山东潍坊学校课程行动计划系列丛书

GAOZHONGXINKEBIAO DAOXUELIAN

高中新课标导学练

数学

4

【必修】

人教B版

潍坊市教育科学研究院 编

中国石油大学出版社

GAOZHONGXINKEBIAODAOXUELIAN

高中新课标导学练

数学

④

必修

潍坊市教育科学研究院 编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中新课标导学练. 数学. 4:必修/潍坊市教育科学研究院编. —4版. —东营:中国石油大学出版社,2008.4
ISBN 978-7-5636-2557-4

Ⅰ.高… Ⅱ.潍… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 031496 号

高中新课标导学练. 数学. 4:必修

潍坊市教育科学研究院　编

总 策 划: 路庆良(电话　0546－8393681)
责任编辑: 付晓云(电话　0546－8395745)

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东　东营,邮编　257061)
网　　址: http://www.uppbook.com.cn
电子信箱: suzhijiaoyu1935@163.com
印 刷 者: 青岛星球印刷有限公司
发 行 者: 中国石油大学出版社(电话　0546－8391809)
开　　本: 210×285　印张:8　字数:330 千字
版　　次: 2008 年 5 月第 4 版第 1 次印刷
定　　价: 10.00 元

编者的话

A Note from the Author

基础教育新课程改革的启动，给高中教育教学带来了新的生机与活力。新课程所蕴涵的教育理念，反映了当今时代变迁的特点，体现了世界教育发展的趋势。为了适应这一改革，我们特聘新课程教学研究与实践专家，认真分析，精心组织，推出了这套理念创新、内容实用的"高中新课标导学练"丛书，保证让您用有所益、学有所成。

★ 与教材同步，思路全新，深入领会 ★

根据高中最新课程标准，创设"导"、"学"、"练"三个环节。导：名师点拨，学海指航，导得准，使您高效学习；学：诱思探究，活学活用，学得巧，让您举一反三；练：拓展视野，兼顾知能，练得精，助您步步为营。

★ 与课堂同步，讲练结合，提升素质 ★

紧密联系课堂教学，根据各学科的思维特点设计讲练体系。讲，有利于您与老师的融洽交流，使您从详尽的讲解中学得方法与技巧；练，有利于您把握方向，让您在层次分明的练习中融会贯通。

★ 与自学同步，注重实践，引导创新 ★

联系社会，贴近生活，为您创设主动学习的环境，帮您提高自主学习、合作交流以及分析和解决问题的能力，让您成为学习的主人，使您在思考中顿悟，在顿悟中迁移，达到学以致用的目的。

★ 与高考同步，覆盖考点，高效训练 ★

把握高考命题动向，融高考大纲细节于点点滴滴之中，保证让您学得有方向，练得有目的，考得有依据，在最短的时间内扩大知识容量，提高应试技巧，增强高考实力。

我们由衷地希望本丛书能成为您迈向成功彼岸的金桥。

高中新课标导学练

本书编写组

主　　编　尹玉柱　徐会吉

副 主 编　张合钦　李明照　刘锡宝

编　　者　张合钦　张传刚　谢玉明

陈泗伦　丁春梅　于志萍

韩洪杰　高金梅　刘锡宝

目 录

Contents

灵机一动

第一章 基本初等函数（Ⅱ）

学习导航

1. 主要内容编排

本章共分三节，主要内容包括任意角的概念与弧度制、任意角的三角函数、诱导公式、同角三角函数的基本关系式、三角函数的图像与性质以及已知三角函数值求角等.

第一节是任意角的概念与弧度制. 首先在初中已学过的角的概念的基础上，把角的概念由0°到360°范围推广到任意角的范围，引出终边相同的角和象限角的概念. 接着引入度量角的弧度制以及弧度制与角度制的换算，并得到扇形的弧长、圆心角、半径之间的关系式. 弧度数是十进位的实数，当角用弧度衡量时，每一个角对应一个实数，每一个实数对应一个角，因此，三角函数可看成是以实数为自变量的函数.

第二节是任意角的三角函数. 本节第一小节的内容是把三角函数的概念由锐角三角函数推广到任意角的三角函数，并引入正割和余割的概念，由三角函数定义总结出了三角函数的正负号法则. 第二小节学习了单位圆中的正弦线、余弦线、正切线的规定，从而将这些函数表示为有向线段. 单位圆可以帮助我们直观地认识任意角、任意角的三角函数，理解三角函数的周期性. 第三小节和第四小节借助单位圆推得同角三角函数的两个基本关系式，并导出全部诱导公式.

第三节是三角函数的图像与性质. 利用正弦线引入正弦曲线，并总结出五点作图法. 由正弦曲线和正弦函数的定义进一步研究了正弦函数的性质，包括值域、周期性、奇偶性、单调性，接着重点学习正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像和性质以及对它的简单应用. 在重点掌握以上内容的基础上，简单了解余弦函数和正切函数的图像与性质. 最后学习已知三角函数值求角的方法，并给出一般记号：$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$.

本章最后安排了数学建模活动. 我们在数学（必修1）中学习函数的时候已经接触过数学建模的基本思想，这里用一个框图概括了数学建模的一般过程，然后给出一个海水潮汐涨落问题让我们自己动手解决. 在学习时要充分重视这个问题，并将其作为一次重要作业认真完成.

