经济学·现代绘画·信息论·战略研究·数学

Jean-François PHELIZON

让-弗朗索瓦·费黎宗（经济学和数学博士） 著

赵清源 译

神奇方阵

Les Carrés Magiques

数学博士为你揭开神奇的数字方阵之谜……

从中国上古时代的河图洛书到阿拉伯世界引人入胜的传奇……

神奇的数字方阵令全世界的数学家们为之着迷!

讲述了神奇的数字方阵的历史和永久魅力!

中国市场出版社
China Market Press

数学博士为你揭开神奇的数字方阵之谜……

从中国上古时代的河图洛书到阿拉伯世界引人入胜的传奇……

神奇的数字方阵令全世界的数学家们为之着迷!

讲述了神奇的数字方阵的历史和永久魅力!

神奇方阵

Les Carrés Magiques

让-弗朗索瓦·费黎宗(经济学和数学博士) 著

赵清源 译

中国市场出版社
China Market Press

图书在版编目（CIP）数据

神奇方阵/（法）费黎宗著；赵清源译. —北京：中国市场出版社，2008.7
ISBN 978-7-5092-0383-5

Ⅰ.神… Ⅱ.①费… ②赵… Ⅲ.数学—智力游戏 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 083991 号

书　　名：神奇方阵
著　　者：[法]让-弗朗索瓦·费黎宗
译　　者：赵清源
责任编辑：郭　佳
出版发行：中国市场出版社
地　　址：北京市西城区月坛北小街 2 号院 3 号楼（100837）
电　　话：编辑部（010）68033692　读者服务部（010）68022950
发行部（010）68021338　68020340　68053489
68024335　68033577　68033539
经　　销：新华书店
印　　刷：三河市华晨印务有限公司
开　　本：787×1092 毫米　1/16　13 印张　192 千字
版　　次：2008 年 10 月第 1 版
印　　次：2008 年 10 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5092-0383-5
定　　价：36.80 元

奇妙的数字方阵

当您在飞机的长时间飞行中无所事事之时……当您被拉去听演讲会而觉得讲演者枯燥乏味之时……又或当您在自己医生候诊室排队等候、而坐在您身边的其他人一点都引不起您的兴趣之时，那么这种时候做点什么好呢？……与其毫无头绪地胡思乱想，您不如掏出一张纸来，就好像您打算作些记录一样，而实际上您可以试着组建一个神奇方阵（*carré magique*，中国古代对此的称呼是纵横图——译者注）。

您可以从最简单的事入手：先勾画出一个横有三排、纵有三列的方块阵形，然后在九个隔出的格子里分别填上从1~9中的一个数字；只要使纵、横、或对角线各方向上的三数之和都等于同一数字，那么该方阵就是神奇方阵了。

为构建出这样一个方阵，您可能先得花上些时间，但毫无疑问的是您随后肯定会被此种神奇的组合所吸引……在一两次无功的尝试之后，您一定会高兴地发现那种幸福时刻的来临，您最终找到了如下列这样的一种组合，从该图形的无论横排、纵列还是对角斜线来看的各单项之和m都等于15：

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图1　神奇的3次方阵

而进行这组排列时，您似乎并不比距今几乎五千年了的那个中国人做得更漂亮，因为好像正是他将上述这组九个数字刻在了一块龟甲之上。

如果您对这个游戏有点喜欢，您不妨再试着组建有四个横排和四个竖列的奇妙方阵（即4次方阵）或5次方阵，以及依此类推的其他方阵。要知道您这是在重操一种历史悠久的娱乐活动，而且连那些大数学家们诸如皮埃尔·德-费马（Pierre De Fermat，法国微积分研究的先驱——译者注）、安托万·阿尔诺（Antoine Arnauld，在法国被称为大阿尔诺，也是神学家）、伦纳德·尤勒（Leonhard Euler，1707—1783，瑞士人，也是天文学家）、卡尔-弗里德里克·高斯（Karl Friedrich Gauss，德国人，也是物理学家、天文学家）、爱德华·卢卡(édouard Lucas)，乃至其他著名人物如本杰明·富兰克林（Benjamin Franklin，美国物理学家、政治家，发明避雷针，也是美国《独立宣言》的起草者之一）等都未错过对此的兴趣——尽管看上去“这项消遣没有任何实用价值”[1]。

