（理工类）

概率论与数理统计
历年考研真题详解
与常考题型应试技巧

余长安 编著

真题汇集齐全　　推演方法精当　　疑难诠释透彻
题型归类科学　　考点评析简明　　模拟试题逼真

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

（理工类）

概率论与数理统计
历年考研真题详解
与常考题型应试技巧

余长安 编著

真题汇集齐全　　推演方法精当　　疑难诠释透彻
题型归类科学　　考点评析简明　　模拟试题逼真

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(理工类)历年考研真题详解与常考题型应试技巧/余长安编著.—武汉:武汉大学出版社,2008.11
ISBN 978-7-307-06622-9

Ⅰ.概…　Ⅱ.余…　Ⅲ.①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料　②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 164313 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北省京山德兴印务有限公司
开本:720×1000　1/16　印张:17　字数:302 千字　插页:1
版次:2008 年 11 月第 1 版　2008 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06622-9/O·397　定价:26.00 元

版权所有,不得翻印;凡购我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

内容简介

本书是编者根据国家最新硕士研究生入学考试大纲要求，全面搜集、整理1987年以来全国硕士研究生入学考试统一试题，并紧密结合自身多年教学实践经验，尤其是考研数学辅导的切身体会，悉心组织、充实加工编撰而成的。

全书共分为8章。每章含有7个方面的内容：考纲要求，考试重点，历年试题分类统计与考点分析，知识概要，考研题型的应试方法与技巧，历年考研真题及其详解。书末还附有精心编撰并与近年考研试题难度相当的概率论与数理统计模拟试卷若干套。

本书具有以下特点：阐述简明，重点突出；分类讲究，评注独到；方法新颖，技巧灵活；试题全面，解答详尽。

该书适宜理（非数学）、工科专业大学生和各类高等院校数学教师阅览，尤其适合于有志攻读硕士学位的考生研读，亦适用于参加职称考试、自学及其他相关专业人员参考。

前　言

概率论与数理统计是一门集理论性与实践性，乃至趣味性于一体的数学学科。它既具有本课程自身的许多独到特点，又与有关高等数学以至初等数学知识有相当紧密的关联。因而，在该课程的学习过程中，往往有读者对其有关概念、理论，甚至一些应用问题，认识有失偏颇，理解尚欠深刻，分析似非准确，致使难以举一反三，触类旁通。据此，为了帮助读者提高学习效果，深化基本理论，增强分析与解决实际问题的能力，赢得激烈竞争中的获胜机遇，编者根据国家最新硕士研究生入学考试大纲要求，借鉴有关专家、学者的学识与观点，在全面搜集、整理1987年以来全国历年考研试题的基础上，紧密结合编者自身多年教学实践的经验与体会，悉心组织、充实编撰成了《概率论与数理统计（理工类）历年考研真题详解与常考题型应试技巧》一书。

全书共分为8章，每章含有7个方面的内容：考纲要求，考试重点，历年试题分类统计与考点分析，知识概要，考研题型的应试方法与技巧，历年考研真题及其详解。书末还附有精心编撰的、与近年考研试题难度相当的概率论与数理统计模拟试卷若干套，以满足读者自我检测学习效果与实际水准的需求。

纵观本书，易知具有以下特点：阐述简明，重点突出；分类讲究，评注独到；方法新颖，技巧灵活；试题全面，解答详尽；拟卷匠心独具，检测适度客观。它可谓是一本学习概率统计科目颇为适用而不可多得的教学用书。

该书适宜于理（非数学）、工科类专业学生学习概率论与数理统计课程阅览，更适合于有志继续升造而欲攻读硕士学位的有关考生研读，亦适用于参加职称考试、自学及其他相关科技工作者参考。无疑，它也可作为各类高等院校数学教师重要的备课资料。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

由于编撰时间仓促及作者认知水准所限，书中疏误之处在所难免，恳请广大读者及时指正，不吝赐教。

编　者

于武汉大学樱园

2008年3月16日

目　录

第一章 随机事件及其概率

一、考纲要求

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件间的关系与运算.
2. 了解概率、条件概率的定义，掌握概率的基本性质，会计算古典概型.
3. 掌握概率的加法公式、乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式.
4. 理解事件独立性的概念，掌握应用事件独立性进行概率计算.
5. 理解独立重复试验的概率，掌握计算有关事件概率的方法.

二、考试重点

1. 随机事件与样本空间.
2. 事件的关系运算，样本空间划分的定义.
3. 概率的定义和概率的基本性质.
4. 古典概型，条件概率.
5. 概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.
6. 事件的独立性，独立重复试验.