2. 地位与作用

三角函数作为基本初等函数之一，是中学数学的重要内容之一，也是学习高等数学的基础. 它的认知基础主要是几何中圆的性质、相似形的有关知识以及在数学（必修1）中建立的函数概念和指数函数、对数函数的研究经验. 主要学习内容是三角函数的概念、图像与性质，以及三角函数模型的简单应用；研究方法主要是代数变形和图像分析，因此三角函数的研究已经初步把几何与代数联系起来了. 本章所介绍的知识，既是解决生产实际问题的工具，又是学习后继内容和高等数学的基础. 三角函数是数学中重要的数学模型之一，是研究度量几何的基础，是研究自然界周期变化规律最强有力的数学工具. 三角函数作为描述周期现象的重要数学模型，与其他学科（特别是物理学、天文学）联系紧密.

3. 重点和难点

学习重点：任意角三角函数的概念，同角三角函数的关系式，诱导公式，正弦函数的图像与性质，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与正弦函数的关系.

学习难点：弧度制和周期函数的概念，正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像变换，综合运用公式进行求值、化简和证明等.

4. 学法指导

(1) 学习本章内容时，既要掌握三角函数中各个函数的基本概念，又要熟悉它们之间的内在联系. 对于同角三角函数的基本关系式和诱导公式，既要用心去记忆，又要掌握公式推导的规律，不断总结公式应用的技巧.

有错必纠

(2) 正弦函数、余弦函数和正切函数都是周期函数,其中正弦、余弦函数的周期是2π,正切函数的周期是π.我们画正弦、正切函数的图像时,就利用了它们的周期性.在几何画图中,运用了将图形平行移动的方法,例如由诱导公式和正弦函数的图像,可以通过平行移动的方法,得出余弦函数的简图.

(3) 在本章中涉及的数学思想主要有数形结合和化归.本章用到的化归包括以下几个方面:一是把未知化归为已知,例如用诱导公式把求任意角的三角函数值逐步化归为求锐角三角函数值;二是把特殊化归为一般,例如把正弦函数的图像逐步化归为函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$x\in\mathbf{R}$(其中$A>0,\omega>0$)的简图,把已知三角函数值求角化归为求$[0,2\pi]$上适合条件的角的集合等.

1.1　任意角的概念与弧度制

1.1.1　角的概念的推广

学习目标

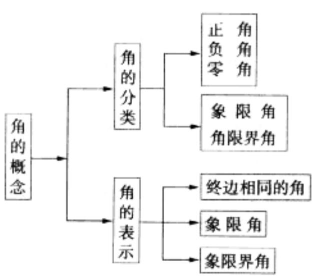
1. 理解任意角的概念,学会在平面内建立适当的坐标系来讨论角.

2. 掌握象限角、终边相同的角、终边在坐标轴上的角及区间角的表示方法.

3. 了解角的概念的推广是为了满足解决现实生活和生产中实际问题的需要,学会用数学的观点分析、解决实际问题,通过训练各种角的表示法提高分析、抽象、概括的能力.

知识点扫描

1. 网络结构图



2. 知识点剖析

(1) 角的概念的推广

初中几何中给出的角的定义是:有公共端点的两条射线组成的图形叫做角.这个概念在一定的范围内是非常有用的,它直观、形象、度量方便,但在更广的范围内解决问题却有局限性.初中几何教材中也给出了角的另一种定义,即我们高中教材中给出的角的定义,但没有展开.对角的概念的理解,首先,要紧紧抓住"旋转"二字,用运动的观点来看待角的概念,一是要明确旋转的方向,二是要明确旋转的大小,三是要明确射线未做任何旋转时的位置,从而得到正角、负角、零角的定义;其次,不能忽略实际问题的意义,可通过钟表时针(或分针)的逆时、顺时的转动以及体操中的转体等实例来理解角的大小、正负的含义.

特别提醒:

a. 逆时针旋转为正角,顺时针旋转为负角,没有旋转时,叫做零角.

b. 角的概念推广以后,角不再只能是$0°\sim90°$或者$0°\sim360°$,而是任意大小都有可能.

(2) 象限角与象限界角

① 判断一个角是第几象限角,首先要在平面直角坐标系中,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与x轴的正半轴重合,在这个前提下,由角的终边所在象限来判断这个角是第几象限角.若角的终边落在坐标轴上,我们称其为象限界角.

② 引入直角坐标系来研究角,体现了数形结合的思想,为后面研究任意角的三角函数埋下了伏笔,同时渗透了基本的数学方法(通法)——坐标法.

特别提醒:

a. 角的终边落在坐标轴上,它不属于任何一个象限,称为象限界角.

b. 要注意锐角与第一象限角的区别.

(3) 终边相同的角

对于终边相同的角,应会分别用文字语言和符号语言加以描述.通过与角α终边相同的角的集合$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,能将不在$[0°,360°)$内的任意角$\beta$转化为用$[0°,360°)$内的角表示的形式,即可以判定$\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$为第几象限角,为以后证明恒等式、化简及利用诱导公式求三角函数值打下基础.

