}(2^2-1) = 2 \cdot 3 \quad \text{且} \quad 28 = 2^{3-1}(2^3-1) = 4 \cdot 7$$

首五個偶完全數為

$$6, 28, 496, 8128 \text{ 及 } 33550336$$

事實上完全數是很稀少。到目前為止 (1975年) 只發現到 24 個完全數。它們是對應於歐幾里得公式中下列的 p 值：

$$2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, \\ 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937.$$

具有 2^p-1 形狀，其中 p 為質數的數稱為 Mersenne 數，記為 M_p ，以紀念 Mersenne，他在 1644 年研究它們。已經知道對於上列 24 個質數的 M_p 都是質數，而對於其他的質數 $p \leq 257$ ，可能除了

$$p = 157, 167, 167, 193, 199, 227, 229$$

之外，都是合數。對於上列這些質數所對應的 M_p 是否為質數或合數還不清楚。

沒有奇完全數被發現過，甚至到現在還不知道是否存在。但是，如果存在的話它們必定相當大，事實上大於 10^{50} (見 Hagi [29])。

現在我們轉回來對於從歐幾里得以來的數論史做一個簡介。

從歐幾里得在西元前 300 年以來直到大約西元 250 年之間數論幾乎沒有什麼顯著的進展，到了西元 250 年左右另外一位希臘數學家 Diophantus of Alexandria 出版了 13 本書，其中 6 本被保存下來。這是第一個有系統使用代數符號的希臘作品。雖然他的代數記號以現