大學用書

解析數論導引

K. Chandrasekharan著
李 恭 晴譯

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

大學用書

解析數論導引

K. Chandrasekharan著
李　恭　晴　譯

國 立 編 譯 館 主 編
黎明文化事業公司出版

310（69—167）

解析數論導引

著作者：K. Chandrasekharan
翻譯者：李　恭　晴
譯作權所有者：國立編譯館
出版者：黎明文化事業股份有限公司
地址：臺北市信義路二段二一三號十一樓
行政院新聞局出版事業登記臺業字第一八五號
總發行所：
臺北市長安東路一段五十六號
門市部：
臺北市信義路二段二一三號綜合書城
臺北市長安東路一段五十六號
臺北市重慶南路一段四十九號
臺北市林森南路一〇七號文化大樓
高雄市五福四路九十五號
郵政劃撥帳戶一八〇六一號
印刷者：海王印刷廠有限公司
地址：臺北縣中和市民有街35號
中華民國七十一年七月初版

定價：新台幣叁佰壹拾元

◀如有缺頁倒裝請寄回換書▶

緒　言

這一套書共有兩册，這本書爲其上册，它是作者從過去二十五年在加州理工學院所講授的一門課（數學 160）中整理而寫成的：它提供解析數論導引給具有一些高等微積分之基礎而不需具有數論之預備知識的大學生閱讀。事實上本書很多地方並不需要用到微積分，所以程度好的高中學生也適宜閱讀。

數論是一門很廣大，豐富的領域，所以一年的課程實無法包含它的每一部份，本書取材儘量能提供各種問題，並深入的加以探討。一些曾經使得好幾代職業數學家與業餘數學家着迷的問題將與解決它們所須的一些技術在此書中一起加以討論。

本課程的一個目的是要促使很多年輕數學學生對於數論已有的興趣加以發揮，並爲他們敞開窺探最近不斷發展的數學文獻之門，作者很高興的看到在過去二十五年之中選讀過此課程的學生之中有些已經成爲職業數學家，並且他們之中有些人對於數論作了很多貢獻。謹此向獻身於本書的人仕致謝。

目　錄

歷 史 介 紹

數論是數學上處理全數

1,2,3,4,5,………………

之性質的一支，這些數也只做計物數或正整數。

正整數無疑的是人類最早的數學創作。我們幾乎很難想像人類會缺乏計算能力，至少在某一限度範圍內的計算能力。歷史上的記載指出早在西元前5700年，古索瑪人卽已有日曆，所以他們必定已經發展出某種形式的算術。

在西元前2500年索瑪人已經發展出用60爲底的一個數系，它傳到巴比倫人，使得巴比倫人變成高技術的計算家。人們已經發現西元前2000年以前的一些帶有精細數字表的巴比倫墓碑。

當古代的人民達到一個有休閒時間去深思問題的水準時，有一些人就開始思索數的性質。這個好奇心發展爲一種數的神秘主義以及數字計算。甚至到今天諸如 3,7,11,13 等數還被認爲是好運或壞運的徵兆。

在人們想到要用有系統的方法去探討數字本身之前，數字就已被用於保持記載以及交易行爲，至少有5000年之久。最早用科學方法去研究整數，也就是說數論的眞正起源，一般是歸因於希臘人。大約在西元前600年 Pythagoras 以及他的門徒對整數做相當透徹的研究，他們是最先將整數做各種不同的分類的人:

偶數: 2,4,6,8,10,12,14,16,……

奇數: 1,3,5,7,9,11,13,15,……

質數: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,

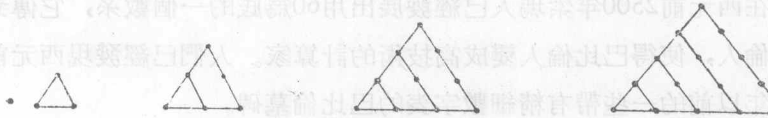
61,67,71,73,79,83,89,97,……

合數: 4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,……

一個質數是大於 1 的數，它只有 1 和它本身兩個因數。不是質數的數，除掉 1 外，都稱爲合數。 1 被認爲既不是質數，又不是合數。

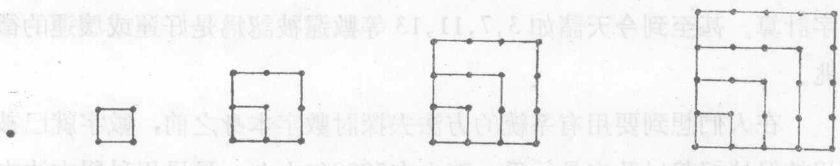
Pythagoras 學派也將數與幾何連結在一起，他們介紹多邊形數：三角數、平方數、五角數等等。當我們將數視爲代表排成三邊形、正方形、五邊形等之點時，如圖 1-1 所示，這些帶有幾何性的名稱的由來就很顯然了。

三角數:



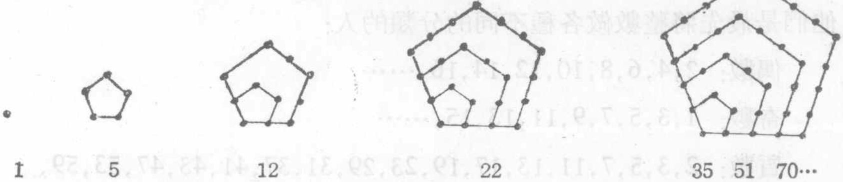
1 3 6 10 15 21 28…

平方形:



1 4 9 16 25 36 49…

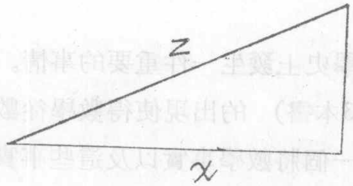
五角數:



1 5 12 22 35 51 70…

圖1-1

其他與幾何有關的是著名的畢氏定理，它敍說在任何直角三角形中斜邊的平方等於兩股平方的和（見圖1-2）



$x^2+y^2=z^2$

圖 1-2

Pythagoras 學派對於邊長爲整數之直角三角形（見圖 1-3）充滿興趣這種三角形稱爲 Pythagoras 三角形。代表邊長的對應的三數組 (x,y,z) 稱爲 Pythagoras 三數組。

西元前1700年的一塊巴比倫的墓碑上刻有很多 Pythagoras 三數組，有些數還相當的大。Pythagoras 學派是最早繪出決定無限多個 Pythagoras 三數組之方法的人。以現代的記號，它可以被描述如下:

$$x=m,\ y=\tfrac{1}{2}(n^2-1),\ z=\tfrac{1}{2}(n^2+1)$$

這樣的三數組 (x,y,z) 一定是一個 Pythagoras 三數組，且 $z=y+1$。這裏是一些例子:

x	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y	4	12	24	40	46	84	112	144	180
z	5	13	25	41	47	85	113	145	181

除此之外，還有其他的 Pythagoras 三數組，例如:

x	8	12	16	20
y	15	35	63	99
z	17	37	65	101

在此例子中，$z=y+2$。Plato （西元前430-349）發現一個決定所

有這種三數組的方法；以現代的記號，它們是由公式

$$x=4n,\ y=4n^2-1,\ z=4n^2+1$$

所給定。

大約在西元前 300 年在數學史上發生一件重要的事情。歐幾里德（Euclid）的幾何原本（共13本書）的出現使得數學從數字計算轉換到演繹科學。歐幾里得是第一個將數學事實以及這些事實的證明結合在一起的人。這十三本書中的三本是

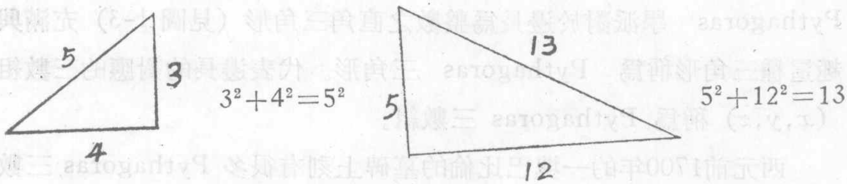


圖 1-3

從事於數論的探討(第Ⅶ、Ⅸ及Ⅹ)。在書Ⅸ中歐幾里得證明質數有無限多個。他的證明目前還在學校中教給學生。在書Ⅹ中他繪一個求所有 Pythagoras 三數組的方法。事實上，是繪出全部的 Pythagoras 三數組而沒有證明他的方法能找出全部的 Pythagoras 三數組。他的方法可以大略寫成公式

$$x=t(a^2-b^2),\ y=2tab,\ z=t(a^2+b^2)$$

其中 t,a,b 為任意正整數。使得 $a>b$，a 與 b 無公因數且 a 與 b 有一為奇數，另一為偶數。

歐幾里得對於 Pythagoras 學派所提出的另一個問題做了重要的貢獻，這個問題是找出所有的完全數。6 稱為完全數，因為 $6=1+2+3$ 為它的所有的眞因數的和（即所有小於 6 之因數的和）。另一個完全數的例子是28，因為 $28=1+2+4+7+14$，而 1,2,4,7 與 14都是28的因數中小於28本身者。希臘人認為一個數的眞因數是它的"部份"。他們稱 6 與28為完全數是因為這兩個數都等於它的所有的部份

的和。

在書Ⅸ中歐幾里得發現所有的偶完全數。他證明一個偶數若具有

$$2^{p-1}(2^p-1)$$

之形式，其中p與2^p-1都爲質數，則爲完全數。

兩千年以後，Euler 證明了歐幾里得定理之逆定理，即每一個偶完全數都是歐幾里得型，例如對於6與28有

$$6=2^{2-1}(2^2-1)=2\cdot3 \quad 且 \quad 28=2^{3-1}(2^3-1)=4\cdot7$$

首五個偶完全數爲

6，28，496，8128 及 33550336

事實上完全數是很稀少。到目前爲止（1975年）只發現到24個完全數。它們是對應於歐幾里得公式中下列的p值：

2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,127,521,607,1279,

2203,2281,3217,4253,4423,9689,9941,11213,19937.

具有 2^p-1 形狀，其中p爲質數的數稱爲 Mersenne 數，記爲M_p，以紀念 Mersenne，他在1644年研究它們。已經知道對於上列24個質數的M_p都是質數，而對於其他的質數$p\angle 257$，可能除了

$$p=157,167,167,193,199,227,229$$

之外，都是合數。對於上列這些質數所對應的M_p是否爲質數或合數還不清楚。

沒有奇完全數被發現過，甚至到現在還不知道是否存在。但是，如果存在的話它們必定相當大，事實上大於 10^{50}（見Hagis〔29〕）。

現在我們轉回來對於從歐幾里得以來的數論史做一個簡介。

從歐幾里得在西元前 300 年以來直到大約西元 250 年之間數論幾乎沒有什麼顯著的進展，到了西元 250 年左右另外一位希臘數學家 Diophantus of Alexandria 出版了13本書，其中6本被保存下來。這是第一個有系統使用代數符號的希臘作品。雖然他的代數記號以現