特别提醒:

a. $\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$说明角$\beta$与角$\alpha$终边相同,所在象限相同.

b. 终边相同的角大小不一定相同.

3. 重点难点透视

(1) 本节的重点是任意角和象限角的概念,难点是把终边相同的角分别用集合和符号语言正确地表示出来.

(2) 日常生活中大量的大于360°的角以及按不

同方向旋转而成的角的实例，说明扩充角的范围的必要性. 像区别一对具有相反意义的量一样，为了表示按顺、逆时针方向旋转而成的角，需要引入正、负角，这些概念的引入解决了诸如旋转、周期变化等的表示和运算问题. 角的扩展具有一定的重要性，而这些定义或规定都是在初中所学知识的基础上，运用合情推理或类比的方法得到的. 要注意所学内容与初中知识的联系与区别.

学思导引

1. 与角 α 终边相同的角的集合为 $S=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$，这里的角 α 应理解为任意角. 从这个集合的描述我们可以得到以下结论：与角 α 终边相同的角有无数多个，它们相差 360° 的整数倍；与角 α 终边相同的角与角 α 不一定相等，但相等的角的终边一定相同.

2. 本节的主要内容包括：角的概念及角的实际意义；在平面直角坐标系下研究角. 对于前一个问题，首先应抓住用运动的观点理解概念这个根本；其次应理解各种角的现实意义，为数学知识的应用奠定基础. 对于后一个问题，首先应明确直角坐标系的建立方法，这是用坐标法研究问题的基础；其次应正确区分各类角，并用符号语言准确地加以描述.

典例剖析

题型 1	角的定义问题
思维提示	第一象限的角不一定都是锐角

例 1 下列各命题正确的是 （　　）

A. 终边相同的角一定相等

B. 第一象限的角都是锐角

C. 锐角都是第一象限的角

D. 小于 90° 的角都是锐角

[解题指导] 本题可根据各种角的定义，利用排除法予以解答，也可利用角的定义直接判断.

解法 1：对于 A，-60° 和 300° 是终边相同的角，但它们并不相等，A 错误.

对于 B，390° 是第一象限的角，但它不是锐角，B 错误.

对于 D，-60° 是小于 90° 的角，但它不是锐角，D 错误.

综上知，应选 C.

解法 2：因为锐角的集合是 $\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$，第一象限的角的集合是 $\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，当 $k=0$ 时，两集合相等，所以锐角是第一象限的角.

答案 C

反思与升华 要想否定一个命题，只需举出一个反例即可，解法 1 就是恰当地举出一个反例，将 A，B，D 三个选项予以排除，从而确定选项 C；要想肯定一个命题，则需严格推证.

(1) 注意区分以下各角的不同.

① 锐角 α：$0^\circ<\alpha<90^\circ$；

② 小于 90° 的角 β：$\beta<90^\circ$；

③ 第一象限的角 γ：

$k\cdot360^\circ<\gamma<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

(2) 象限界角的集合：

终边落在 x 轴的非负半轴上的角的集合为 $\{x|x=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 x 轴的非正半轴上的角的集合为 $\{x|x=k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 x 轴上的角的集合为 $\{x|x=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 y 轴非负半轴上的角的集合为 $\{x=k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 y 轴非正半轴上的角的集合为 $\{x|x=k\cdot360^\circ-90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 y 轴上的角的集合为 $\{x|x=k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在坐标轴上的角的集合为 $\{x|x=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

误区警示：弄清常见角的范围是解题的关键.

题型 2	象限角的表示
思维提示	特别注意象限界角

例 2 写出终边在第一、三象限的角的集合.

[解题指导] 应用终边相同的角的知识分别把第一、三象限角的边界表示出来，再用不等式表示其间的角，最后求满足条件的角的集合的并集，并用最简单的式子表示.

解法 1：终边在第一象限的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在第三象限的角的集合为 $\{\alpha|180^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<270^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

又 $k\cdot360^\circ=2k\cdot180^\circ$，$180^\circ+k\cdot360^\circ=(2k+1)\cdot180^\circ$，

故终边在第一、三象限的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot180^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

解法 2：终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=90^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

故终边在第一、三象限的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot180^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

反思与升华 在解法 1 中要注意对式子进行合理的变形，特别要注意 $k\in\mathbf{Z}$ 这一条件以及 $2k$，$2k+1$ 的表示范围等.

灵机一动

有错必纠

误区警示：注意不要把象限界角也写成某一象限角.

题型 3	判断角所在的象限
思维提示	借助平面直角坐标系画角

例 3　若 α 是第四象限角，则 $180°-\alpha$ 为第几象限角？

[解题指导] 对本题，可以从数和形两种不同的角度作出判断.

解法 1：由 α 是第四象限角知，$270°+k\cdot 360°<\alpha<360°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$，由此可得 $-180°-k\cdot 360°<180°-\alpha<-90°-k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$，因此 $180°-\alpha$ 是第三象限角.

解法 2：如图 1-1-1 所示，在平面直角坐标系内先画出任一第四象限角 α，由此画出 $-\alpha$，把 $-\alpha$ 终边按逆时针方向旋转 $180°$ 得 $180°-\alpha$ 角的终边，可知 $180°-\alpha$ 是第三象限角.