三、历年试题分类统计与考点分析

考点 分值 年份	事件的关系和运算	概率的性质	古典、几何概率	条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式	事件的独立性	独立重复试验	合计
1987		2		8			10
1988	2			7	2		11

续表

分值 考点 年份	事件的关系和运算	概率的性质	古典、几何概率	条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式	事件的独立性	独立重复试验	合计
1989	3						3
1990			4				4
1991		3+3					6
1992		3+3					6
1993				3			3
1994				3+3			6
1995						8	8
1996		3					3
1997	3						3
1998					3	3	6
1999							
2000	3				3		6
2001	3						3
2002					8		8
2003					4		4
2004—2005							
2006		4					4
2007			4			4	8
2008							
合计	14	21	8	24	20	15	

本章的重点有：事件的关系和运算，概率的计算性质，条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式，事件独立性的概念和应用，独立重复试验（伯努利概型）的计算.

常见题型有：全概率公式、贝叶斯公式有背景的应用，利用概率的计算性质和条件概率的定义求概率或化简变形式子，事件的关系、运算、独立等的应用，伯努利概型的判断和计算等. 而古典、几何概率的要求虽略低，但也考过(一些几何、古典概率可用随机变量的方法做).

四、知识概要

1. 加法、乘法原理，排列与组合

加法原理 设完成一件事有 n 类方法(只要选择其中一类方法就可以完

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

成这件事）. 若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种…… 第 n 类方法有 m_n 种，则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法.

乘法原理 设完成一件事须有 n 个步骤（仅当 n 个步骤都完成时，才能完成这件事）. 若第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法……第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

种方法.

注意：加法原理与乘法原理的区别是，前者完成一步就完成一件事；后者需 n 步均完成才完成一件事.

排列 从 n 个不同元素中任取 m $(m \leqslant n)$ 个，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列，从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数记为 P_n^m，则有

$$P_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

从 n 个不同元素中全部取出的排列称为全排列，其排列的总数为

$$P_n^n = n(n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!.$$

规定 $0! = 1$.

允许重复的排列 从 n 个不同元素中有放回地取出 m 个元素，按照一定的顺序排成一列，其排列的总数为

$$N = \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{m个} = n^m$$

不全相异元素的排列 若 n 个元素中有 m 类 $(1 < m \leqslant n)$ 本质不同的元素，而每类元素中分别有 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 个元素 $(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n;\ 1 < k_i < n;\ i = 1, 2, \cdots, m)$，则 n 个元素全部取出的排列称为不全相异元素的一个全排列，其排列的总数为

$$N = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

组合 从 n 个不同元素中取出 m 个元素，不管其顺序并成一组，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合，其组合总数记为 C_n^m，

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

组合具有如下性质：

① $C_n^m = C_n^{n-m}$；

② $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

注意：排列与组合的区别是，前者与次序有关，后者与次序无关.

2. 样本空间与随机事件

随机试验(记为E)　若试验(观察或实验过程)满足条件：

① 试验可在相同条件下重复进行；

② 试验的结果具有多种可能性；

③ 试验前不能确切知道会出现何种结果，只知道所有可能出现的结果，则该试验称为随机试验.

随机事件　随机试验E的一个结果，简称事件，用大写字母$A,B,C,\cdots$表示.

基本事件(样本空间)　随机试验E的所有基本事件组成的集合，记为$\Omega=\Omega(\omega)$.

基本事件空间(样本点)　随机试验E的每一个不可再分解的结果，用ω表示.

必然事件　在一定条件下，每次试验中一定要发生的事件，记为Ω.

不可能事件　在一定条件下，每次试验中一定不发生的事件，记为$\varnothing$.

3. 事件的关系与运算

事件的包含　若事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含A(或A包含于B)，记为$B\supset A$.

事件相等　若$A\supset B$且$B\supset A$，则称事件A与事件B相等，记为$A=B$.

事件A与B之和(并)　$A\cup B$(或$A+B$)$\triangleq$\{事件A与B至少有一个发生\}.

推广：

① $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\triangleq$\{$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$至少有一个发生\}；

② $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots\cup A_\infty=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\triangleq$\{无穷个事件$A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$至少有一个发生\}.

性质：

① $A\subset A\cup B$；$B\subset A\cup B$；

② $A\cap(A\cup B)=A$；$B\cap(A\cup B)=B$；

③ $A\cup A=A$.

事件 A 与 B 的差 $A-B \triangleq \{$事件中 A 发生而 B 不发生$\}$.

性质：

① $A-B \subset A$；

② $(A-B) \cup A = A$；$(A-B) \cup B = A \cup B$；

③ $(A-B) \cap A = A-B$；$(A-B) \cap B = \varnothing$.

事件 A 与 B 的积 $A \cap B$（或 AB）$\triangleq \{$事件 A 与 B 同时发生$\}$.

推广：

① $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \triangleq \{n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生$\}$；

② $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots \cap A_\infty = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq \{$无穷个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 同时发生$\}$.

性质：

① $A \cap B \subset A$；$A \cap B \subset B$；

② $(A \cap B) \cup A = A$；$(A \cap B) \cup B = B$；

③ $A \cap A = A$.

互斥事件 在试验中，若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A, B 为互斥事件.