您越是对这项消遣着迷您就越是在深化对它的研究，从而您也就越是倾向于进行某些求证。比如说，您很快就会发现不存在神奇的2次方阵：这正是所谓“数字之神秘”的一种表现。或者，随着您野心的膨胀（例如您何不去动手建造一个8次的神奇方阵呢?），您将会发现所有的几何性扩大都出自于某种完全可测的逻辑（就像上面说的那个总和m或叫做神奇的常数与某个严格服从方阵次数的公式相符一样——对于一个8次方阵来说，这个常数等于260）。

可是，哪怕您是一位运算奇才，哪怕连10次方阵的组合都难不住您，您也很快就会走到您自己的极限。一旦超过某种规模您的理智就追随不上了，而且您也势必见证到您已经没有可能继续排列出任何神奇方阵了，或至少是找不到建造它们的方法了。

没有可能了吗？是的，用一支铅笔和一张纸的确是没有可能继续下去了，却不是用一台计算机。对于神奇方阵，确实存在某些我们要在此书中介

[1] 参见法国《世界报》2003年12月7日上奥热罗的专文《一项毫无用处的数学发现》(Une découverte mathématique qui ne sert à rien)。

绍的专门算法——就如它们由计算机C语言设定进程序的范式那样。但愿计算机对此种向您推介的程序的执行不会松懈您对数字科学的兴趣！ 而运用这种程序您转眼间就可以排列出神奇的百次方阵、千次方阵或是更大次数的方阵来；可此外还有很多东西有待去开发，诸如魔幻方阵、奇妙立方体，以及其他各种性质的奇异变种，尽管其中若干已经超出了本书自觉约束的范围[1]。

虽然有了计算机，但对神奇方阵的研究依旧很流行，而此种研究的主题与其说是关于建立大型方阵还不如说是建立超级立方体、超级神奇方阵，或是全部由素数构成的方阵（素数亦称质数，大于1的整数，除了自身和1以外，它不能被其他正整数所整除的，就叫做“素数”，如2、3、5、7、11、13、17等。素数有无穷多个。——译者注）。有些引人注目的发现是最近的事：例如魔幻5次立方体的发现就仅仅是在2003年；另一些更深奥的研究已经远远超出了简单的智力好奇，因为它们有助于解决很复杂的数学问题。

由对神奇方阵的研究带动起的日益增长的兴趣也可以从因特网站上衡量出来。如果上谷歌（google）网站搜寻，一旦键入“carré magique”（神奇方阵）为查找词，则立即显示有78800条释文（如果键入英文“magic square”为查找词，则会有234万条释文）。由此可见，专注于神奇方阵的网站数量之多是相当可观的，构成这一数量的人来自于大学生、研究生和好奇的人们，他们将自己的才智与自己所掌握的计算手段相结合，其结果就是出现了更惊人的、更漂亮的，或如人们喜爱说的那样更“神奇的”方阵，那也恰是我们乐于在此书中向大家介绍的内容。

[1] 本书所研究的神奇方阵主要是加法方阵（carrés additifs）。

※　※　※

我在此要特别表明对已故的埃里克·德-奥特弗耶（Eric D’Hautefeuille）的感谢，他是一位数字科学的热爱者，我曾与他经常性地讨论神奇方阵。另外我也想对热心出版本人此部书稿的让·帕伏莱甫斯基（Jean Pavlevski）表示感谢，还要向给予了我宝贵意见的玛丽-安娜·热尔姆（Marie-Anne Germe）、何非、欧明华（François Hominal）和赵小芹夫妇，以及所有接受将自己研究成果向科研界敞开的那些署名与否的作者们表示感谢，愿他们全体都在此收到我对他们的诚挚谢忱。