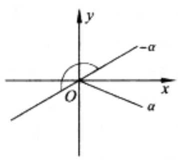


图 1-1-1

反思与升华 对于判断角的终边位置的题目，利用图形来解是比较简洁的，用特殊值法也很方便.

误区警示：利用解法 1 时，要注意不等式性质的正确运用.

题型 4	有关角 $\frac{\alpha}{2}$，α，2α 间的转化问题
思维提示	解决此类问题首先应写出已知角的范围，然后对 k 分类讨论

例 4　若 α 是第一象限角，则 2α，$\frac{\alpha}{2}$ 分别是第几象限角？

[解题指导] 由 α 是第一象限角可知 $k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°(k\in\mathbf{Z})$，则 2α，$\frac{\alpha}{2}$ 的范围分别为 $2k\cdot 360°<2\alpha<2k\cdot 360°+180°(k\in\mathbf{Z})$，$k\cdot 180°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+45°(k\in\mathbf{Z})$. 通过对整数 k 分类讨论可知，2α 是第一、二象限角或终边落在 y 轴正半轴上的角，$\frac{\alpha}{2}$ 是第一、三象限角.

解：因为 $k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $2k\cdot 360°<2\alpha<2k\cdot 360°+180°(k\in\mathbf{Z})$，

所以 2α 是第一、二象限角或终边落在 y 轴正半轴上的角.

对于 $k\cdot 180°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+45°(k\in\mathbf{Z})$，

当 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$ 时，

$n\cdot 360°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+45°$，

所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角；

当 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，

$n\cdot 360°+180°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+225°$，

所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一、三象限角.

反思与升华 若已知角 α 是第几象限角，判断 $\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$ 等是第几象限角，主要方法是解不等式并对整数 k 进行分类讨论.

误区警示：要注意进行 k 分别为奇数和偶数时的讨论.

感受理解

一、选择题

1. 角 α 的终边经过点 $M(0,-3)$，则 α　　(　　)
   A. 是第三象限角
   B. 是第四象限角
   C. 既是第三象限又是第四象限角
   D. 不是任何象限角

2. 若 α 为第一象限角，则 $k\cdot 180°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的终边所在的象限是　　(　　)
   A. 第一象限　　B. 第一、二象限
   C. 第一、三象限　　D. 第一、二、四象限

3. 终边与坐标轴重合的角的集合是　　(　　)
   A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$
   B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$
   C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$
   D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

4. 射线 OA 绕端点 O 逆时针旋转 $120°$ 到达 OB 位置，由 OB 位置顺时针旋转 $270°$ 到达 OC 位置，则 $\angle AOC=$　　(　　)
   A. $150°$　　B. $-150°$
   C. $390°$　　D. $-390°$

5. 若集合 $M=\{x|x=k\cdot 90°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则　　(　　)
   A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$
   C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

6. 如图 1-1-2 所示，终边落在阴影部分的角的集合是　　(　　)

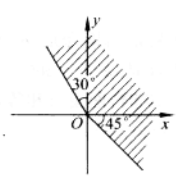


图 1-1-2

A. $\{\alpha|-45°\leqslant\alpha\leqslant120°\}$

B. $\{\alpha|120°\leqslant\alpha\leqslant315°\}$

C. $\{\alpha|k\cdot360°-45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|k\cdot360°+120°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+315°,k\in\mathbf{Z}\}$

二、填空题

7. 若将时钟拨慢 5 分钟，则分针转了________度，时针转了________度.

8. 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的角度是________.

深化提高

一、选择题

1. 在平面直角坐标系中，若角 α 与角 β 的终边互相垂直，那么 α 与 β 的关系是 （　　）

A. $\beta=\alpha+90°$

B. $\beta=\alpha\pm90°$

C. $\beta=\alpha+90°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

D. $\beta=\alpha\pm90°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

2. 已知 α 是第三象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是（　　）

A. 第一或第二象限

B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限

D. 第二或第四象限

二、填空题

3. 与 $-490°$ 终边相同的角是________________，它们是第________象限角，其中最小正角是__________，最大负角是__________.

4. 集合 $A=\{x|-90°<x<90°\}$，$B=\{x|-180°<x<0°\}$，则 $A\cap B=$______________.

三、解答题

5. 如图 1-1-3 所示，写出终边落在图中阴影部分（包括边界）的角的集合，并指出 $-950°12'$ 是否是该集合中的角.

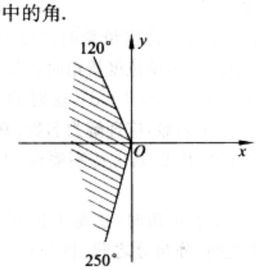


图 1-1-3

6. 已知角 α 是第三象限的角，试判断 $\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限.

视野拓展

探究活动

经过 5 小时又 25 分钟，时钟的分针、时针各转多少度？

参考答案：

5 小时又 25 分钟折合成 325 分钟. 对分针来说，60 分钟对应 360°，所以 325 分钟对应 $\frac{325}{60}\times360°=1\ 950°$，因为顺时针旋转，所以分针转 $-1\ 950°$.

