一级注册结构工程师基础考试复习教程

2003年版·上册

北京市注册工程师管理委员会（结构） 主编

人民交通出版社
China Communications Press

86.2
BZC
2003.1

一级注册结构工程师基础考试复习教程

2003年版·上册

北京市注册工程师管理委员会（结构）主编

86.2
BZC
2003.1

人民交通出版社

内 容 提 要

本书由北京市注册工程师管理委员会(结构)组织编写,编写人员全部是从事多年注册结构工程师培训工作的专家和教授。本书内容已作为培训讲义使用多年,根据培训回馈意见和以往的考试经验,以及新颁布的规范、标准,对讲义进行了全面修订,现正式出版,以利应考和培训之用。

本教程的最新版以考试大纲为依据,以现行规范、教材为基础编写,目的是为了指导考生复习,因此力求简明扼要,联系实际,着重于对概念和规范的理解运用,并注意突出重点。教程的每章后均附有参考习题,可作为考生检验复习效果和准备考试之用。

本教程适合参加注册结构工程师基础考试的人员使用,是一套优秀的必备参考书。

本书分上、下两册、以统一定价出售。

图书在版编目(CIP)数据

一级注册结构工程师基础考试复习教程:2003年版/北京市注册工程师管理委员会(结构)主编. —北京:人民交通出版社,2003.1
ISBN 7-114-04518-2

Ⅰ.一... Ⅱ.北... Ⅲ.建筑结构—工程师—资格考核—自学参考资料 Ⅳ.TU3

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第093516号

Yiji Zhuce Jiegou Gongchengshi Jichu Kaoshi Fuxi Jiaocheng
一级注册结构工程师基础考试复习教程
(2003年版·上册)
北京市注册工程师管理委员会(结构) 主编
正文设计:姚亚妮 责任校对:宿秀英 责任印制:张 恺
人民交通出版社出版发行
(100013 北京和平里东街10号 010-64216602)
各地新华书店经销
北京鑫正大印刷有限公司印刷
开本:787×1092 1/16 印张:32 字数:798千
2003年1月 第1版
2003年3月 第1版 第2次印刷
印数:4001—7000册 定价:112.00元(上、下两册)
ISBN 7-114-04518-2

一级注册结构工程师基础考试复习教程

编 委 会

主 任 委 员　魏成林
副主任委员　于春普
主　　　编　曹纬浚
编　　　委　(以姓氏笔画为序)
于春普　刘世奎　杨松林　陈向东
钱民刚　曹纬浚　魏成林

前　言

建设部和人事部决定自1997年起实施注册结构工程师执业资格考试制度。

为了帮助结构工程师们准备考试，**北京市注册工程师管理委员会(结构)**自1997年起即委托有关单位举办一、二级注册结构工程师考试辅导班。一级注册结构工程师基础考试辅导班的教师都是本专业有较深造诣的教授和高级工程师，分别来自北京建筑工程学院、北京工业大学、北方交通大学、北京工商大学和北京市建筑设计研究院。教师们以考试大纲为依据，以现行规范、教材为基础，为学员们编写了考试复习教程。教程的目的是为了指导复习，因此力求简明扼要，联系实际，着重对概念和规范的理解应用，并注意突出重点概念。

本教程是在**北京市注册工程师管理委员会(结构)**的组织下，严格按最新考试大纲编写的，是在六年教学实践中不断加以改进中形成的。自1997年至2002年，北京地区参加辅导班的考生近五千人次(包括部分外地学员)，得到了学员们的广泛欢迎，并深受好评。为满足更多应试考生复习的需要，我们组织教师对复习教程进行了全面修订，正式出版。参加本教程编写和修订的教师如下：第一章微积分部分吴昌泽，线性代数部分贾玲华；第二章严隽霖编写，程学平修订；第三章毛怀珍；第四章刘燕；第五章钱民刚；第六章李兆年；第七章雷钰燕编写，朋改非修订；第八章许怡生；第九章陈向东；第十章孙奂仑编写，许小重修订；第十一章刘世奎；第十二章王健；第十三章文孔越编写，杨松林修订；第十四章朱志达编写，冯东修订；第十五章刘民强编写，刘宝生修订；第十六章孙惠镐；第十七章李魁元。

为方便考生复习，本教程分上、下两册出版，上册包括第一至第八章，下册包括第九至第十七章。考生在复习本教程时，应结合阅读相应的教材、规范。本教程每章后均附有参考习题，可作为考生检验复习效果和准备考试的参考。