神奇方阵

第一章

历史点滴

第一个神奇方阵要上溯到什么时候呢？没有人能确切地知道。迄今最古老的遗迹是在中国发现的，时间要回溯到公元前5世纪，但不清楚作者是谁。好像从这一地点出发，神奇方阵在公元10世纪前后传播到了印度和波斯，而只是到了14世纪它们才在欧洲出现，而且一开始还带有浓烈的奥秘意味。

尽管如此，它们的数学外表还是很快就在欧洲如同在亚洲尤其是日本激起了日益扩大的兴趣。第一个以严肃方式认真审视神奇方阵的欧洲人是皮埃尔·德-费马，他与布莱兹·帕斯卡尔（Blaise Pascal，法国著名的数学家、物理学家、哲学家、作家——译者注）的通信往来至今都很有名。

神奇方阵是怎么样、又是通过什么人从中国传到了印度、然后传到伊斯兰国家、最后才到达欧洲的呢？人们也许永远都不会知道事实真相了……但仍要面对这样一个客观实情，即一个不那么重要的构思——亦即其经济或军事用途至此还的确有限——却冲破了各种阻隔文化、人民、语言的屏障而代代传承着和不断丰富着。

溯源

相传，在两千五百多年以前的古代中国，洛河（在今河南省，流经洛阳）曾经发过一场大水。大家当时对如何使河神恢复平静都束手无策：各种的祷告都无济于事，大水继续泛滥肆虐着。然而，在每次新的祭献过后，都有一

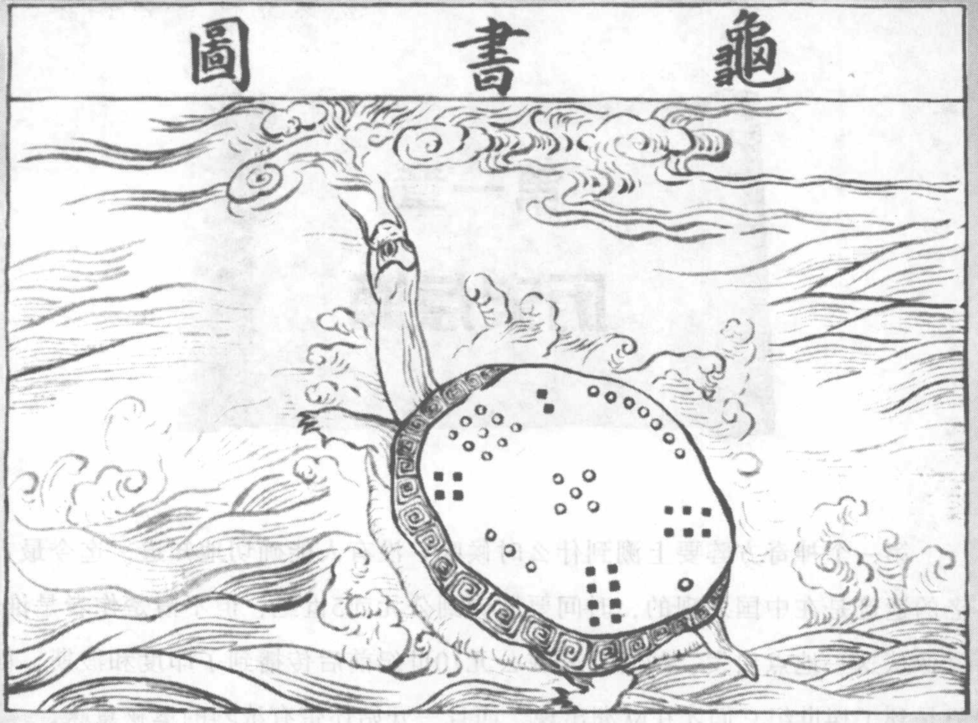

图2　背负洛书的神龟出水

只大龟从河水中出来巡游一圈，之后返回来所。

好像是有个小孩观察到了刻在龟背上的奇异图案，并明白应向洛河河神奉上确切的15次祭献。于是大家就照这么办了，而且大水立即开始平退。实际上，那个孩子看到的龟背上的那个后来被人称为“洛书”的奇怪花纹恰与一个神奇3次方阵相符，也就是其纵、横、斜各向之和都等于15。