5 小时又 25 分钟折合成 $5\frac{25}{60}$ 小时. 对时针来说，1 小时对应 30°，所以 $5\frac{25}{60}$ 小时对应 $5\frac{25}{60}\times30°=162.5°$，所以时针转 $-162.5°$.

1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算

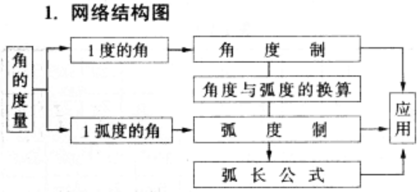
学习目标

1. 了解弧度的意义，能正确地进行弧度与角度的换算.

2. 熟记特殊角的弧度数.

知识点扫描

1. 网络结构图



2. 知识点剖析

（1）弧度制

关于弧度制的理解，主要明确如下几点：

① 和角度制对比，弧度制是以“弧度”为单位来度量角的单位制，而角度制是以“度”为单位来度量

灵机一动

有错必纠

角的单位制.

② 1 弧度的角是指等于半径长的弧所对的圆心角，而 1 度的角是指等于周角的$\frac{1}{360}$的角，二者大小显然不同.

③ 无论是以“弧度”还是以“度”为单位，角的大小都是一个与“半径”大小无关的定值，“弧度”或“度”仅仅是为了能使角的概念描述得更具体而设置的一个“过渡量”，这对于推广角的概念有积极意义.

特别提醒：

a. 弧的度数等于圆心角的度数，随着角的概念的推广，圆心角与弧也进行了推广，即它们都有了正、负、零之分，且圆心角与弧是一一对应的.

b. 当角α的大小一定时，不论这个角所对的圆弧的半径是多少，弧长与半径的比值总是一个定值，它仅与圆心角的大小有关，所以我们可以用弧长与半径的比值来度量角的大小.

(2) 角度与弧度的换算

用“弧度”与“度”去度量每一个角时，除了零角以外，所得到的量数都是不同的，但它们既然是度量同一个角的结果，二者就应该有一个换算的关系. 学习时应抓住如下关系式：

$$360^\circ=2\pi\ \text{rad}\Rightarrow 180^\circ=\pi\ \text{rad}$$

以此为基础，不论是将角度用弧度来表示，还是将弧度用角度来表示，都可以进行转换.

在进行角度和弧度的换算时，要学会写出“算法”，同时也要学会运用计算器进行弧度和角度之间的换算. 另外还要记住一些常用的特殊角如 30°，45°，60°，90°，135°，150°，270°等的弧度数.

特别提醒：

a. 弧度制和角度制的互化是本节的重点，也是难点. 互化时计算繁杂，极易出错，如果能够认清这一互化的实质仅仅是一种比例关系，问题就迎刃而解了. 具体的做法如下：首先牢记最基本的对应关系，即 $180^\circ=\pi$ rad，然后将所需转化之值按要求代入下式：

$$\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{\text{这个角的弧度数}}{\text{这个角的角度数}},$$

最后将未填的部分解出，再添上相应的单位即可.

b. 需记住的特殊角的弧度数见表 1-1-1.

表 1-1-1

度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
度	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

(3) 公式 $\alpha=\frac{l}{r}$

用公式 $\alpha=\frac{l}{r}$ 求圆心角时，应注意其结果是圆心角的弧度数. 要求熟练掌握它及其变形后的另外两种形式：$l=\alpha\cdot r$ 和 $r=\frac{l}{\alpha}(\alpha\neq0)$. 运用这两个变形公式时，如果已知的角以度为单位，则应先把它化成弧度后再计算.

特别提醒：

a. 用公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 求圆心角时，应注意其结果是圆心角的弧度数的绝对值. 具体应用时，既要注意大小，又要注意正负.

b. 用弧度制表示角时，不能与角度制混用，比如 $\alpha=2k\pi+30^\circ(k\in\mathbf{Z})$，$\beta=k\cdot360^\circ+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$都是不准确的.

3. 重点难点透视

(1) 本节的重点是理解弧度的意义，能正确地进行弧度与角度的换算；难点是弧度的概念及其与角度的关系. 其中，准确理解 1 弧度的角的含义是建立弧度概念的关键.

(2) 要弄清 1 弧度的意义. 弧度制与角度制一样，只是度量角的一种方法，但由于角度制先入为主的影响，学起来有一定的困难. 首先必须清楚 1 弧度的概念，它与所在圆的半径大小无关. 其次弧度制与角度制相比有一定的优点，其一，在进位上角度制在度、分、秒上是六十进制，而弧度制却是十进制；其二，在弧长和扇形面积的表示上，弧度制也比角度制简单.

学思导引

1. 角的概念推广后，无论是用角度制还是用弧度制，都能在角的集合与实数的集合 **R** 之间建立一种一一对应关系，只是对应法则不同而已，即“每个角都有唯一的实数与它对应；反之，每个实数也都有唯一的角与它对应”.

2. 用“度”作为单位度量角时，“度”（或“°”）不能省略；用“弧度”作为单位度量角时，“弧度”两字可以省略. 如 sin 3 是指 sin(3 rad)，这时的弧度数“3”在形式上是一个不名数，应理解为名数. 常常把弧度数写成“多少 π”的形式，若无特别要求，不必把 π 写成小数的形式.