北京市注册工程师管理委员会(结构)

2002年12月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

总 目 录

上 册

下 册

目　录

第一章　高等数学

第一节　一元函数微分学

一、函数

设 X 与 Y 是实数的两个集合,若按照某规律(法则)对于每一个 $x\in X$,有唯一的数 $y\in Y$ 与之对应,则称在集合 X 上定义了一个单值函数。记为 $y=f(x)$。如果对于 x 的每一个值对应着多个 y 值,则称这种函数为多值函数。对应规律和定义域是函数的两大要素。函数定义域的确定:解析式表示的函数的定义域是使解析式中每一种运算都有意义的自变量 x 的取值范围;实际问题可根据实际问题的性质来确定。

由基本初等函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数及常数经过有限次的四则运算和有限次复合,且用一个式子所表示的函数称为初等函数。分段函数也满足函数定义,只不过它是用几个式子表示的,当自变量取一部分值时,函数用一个式子表示,当自变量取另一部分值时,函数用另一个式子表示。对分段函数的研究是研究函数的不可缺少的部分。

常用的函数的几个特性有:单调性、有界性、奇偶性和周期性。

二、极限

极限是用来描述变量的变化趋势的,分为数列的极限和函数的极限。函数的极限又可根据 x 的变化趋势分为 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 两种。

数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 是指 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立。

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 是指 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 是指 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

如果 $A=0$,则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小。

函数在一点的极限与其左右极限有如下关系:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \tag{1-1}$$

在同一极限过程中,函数的极限与无穷小量有如下关系:

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x) \tag{1-2}$$

其中 $\alpha(x)$ 为该极限过程中的无穷小量。

若 $\lim\limits_{x\to x_0(\text{或}x\to\infty)}f(x)=\infty$,则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量。无穷大量与无穷小量的关系:在同一变化过程中,若 $\lim f(x)=0$,则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$;若 $\lim f(x)=\infty$,则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$。

在计算极限时常用的等价无穷小有，在 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$。

在同一极限过程中有极限的量具有以下运算性质：设 $\lim f(x)=a,\lim g(x)=b$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$；

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=a\cdot b$；

$\lim kf(x)=k\lim f(x)$；(k 为常数)

$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=a^n$；($n$ 为正整数)

(3) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{a}{b}$；$(b\neq0)$；

(4)若 $f(x)\geqslant0$，则 $\lim f(x)=a\geqslant0$；

(5)有极限的量在该极限过程中有界。

常用的求极限的方法有以下几种：

(1)利用极限的定义，特别是求分段函数在分界点处的极限。

(2)利用极限存在准则：夹逼定理、单调有界数列必有极限定理。

(3)运用等价无穷小代替。

(4)利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

(5)利用变量替换。

(6)利用函数的连续性。

(7)利用若 $\lim f(x)=A>0,\lim g(x)=B$，则 $\lim f(x)^{g(x)}=A^B$。

(8)运用罗必达法则求不定型的极限。

三、函数的连续性

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。经常用下述方法定义，设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义，若有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 成立，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。还可以用增量来描述在一点 x_0 的连续性：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义，若有 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，其中 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x)-f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续或左连续。若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点均连续(对区间端点应理解为左或右连续)则称 $f(x)$ 在 I 上连续。

若 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点。当 $f(x)$ 在间断点 x_0 处有左、右极限时，称 x_0 为第一类间断点。并称左右极限存在且相等的第一类间断点为可去间断点；当 $f(x)$ 在间断点 x_0 处左右极限至少有一个不存在时，称 x_0 为第二类间断点。

闭区间 $[a,b]$ 上连续函数具有以下性质：

1.根的存在定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$。

2.介值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)\neq f(b)$，则 $\forall C,\min\{f(a),f(b)\}<C<\max\{f(a),f(b)\}$，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=C$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

3.最值定理:若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$一定可在$[a,b]$上取得最大值和最小值。

四、导数与微分

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义,在点 x_0 给以增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该领域内),则函数取得对应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果当 $\Delta x\to 0$ 时这两个增量的比的极限〔见式(1-3)〕存在,则称这个极限值为函数在点 x_0 的导数,并称函数在 x_0 可导或具有导数。若上述极限不存在,则称函数在 x_0 不可导。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1-3}$$

函数 $y=f(x)$在点 x_0 的导数可记为:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1-4}$$

也可记为 $y'|_{x=x_0}$,$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$,$\frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0}$。

求函数 $f(x)$在 x_0 的导数还可用式(1-5)计算:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1-5}$$