推广：在试验中，若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 任意两个都是互斥的，则该事件组称为互斥事件组.

注意：

① 在一次试验中，基本事件都是两两互斥的；

② 若 A, B 互斥，则 $A \cup B = A + B$.

对立事件 每次试验中，“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

特性：

① $A + \overline{A} = \Omega$（必然事件）；

② $A\overline{A} = \varnothing$（不可能事件）.

由定义可知，对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

一些常用的事件间的关系式：

① $A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$（交换律）；

② $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$（结合律）；

③ $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$，$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$（分配律）；

④ $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$（对偶律或者德·摩根定律），一般地有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i};$$

⑤ $\varnothing \subset A \subset \Omega$;

⑥ 若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$AB = A$，$\overline{A} \supset \overline{B}$，$B = A \cup (B-A)$，$A(B-A) = \varnothing$;

⑦ $A + \varnothing = A$，$A + \Omega = \Omega$，$A\varnothing = \varnothing$，$A\Omega = A$;

⑧ $A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$，$A \supset AB$，$B \supset AB$;

⑨ $A \cup B = A + (B - AB) = B + (A - B) = B + A\overline{B} = A + B\overline{A} = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$;

⑩ $\overline{A} = \Omega - A$，$\overline{\overline{A}} = A$，$A - B = A\overline{B}$.

4. 事件的关系与运算

(1) 古典概率定义

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，$n$ 为有限的正整数，且每个样本点 $\omega_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性相等，则事件 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m}\}$ $(1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_m \leqslant n)$ 出现的概率为 $P(A) = \dfrac{m}{n}$，即

$$P(A) = \frac{\text{有利用事件 } A \text{ 的基本事件数 } m}{\text{基本事件的总数 } n}.$$

(2) 几何概率

假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n (n = 1,2,3)$ 中任何一个可度量的区域，从 Ω 中“等可能”地选择一点，则相应随机试验的样本空间就是 Ω. 假设事件 A 是 Ω 中任何一个可度量的子集，则

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

由上式定义的概率称为几何概率，符合上述假定的模型称为几何概型，其中，$\mu(A)$ 表示 Ω 中子集 A 的量度(长度、面积、体积).

(3) 概率的统计定义

若随机事件 A 在 n 次试验中出现了 m 次，称 m 为事件 A 在 n 次试验中出现的频数，并称比值 $f_n(A) = \dfrac{m}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中出现的频率.

在一个随机试验中，如果事件 A 出现的频率 $\dfrac{m}{n}$ 随着试验次数 n 的增大，它在区间 $[0,1]$ 上的某个常数 p 的附近摆动，那么定义事件 A 的概率为

$$P(A) = p.$$

概率的这种定义称为概率的统计定义.

(4) 概率的公理化定义

设 A 为随机事件，$P(A)$ 为定义在所有随机事件组成的集合上的实函数，且满足下列三条公理：

公理 1　对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

公理 2　$P(\Omega) = 1$；

公理 3　对于两两互斥的可数多个随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$，

则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率，这个定义称为概率的公理化定义.

(5) 概率的基本性质

性质 1　不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2　设有限多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，那么

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

性质 3　设 A 为任一随机事件，那么 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质 4　设 A, B 为两个事件，且 $A \supset B$，则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

推论 1　若 $A \supset B$，则 $P(A) \geqslant P(B)$.

5. 概率的加法公式

两个事件并的概率计算公式　设 A, B 为两个事件，则有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

注：该公式称为两个事件的概率加法公式. 在运用此公式时，只要求 A，B 是两个随机事件，并不要求 A 与 B 是互不相容的. 若 $AB = \varnothing$，则该公式变为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

多个事件并的概率计算公式　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个随机事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

注：特别地，对三个事件 A, B, C，我们有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

6. 条件概率与乘法公式

(1) 条件概率

设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称 $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发

生的条件下事件 B 发生的条件概率.

(2) 条件概率的基本性质

① $0 \leqslant P(B|A) \leqslant 1$;

② $P(\Omega|A)=1, P(A|A)=1$;

③ $P(\overline{B}|A)+P(B|A)=1$;

④ $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$;

⑤ 当 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 两两互不相容时,

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A).$$

(3) 乘法定理

$P(AB)=P(A)P(B|A), P(A)>0$;

$P(AB)=P(B)P(A|B), P(B)>0$;

$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB), P(AB)>0$;

$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$, $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$.

7. 全概率公式和贝叶斯公式

全概率公式 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组,即它们两两互不相容,其和为 Ω,并且 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,则对任一事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

贝叶斯公式(逆概率公式) 设随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 以及 B 满足全概率公式中的条件,则对任意的 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$,有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}.$$

在上面公式右边,分母为全概率公式,是 n 项之和,分子是分母中某一项.

8. 事件的独立性

(1) 两个事件的相互独立

设 A,B 是两个随机事件,如果

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A 与事件 B 为相互独立的事件.

两事件相互独立的性质:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com