3. 用角度制表示角时，总是十进制、六十进制混用，度与度之间、分与分之间、秒与秒之间是十进制的，例如 10 个 6 度是 60 度等；而度、分、秒之间是六十进制的，计算起来不方便. 因此弧度制具有一定的优越性.

典例剖析

题型 1	有关弧度数的计算
思维提示	根据弧度的计算公式求解

例 1　圆弧长度等于其内接正三角形边长，则其圆心角的弧度数为　（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

[解题指导] 可根据弧度的计算公式进行求解，关键先求出圆弧的长度，即正三角形的边长．设圆的半径为 r，则其内接正三角形的边长为$\sqrt{3}r$，由 1 弧度角的定义可得 $\theta=\frac{\sqrt{3}r}{r}=\sqrt{3}$，即所求圆心角的弧度数是$\sqrt{3}$．

答案 C

反思与升华 利用弧度数的计算公式求角的弧度数，关键是求出角所对的弧长．

误区警示： 弧度数不一定用$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$…表示，$\sqrt{3}$，2…也可用来表示角的弧度数．

题型 2	弧长及面积的计算
思维提示	把一个图形分解成几个图形或把几个图形组合成一个图形

例 2　一条弦的长度等于半径 r，求：

（1）这条弦所对的劣弧长；

（2）这条弦和劣弧所组成的弓形的面积．

[解题指导] 由已知条件可知这条弦所对的圆心角的大小为$\frac{\pi}{3}$，然后用公式求解．

解：（1）如图 1-1-4 所示，半径为 r 的$\odot O$ 中弦 $AB=r$，则$\triangle OAB$ 为等边三角形，所以$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，则弦 AB 所对的劣弧长为$\frac{\pi}{3}r$．

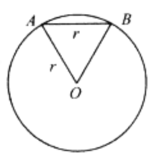


图 1-1-4

（2）因为 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$，

$S_{扇形OAB}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times r^2=\frac{\pi}{6}r^2$，

所以 $S_{弓形}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle AOB}$

$=\frac{\pi}{6}r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$．

反思与升华 图形的分解与组合是解决数学问题的基本方法之一．本例中，把弓形看成扇形与三角形的差，即可运用已有知识解决问题．

误区警示： 解决此类问题时，往往有的同学不会分解图形，导致无从下手．

题型 3	有关弦长的计算
思维提示	利用解三角形的有关知识求解

例 3　如图 1-1-5 所示，扇形 AOB 的面积是 4 cm²，它的周长是 10 cm，求扇形的中心角 α 的弧度数及弦 AB 的长．

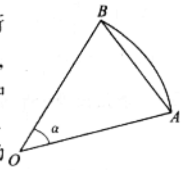


图 1-1-5

[解题指导] 利用扇形的面积公式及扇形的周长求出半径及弧长，再利用解三角形的知识求解．

解：设$\widehat{AB}$长为 l (cm)，扇形半径为 r (cm)，则由题意得

$$\begin{cases}l+2r=10,\\ \frac{1}{2}l\cdot r=4.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}r=1,\\ l=8,\end{cases}$（不合题意，舍去）或$\begin{cases}r=4,\\ l=2.\end{cases}$

故 $\alpha=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$（弧度），

故弦 $AB=2\times4\sin\frac{1}{4}=8\sin\frac{1}{4}$ (cm)．

反思与升华 ① 弧度制的引入使相关的弧长公式、扇形面积公式均得到简化，所以在解决这些问题时通常采用弧度制．② 一般地说，在几何图形中研究的角，其范围是$(0,2\pi)$．

误区警示： 注意数形结合是解题的关键．

感受理解

一、选择题

1. 下列各对角中，终边相同的是　（　　）

A. $\frac{3\pi}{2}$和 $2k\pi-\frac{3\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$

B. $-\frac{\pi}{5}$和$\frac{22\pi}{5}$

C. $-\frac{7\pi}{9}$和$\frac{11\pi}{9}$

D. $\frac{20\pi}{3}$和$\frac{122\pi}{9}$

2. 在半径为 10 的圆中，$\frac{4\pi}{3}$的圆心角所对弧长为　（　　）

A. $\frac{40\pi}{3}$　　B. $\frac{20\pi}{3}$

C. $\frac{200\pi}{3}$　　D. $\frac{400\pi}{3}$

3. 下列四个命题中，不正确的是　（　　）

A. 半圆所对的圆心角是 π rad

B. 周角的大小等于 2π

C. 1 弧度的圆心角所对的弧长等于该圆的半径

D. 长度等于半径的弦所对的圆心角是 1 弧度

灵机一动

有错必纠

4. 若$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则$\alpha-\beta$的取值范围是　　（　　）

A. $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$　　B. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

C. $(-\pi,0)$　　D. $(-\pi,\pi)$

5. 一条弦长等于半径的$\frac{1}{2}$，则此弦所对的圆心角　　（　　）

A. 等于$\frac{\pi}{6}$弧度　　B. 等于$\frac{\pi}{3}$弧度

C. 等于$\frac{1}{2}$弧度　　D. 以上都不对

二、填空题

6. 角α,β的终边关于$x+y=0$对称，且$\alpha=-\frac{\pi}{3}$，则$\beta=$____________.