上溯至公元前7世纪的古老书籍就提到了这个龟图（而不是一个波斯的神奇方阵）的传说；公元前5—3世纪的另一些古籍也提到过该图；公元80年时的Tai Li Chi (疑此名转抄有误，当指东汉时期兼管国家典籍、天文历法、祭祀的“太史令”——译者注) 又提到洛书上的这个神奇方阵，其描述也被Zhu Luan（音译，汉名查未详，当为南北朝时的陈朝初年人——译者注）于公元570年转引过。

根据中国另一则可能不那么可靠的传说，则将对神奇方阵的发现上推至黄帝时代（公元前2858—前2738）。据此传说，人们向黄帝进献了两只有神异

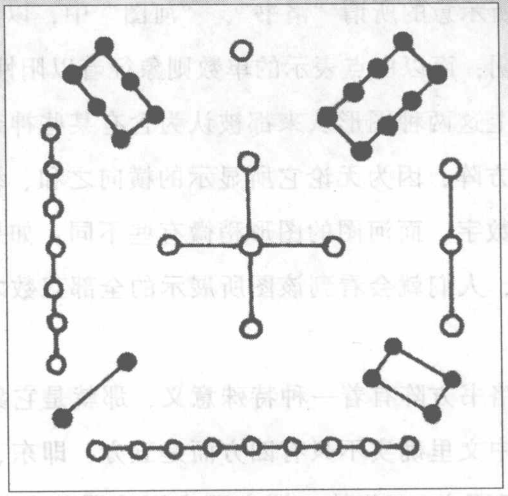

图3　洛书上的神奇方阵：

8　1　6

3　5　7

4　9　2 .

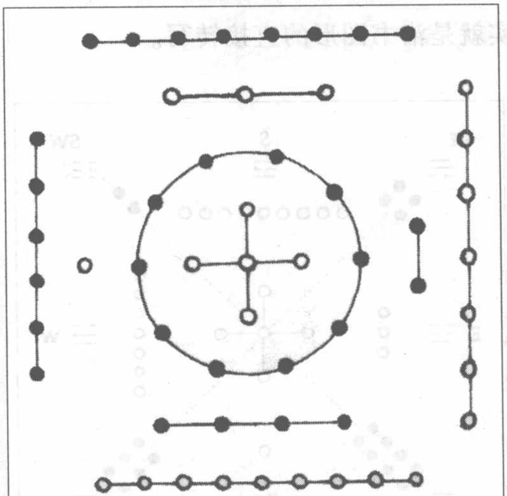

图4　河图上所载的图形

功能的动物，其一是一只背甲上负有上面所引数字图案的乌龟；另一个是一匹出自黄河并化作马形的龙，该马背上也负有与前图很相似的另一幅人称“河图”的图案。

在由图3及图4所示意的所谓“洛书”、“河图”中，以黑点表示的双数代表以阴性为法则的阴；而以白点表示的单数则象征着以阳性为法则的阳。

毋庸赘言，以上这两种图形从来都被认为含有某些神奇特点。洛书的图形的确是一个神奇方阵，因为无论它所显示的横向之和、纵向之和还是对角向之和都是同一个数字。而河图的图形稍微有些不同：如果不考虑该图中心的两个数（5和10），人们就会看到该图所展示的全部双数之和与全部单数之和都等于20。

在古代中国，洛书方阵有着一种特殊意义，那就是它象征着人称五方的五个方位基点。在中文里确实不只有四方而是五方，即东、西、南、北和中（北方在图示中置于下方）。此外，该方阵也影响了著名的《易经》（所谓“变易之书”），这本充满预测推算的古籍至今仍广为应用，其主要内容可上溯至公元前10世纪[1]。

而《易经》的一个中心组成部分“八卦”（即八种三爻图。另，爻形只有阴阳两种，横线“—”表示阳，断横线“--”表示阴；八卦中每卦都有三爻——译者注）其实就是洛书图形的直接转写。