单侧导数:

$$\begin{cases} f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \end{cases} \tag{1-6}$$

式(1-6)分别称为函数 $f(x)$在 x_0 在左导数与右导数,统称为单侧导数。

函数 $f(x)$在 x_0 可导的充要条件是 $f(x)$在 x_0 左、右导各自存在并且相等,即 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$。

函数 $f(x)$在 x_0 可导,则函数在 x_0 点必连续,反之,不一定成立。

$f(x)$在点 x_0 处的导数$f'(x_0)$的几何意义就是曲线 $y=f(x)$在对应点(x_0,y_0)处的切线的斜率。

如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内每一点都有导数,称这种对应关系所确定的函数为 $y=f(x)$的导函数。记为$f'(x)$,y',$\frac{dy}{dx}$,$\frac{d}{dx}f(x)$。此时:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\qquad x\in(a,b) \tag{1-7}$$

常用的求导函数方法归纳如下:

(1)利用导数的定义求导。

(2)利用基本导数公式表和导数的四则运算法则求导。

(3)利用复合函数的求导法则求导:

若 $u=\varphi(x)$在点 x 处可异,$y=f(u)$在相应点 u 可导,则复合函数 $f[\varphi(x)]$在点 x 可导,且$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$或记为$(f[\varphi(x)])'=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$。

(4)反函数求导法:若 $y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$互为反函数,$\varphi(y)$在点 y 可导。且$\frac{dx}{dy}=\varphi'(y)$

$\neq 0$，则 $f(x)$ 在相应点 x 处可导，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$。

(5)参数方程求导法：设 $y=f(x)$ 的参数方程形式为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 时，$\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 均可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$ 则 $\frac{dy}{dx}=\psi'(t)/\varphi'(t)$。

(6)隐函数求导法：若方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，则由 $F(x,f(x))=0$ 两边对 x 求导，并运用复合函数求导法则，就可求得 $f'(x)$。

(7)取对数求导法：在求幂指函数、某些幂函数、连乘积、带根号的函数的导数时，可以采用先取对数后求导的方法进行。

(8)求函数的高阶导数：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 内可导，且极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$ 存在，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x 的二阶导数。一般说来，$f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数仍是 x 的函数，若它可导，则该导数就是原来函数的 n 阶导数。记为 $y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\frac{d^n y}{dx^n}$，$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$。求 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，可以利用求一阶导数的法则逐次地往下求导即可，但在计算过程中，要注意分析归纳、找出规律，写出 n 阶导数的表示式。

(9)参数方程的二阶导数：若方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$。在求出一阶导数 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 后求二阶导数时，别忘再乘 $\frac{dt}{dx}$ 这一项，即：$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{[\varphi'(t)]^3}$。

(10)隐函数的二阶导数：若方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数，求出一阶导数后，在求二阶导数时，应把式中的 y 作为中间变量来求导。

设函数 $y=f(x)$ 在某一区间 I 上有定义，x_0、$x_0+\Delta x$ 在 I 上，如果 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为：

$$\Delta y=A\Delta x+O(\Delta x) \tag{1-8}$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，$O(\Delta x)$ 为比 Δx 高阶的无穷小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 可微。$dy=A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分。$f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可导。记 $\Delta x=dx$，则 $dy=A\Delta x=f'(x_0)dx$。

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分。记作 $dy=f'(x)dx$。函数的微分运算就是求出函数 $f'(x)$ 乘 dx。函数的微分具有微分形式的不变性，即不论 u 是中间变量还是自变量，函数 $f(u)$ 的一阶微分具有相同的形式。

五、微分中值定理

微分中值定理在研究函数中起着重要的作用，最重要的是拉格朗日中值定理，罗尔定理可看作它的特例，柯西定理是它的推广。

1. 罗尔定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

2. 拉格朗日中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{1-9}$$

拉格朗日中值定理还可以写成其它形式：例如写成有限增量形式 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,(0<\theta<1)$。

由拉格朗日中值定理可以证明：若 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒等于零，则 $f(x)$ 在 I 上为常数。

3.柯西中值定理：若 $f(x)$、$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)\neq 0$，则至少存在一 $\xi\in(a,b)$ 使得：

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{1-10}$$

4.罗必达法则，若(1) $\lim\limits_{x\to a(\text{或}\infty)} f(x)=\lim\limits_{x\to a(\text{或}\infty)} F(x)=0(\text{或}\infty)$，(2) $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）处存在，且 $F'(x)\neq 0$，(3) $\lim\limits_{x\to a(\text{或}\infty)}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或 ∞），则

$$\lim_{x\to a(\text{或}\infty)}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a(\text{或}\infty)}\frac{f'(x)}{F'(x)} \tag{1-11}$$