三、解答题

7. 扇形AOB的周长为 8 cm.

(1) 若这个扇形的面积为 3 cm^2，求圆心角的大小；

(2) 求这个扇形的面积取得最大值时圆心角的大小和弦长AB.

8. x正半轴上一点A绕原点依逆时针方向做匀速圆周运动，已知点A每分钟转过θ角$(0<\theta\leqslant\pi)$，经过 2 分钟到达第三象限，经过 14 分钟回到原来的位置，那么θ是多少弧度？

深化提高

一、选择题

1. 若$M=\left\{\alpha\left|\alpha=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{5},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$N=\{\alpha|-\pi<\alpha<\pi\}$，则$M\cap N=$　　（　　）

A. $\left\{-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\right\}$　　B. $\left\{\frac{4\pi}{5},-\frac{7\pi}{10}\right\}$

C. $\left\{-\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10},\frac{4\pi}{5},-\frac{7\pi}{10}\right\}$　　D. $\left\{-\frac{7\pi}{10},\frac{3\pi}{10}\right\}$

2. 把$-1\ 485°$写成$2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$的形式是　　（　　）

A. $-8\pi+\frac{\pi}{4}$　　B. $-8\pi-\frac{7\pi}{4}$

C. $-10\pi-\frac{\pi}{4}$　　D. $-10\pi+\frac{7\pi}{4}$

3. 如果α为第三象限角，那么$\frac{\pi}{2}-\alpha$是　　（　　）

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

4. 已知 2 弧度的圆心角所对的弦长为 2，这个圆心角所对的弧长是　　（　　）

A. 2　　B. $\sin^2 1$

C. $\frac{2}{\sin 1}$　　D. $2\sin 1$

5. 下列各组角中终边相同的是　　（　　）

A. $(2k+1)\pi$与$(4k\pm1)\pi,k\in\mathbf{Z}$

B. $\frac{k\pi}{2}$与$k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

C. $k\pi+\frac{\pi}{6}$与$2k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$

D. $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$与$\frac{k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$

二、解答题

6. 时针指到 3 点，又经过 1 h 又 55 min 后，时针至分针的夹角是多少弧度？合多少度？

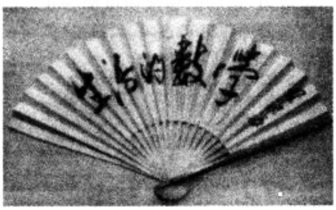
7. 对于工作正常的时钟，自零点开始到分针与时针再一次重合，分针转过的角的弧度数是多少？

视野拓展

纸扇能否按照黄金比例设计？

在炎炎夏日，用纸扇驱走闷热，无疑是很好的方法.扇在美观设计上，可考虑用料、图案和形状.若从数学角度看，我们能否利用黄金比例(0.618)去设计一把富有美感的白纸扇？

如图 1-1-6 所示，在设计纸扇张开角(θ)时，可考虑从一圆形(半径为 r)分割出来的扇形的面积(A_1)与剩余面积(A_2)的比值.若该比值等于黄金比例，便可以找出角 θ.



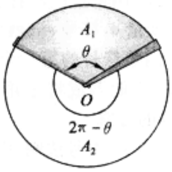


图 1-1-6

若 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{\frac{1}{2}r^2\theta}{\frac{1}{2}r^2(2\pi-\theta)}=0.618$，$\theta$ 以弧度表示，则

$\theta=0.618(2\pi-\theta)$.

故 $\theta=0.764\pi\approx140°$(精确至最接近的 $10°$).

除了量度市面上的纸扇张开的角度外，我们还可自制不同形状的纸扇，去测试一下角 θ 接近 $140°$ 的设计是否最美.

1.2　任意角的三角函数

1.2.1　三角函数的定义

学习目标

1. 理解并掌握任意角三角函数的定义.
2. 理解三角函数是以实数为自变量的函数.
3. 掌握正弦、余弦、正切函数的定义域.
4. 通过任意角三角函数的定义，认识到锐角三角函数是任意角三角函数的一种特例，加深对特殊与一般关系的理解.

知识点扫描

1. 网络结构图

任意角的三角函数 → 三角函数的定义；正弦、余弦和正切函数的定义域；三角函数在各象限的符号

2. 知识点剖析

(1) 三角函数的定义

设 α 是一个顶点在原点、始边在 x 轴正半轴上的任意角，α 终边上任一点 P 的坐标是(x,y)，它与原点的距离是 $r(r>0)$，如图 1-2-1 所示，那么 α 的六个三角函数定义为：

正弦函数　$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$　　余弦函数　$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$

正切函数　$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$　　余切函数　$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$

正割函数　$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$　　余割函数　$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$

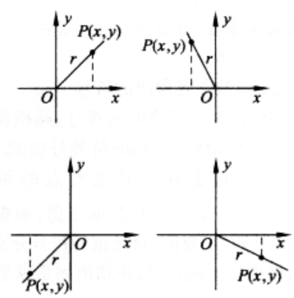


图 1-2-1

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别可以看作从一个角的集合到一个比值的集合的映射，它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数，这些函数叫做三角函数.我们重点研究正弦函数、余弦函数和正切函数.