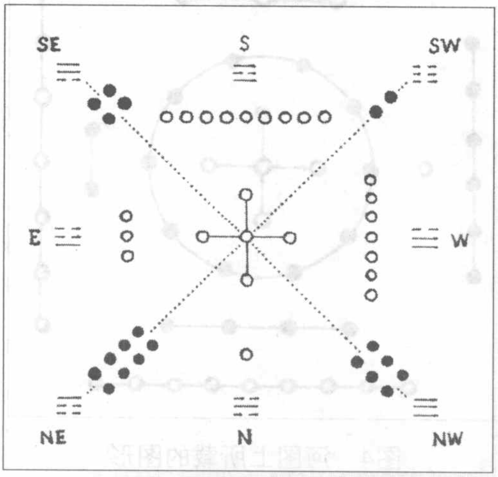

图5　所谓的“八卦图”

[1] 可参见由德-阿尔莱翻译并由德-贝克尔（R.De Becker）注释的《变易之书》（Le Livre des Mutations，Denoël,1959）；尤其请参阅《易经：中国古代变易预测书》(I Ching,The classic chinese Oracle of Change，Barnes and Noble，1995)。

N-O 西北 6	N 北 1	N-E 东北 8
O 西 7	Centre 中 5	E 东 3
S-O 西南 2	S 南 7	S-E 东南 4

图6 中式数字学和罗盘方位标

从东方到西方

严格来说，神奇方阵在中国的出现当在公元前的最后几个世纪之间。不过据史料来看，这些方阵还都局限于3次方阵。而最早的第一批4次方阵是在公元1世纪的印度出现的；最早的8次方阵是在公元9世纪的波斯出现的；这些无疑又都与恰是在公元8世纪出现于印度城邦的象棋游戏有着某种联系。

第一个4次神奇方阵好像是由印度哲学家纳加尔朱那（Nagarjuna,约公元150—250时人）组建的。这一传统在我们现在纪元的前10个世纪中都一直延续着，所以第10和第11世纪的众多资料都引证过4次方阵。在卡吉哈奥（Khajuraho，在印度）的斋纳庙（Temple Jaina）里发现的一幅第10世纪的浅浮雕就是刻画的一个4次方阵，该方阵的特点是很引人注目的。

而5次方阵和6次方阵则出现于公元983年在巴格达（Bagdad）由艾本-阿勒-萨夫-哈兹伊尔（Ibn al-saf' Ras'il）编写的一本百科全书里。此外大家都知道11世纪有一本用阿拉伯语撰写的神奇方阵的专著，也就是《数字的和谐布局》。而在公元1200年前后，另一个名为阿勒·布尼（Al Buni）的阿拉伯数学家曾专注于神奇方阵的研究，并大肆吹嘘它们的神秘特性。他用自己的数学研究来从事某些占星测算以证实他的一些预言。

神奇方阵到了14世纪初才被引进了欧洲。公元1315年，在君士坦丁堡的一位希腊哲学家埃马纽埃尔·摩肖普洛斯（Emmanuel Moschopoulos）写了一本神奇方阵的专著：他吸收了阿勒·布尼的成果同时祛除了其中的神秘色彩。摩肖普洛斯发现了由1以上的整数构成的n次神奇方阵的公式，即该方阵的纵横

列及两主对角斜线之和m等于n（n^2+1）/2。——由此列式可求一个3次方阵的m等于：3×（3×3+1）/2=15。

在意大利文艺复兴时期，列奥纳多·达-芬奇（Léonard de Vinci，1452—1519）的一位密友吕卡·帕乔利（Luca Pacioli，1445—1517）也曾在摩肖普洛斯作品的基础上对神奇方阵进行了研究。他组建出数量很可观的一批不同次数的方阵，并于1494年将之出版成一册数学的参考书籍［名为“Summa de Arithmetica, Geometrica Proportioni et Proportionalità”（《算术、几何、比例和比例分配之和》）］。