满足以上条件的两个函数比的极限等于函数导数比的极限，在利用罗必达法则时三个条件中有一条不满足就不能应用。对于未定型“$0\cdot\infty$”、“$\infty-\infty$”、“0^0”、“∞^0”、“1^∞”可化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限计算。在利用罗必达法则计算未定式的极限时，前面学过的计算极限的方法仍适用，例如等价无穷小替换，两个重要极限等。

5.泰勒公式：若 $f(x)$ 在 x_0 在某一邻域 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x\in(a,b)$ 有下面式子成立：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{1-12}$$

该公式称为 $f(x)$ 的泰勒公式，$R_n(x)$ 称为余项，其中 $R_n(x)$ 表达式为：

$$R_a(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{1-13}$$

这里 ζ 是介于 x_0 与 x 之间的某个值。

在泰勒公式(1-12)中取 $x_0=0$，就得到工程中常用的马克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x) \tag{1-14}$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}x^{n+1}$，这里 ζ 是介于 0 与 x 之间的某个值。

六、导数的应用

1.判定函数的单调区间：设 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，$\forall x\in(a,b)$，若 $f'(x)>0$（或 <0）（在个别点亦可 $f'(x)=0$），则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 严格单调增加（或减小）。

2.求函数的极值：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内的任何点恒有 $f(x)<f(x_0)$ [或 $f(x)>f(x_0)$]，则说函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值（或极小值），统称为函数的极值，点 x_0 为 $f(x)$ 的极值点。函数的极值是局部的概念，在某区间内函数的极大(小)值不一定是函数的最大(小)值。

极值存在的必要条件：若 $f'(x_0)$ 存在，且 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$。但逆命题不成立，即若 $f'(x_0)=0$，但 x_0 不一定是函数 $f(x)$ 的极值点。导数为零的点称为函数的驻点。驻点及连续但导数不存在的点称为函数可能极值点。

极值存在的充分条件:设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域连续,且可导,若 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,(或 $f'(x)<0$);若 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$(或 $f'(x)>0$)则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值(或极小值)。对于连续但导数不存在的点的极值,同样要通过判定在该点两侧的导数符号来确定。

函数的极值还可通过 $f(x)$ 在该点的二阶导数的符号来判定。若 $f''(x_0)<0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 取得极大值,若 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 取得极小值。

3.函数的最大、最小值

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,函数在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值可通过比较端点、驻点、一阶导数不存在的点的函数值的大小来确定。即

$$f_{最大值}=\max\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots f(x_n)\},$$

$$f_{最小值}=\min\{f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\cdots f(x_n)\}。$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的所有极值可能点。

在求解实际问题时,经常用到下面结论:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且在 (a,b) 内只有唯一一个极值点 x_0,则当 $f(x_0)$ 为极大(小)值时,它就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大(小)值。还可以把这个结论推广到其它连续区间的情况。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加(减少)则 $f(a)$ 为其最小(大)值,$f(b)$ 为其最大(小)值。

4.凹凸性、拐点

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,任意 $x_1,x_2\in(a,b)$ 恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>$(或 $<$)$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸(或凹)的。若曲线在 x_0 两旁改变其凹凸性,称 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点。

函数凹凸性判别法则(充分条件):设 $f''(x)$ 存在,若 $a<x<b$ 时,$f''(x)>0$(或 $f''(x)<0$)(在个别点 $f''(x)$ 可以为零),则曲线为凹(或凸)。

设 $f(x)$ 连续,若在点 x_0,$f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在,且在 x_0 两侧 $f''(x)$ 改变符号时,则点 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点。

5.曲线的渐近线及函数图形的描绘

曲线 C 上的动点 M 沿曲线无限远离坐标原点时,动点 M 与某一直线 L 的距离逐渐趋向于零,则称直线 L 为曲线 C 的一条渐近线。

渐近线的求法:

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$ 有一条铅直渐近线 $x=x_0$,若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 则曲线 $y=f(x)$ 有一条水平渐近线 $y=a$,若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)/x=a$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$ 则曲线 $y=f(x)$ 有一条斜渐近线 $y=ax+b$。

根据函数的定义、连续性、单调性、凹凸性、极值、拐点等知识可以准确地画出函数的图形。函数作图的一般步骤为:

(1)先讨论函数的基本性质:有界性(确定函数的定义域、值域及图形的范围)、奇偶性(了解图形的对称性)、单调性(曲线的上升与下降)、周期性(周期函数只需研究一个周期内的图形);

(2)再求出 y'、y'' 并利用其确定函数的单调区间、极值与凹凸区间及拐点;

(3)列表;

(4)求渐近线;

(5)描点(函数的零点、极值点、拐点及其它特殊点)并根据函数的特性连成曲线。

七、曲率

曲率是曲线弯曲程度的定量描述。

设曲线方程 $y=f(x)$，$f(x)$具有二阶导数，则函数 $y=f(x)$在点(x,y)的曲率 K 为：

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{1-15}$$

在工程实际问题中，若$|y'|<<1$时，则可取：

$$K\approx|y''|。$$

第二节　一元函数积分学

一、不定积分

(一)不定积分的概念

定义在某区间 I 上的函数$f(x)$，若存在函数 $F(x)$，使得该区间上的一切 x，均有 $F'(x)=f(x)$或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则称 $F(x)$为$f(x)$在区间 I 上的原函数。若函数$f(x)$存在两个原函数，那么它们只相差一个常数。由于常数的导数为零，所以函数$f(x)$如果有原函数，则$f(x)$就有无穷多个原函数，可表示为 $F(x)+c$。函数$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$的不定积分，记作：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+c \tag{1-16}$$

利用原函数的定义和不定积分概念可得到下面性质：

$$\begin{aligned}
&\int Kf(x)\mathrm{d}x = K\int f(x)\mathrm{d}x。\ (\text{常数 } K\neq 0)\\
&\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x\\
&\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\\
&\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+c,\ \int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+c
\end{aligned} \tag{1-17}$$

(二)不定积分的计算

1.利用原函数的定义计算不定积分

2.利用积分公式计算下定积分

3.换元积分法

(1)设$f(u)$具有原函数 $F(u)$，而 $u=\varphi(x)$可导，则有：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = F[\varphi(x)]+c \tag{1-18}$$

(2)设 $x=\varphi(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上单调可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数 $F(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi^{-1}(x)]+c \tag{1-19}$$

式中 $\varphi^{-1}(x)$为 $x=\varphi(t)$的反函数。

用(1-19)式,在计算时可根据函数的特点适当选择代换函数。常用的代换有三角代换、根式代换、倒代换等。

4.分部积分法

设 $u(x)$、$v(x)$可微,且$\int v(x)\mathrm{d}u(x)$存在,由公式 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$ 得到分部积分公式:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \text{ 或}$$

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x \tag{1-20}$$

利用分部积分公式计算不定积分的方法称为分部积分法。

分部积分是计算不定积分的重要方法,运用这种方法时,需将被积函数折成 u 与 $\mathrm{d}v$ 两个因式的乘积,正确地把某一函数看作 u 其余看作 $\mathrm{d}v$,利用分部积分法公式计算。

5.有理函数积分

有理函数是指两个多项式的商所表示的函数,即

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

式中 m、n 为非负整数,$a_0\neq 0$,$b_0\neq 0$,$P_n(x)$与 $Q_m(x)$无公因子。当 $m>n$ 时称为真分式,$m\leqslant n$ 时称为假分式。计算时,先通过代数变形或多项式除法化假公式为真分式,再把真分式的分母在实数范围内因式分解,然后按规则折成部分分式之和,用比较同次幂或代特殊值法确定待定系数、再积分。

运用上述方法可将真分式的不定积分化为下面四类积分:

$$(\mathrm{I})\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{II})\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x;$$

$$(\mathrm{III})\int\frac{Mx+N}{x^2+Px+q}\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{IV})\int\frac{Mx+N}{(x^2+Px+q)^n}\mathrm{d}x$$

以上是解有理函数不定积分的一般步骤,但在解此类题之前应先考虑是否有更简便的方法,这一点应注意。

6.三角函数有理式的积分

三角函数有理式的不定积分可通过三角代换设 $\tan\frac{x}{2}=u$ 来解决,$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$,$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$,$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$化为有理函数的积分。对于三角函数的有理式积分,在解题前同样要考虑一下有没有更简便的方法来求解。

7.简单无理函数的积分

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x, \qquad \int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$$

可通过变量替换,设$\sqrt[n]{ax+b}$,$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$为一新变量来解决。

二、定积分

(一)定积分概念

定积分的引入是应实际的需要而产生,如数学中计算曲边梯形的面积,物理中计算变速直

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com