由定义可知，这六个比值的大小与在终边上所取的点的位置无关，只与角 α 的大小有关，即它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数.定义中的 α 是任意角，但对于一个确定的角，只要各个三角函数有意义，其值就是唯一的.另外，还应注意到此处定义三角函数的方法是坐标法，要与初中所学的在直角三角形中的定义法相统一.

特别提醒：三角函数值是比值，是一个实数，这个实数的大小和点 $P(x,y)$ 在角 α 终边上的位置无关.

(2) 三角函数的定义域

由三角函数的定义知，角 α 的三角函数是利用角 α 终边上任意一点 P 的横、纵坐标和 P 点到原点

灵机一动

有错必纠

的距离两两相比得到的，因而确定三角函数的定义域应抓住分母为0时比值无意义这一关键.

六种函数的定义域见表1-2-1.

表 1-2-1

三角函数	定义	定义域
$\sin\alpha$	$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	
$\tan\alpha$	$\tan\alpha=\frac{y}{x}$	$\left\{\alpha\left\vert\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$
$\sec\alpha$	$\sec\alpha=\frac{r}{x}$	
$\cot\alpha$	$\cot\alpha=\frac{x}{y}$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$
$\csc\alpha$	$\csc\alpha=\frac{r}{y}$	

其中要重点掌握正弦、余弦和正切函数的定义域.

特别提醒：

a. 正切函数、正割函数的定义域为$\left\{\alpha\left\vert\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

b. 正切与余切、正弦与余割、余弦与正割的同角函数值互为倒数.

（3）三角函数在各象限的符号

正弦、余弦、正切函数值的符号，是根据这三种函数的定义和各象限内坐标的符号导出的. 因为从原点到角的终边上任一其他的点的距离$r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}$总是取正值，根据这三种函数的定义可知，正弦值、余弦值的符号分别取决于纵坐标y、横坐标x的符号；正切值则是纵坐标y、横坐标x同号时为正，异号时为负.

特别提醒：若角的终边落在y轴上，则其正切值不存在.

3. 重点难点透视

（1）本节的重点是任意角三角函数的定义与正弦、余弦、正切函数的定义域，难点是正切函数的定义域.

（2）六种三角函数都是以实数为自变量，以比值为函数值的函数，其关系如图1-2-2所示.

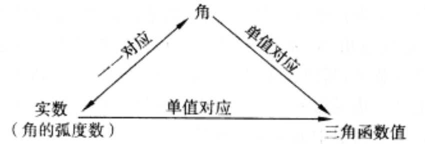


图 1-2-2

这样，三角函数就像前面研究的其他基本初等函数一样，都是以实数为自变量的函数了.

另外，由于圆心角与它所对的弧之间也是一一对应关系，因而三角函数又可以看成是以弧为自变量的函数，这样就使三角函数具有更广泛的意义了.

（3）由三角函数的定义可知，若已知角α终边上一点的坐标，便可求出其各三角函数值. 必须弄清$\frac{y}{r},\frac{x}{r},\frac{y}{x},\frac{x}{y},\frac{r}{x},\frac{r}{y}$这六个比值的大小都与点$P$在角的终边上的位置无关，而只与角的大小有关，即它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数.

（4）教材把三角函数在各象限内的正负号法则总结为三个图（见教材图1-12），这三个图分别说明当角在各个象限时各函数值对应的正负号，按这三个图记忆正负号法则是最好的记忆方法. 另外，也可以用口诀"一全正，二正弦，三两切，四余弦"来记忆，此口诀表示正弦、余弦、正切这三种三角函数的值，"第一象限角全正；第二象限角，只有正弦值为正；第三象限角，正切值和余切值都为正；第四象限角，只有余弦值为正".

学思导引

应当深刻认识三角函数符号的含义. 如$\sin\alpha$这个符号，它表示$\frac{y}{r}$，即角α的正弦，不能把$\sin\alpha$看成$\sin$与α的乘积，犹如不能把$f(x)$看成f与(x)的乘积一样，离开了自变量α，符号$\sin$就没有意义了. 同时也应注意，每个函数符号的第一个字母"s"或"c"或"t"都不能大写，不能养成将三角函数符号写成"Sin α"、"Cos α"等的习惯.

对三角函数的定义、符号法则，应在理解的基础上记忆.

典例剖析

题型1	求三角函数值
思维提示	根据三角函数的定义求解

例1 已知角θ终边上一点$P(x,3)(x\neq0)$，且$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}x$，求$\sin\theta,\tan\theta$的值.

[解题指导] 由正弦、正切函数的定义可求出相应的函数值.

解：因为$r=\sqrt{x^2+9}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$，

所以$\frac{\sqrt{10}}{10}x=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$，

又$x\neq0$，则$x=\pm1$.

又$y=3>0$，所以θ是第一或第二象限角.

当θ为第一象限角时，

$\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan\theta=3$；

当θ为第二象限角时，

$\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan\theta=-3$.

反思与升华 对于不同象限的角θ，求其三角函