然而，神秘性的诱惑跟随着马西里奥·费奇诺（Marsilio Ficino 1433—1499）又重新涌现于江湖：这位梅迪契家族（Medicis，15—18世纪统治佛罗伦萨政治生活的富商家族——译者注）的宠信者坚称神奇方阵是出自上古时代的有通鬼神魔法的祭司文献。

神秘性偏向

的确，神奇方阵没有停止过对神秘传统的影响。在这一传统范围内，当然应该提到那幅谜一样的版画，该画正是经由身为画家和版画家的阿尔布雷克特·丢勒（Albrecht Dürer，1471—1528,文艺复兴时期德国大师）之手而于1514年成为传世的不朽之作[1]。这幅题名为《忧郁》（Melencolia）的版画的内容就是一个4次神奇方阵，加上该方阵的特性是如此引人注目因而可将之称为超级神奇方阵。我们将在本书后边专门涉及4次方阵的第三章中展示其特色。

科尔内留斯·阿格里帕-冯-奈特舍姆（Cornelius Agrippa von Nettesheim，1486—1536）于1531年出版了一本至今仍被引用的书籍，其中充斥着大量对各种玄秘巫术的描述［原名为“De Occulta Philosophia”（《神秘学论》）］。这本书里也囊括了从3次至9次的神奇方阵，而且阿格里帕还将之与星宿及金属互相对应起来如下图表：

[1] 阿尔布雷克特·丢勒虽为画家、版画家，但也对数学颇感兴趣，特别是几何：他于1525年出版过一本实用几何教材，该书最近又以《几何学》之名并由让娜·佩费作评注而被再版（Géométrie, Le Seuil,1995）。

次数	星宿名	金属名
3	土星	铅
4	木星	锡
5	火星	铁
6	太阳	金
7	金星	铜
8	水星	水银
9	月亮	银

图7 阿格里帕的方阵

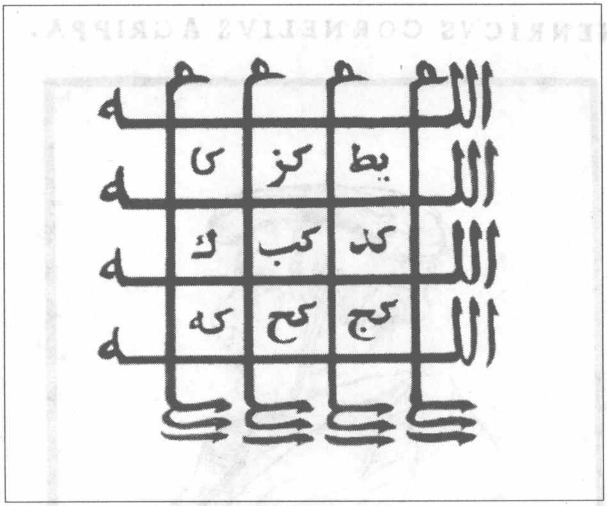

图8 阿拉伯护符

为了不出离本书所涵盖的范围，我们就不展开以神奇方阵为题的神秘文学的讨论了。我们只想简单指出此种文学一直都很丰富，而且臆想出的神奇方阵效力也一直被在到处吹嘘着。就拿图8所示的阿拉伯护符来说，它至今都在北非一带很流行，并被说成具有保护其持有者的功效或是为之带来财富。

这个护符描画的实际上是一个其常数m=66的3次神奇方阵，该方阵被安置于一个由出现8次的安拉（Allah，伊斯兰教真主）名字形成的框架之内。

HENRICI
CORNELII AGRIP
PAE AB NETTESHEYM A' CONSILUS
& Archiuis Indiciariisacræ CAE-
SAREAE Maiestatis: De
OCCVLTA PHI-
LOSOPHIA
Libri Tres.

HENRICVS CORNELIVS AGRIPPA.

Nihil est opertum quod non reueletur,
& occultum quod non sciatur.
Matthæi X.

Cum gratia & priuilegio Cæsareæ Maiestatis ad triennium.

图9 《神秘学论》的第一页（1533年版本）