大学笔记

Study Notes of Li Tieying in Charles University, Czechoslovakia

李铁映
Li Tieying

B卷 Volume of B

图书在版编目（CIP）数据

大学笔记.B卷／李铁映.－北京：高等教育出版社，2008.6

ISBN 978-7-04-024221-8

Ⅰ.大…Ⅱ.李…Ⅲ.①高等数学－文集②物理学－文集 Ⅳ.O13-53 O4-53

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第041188号

策划编辑 杨利平 **责任编辑** 张海雁 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京雅昌彩色印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	635×965 1/8		
总 印 张	75.5	**版　　次**	2008年6月第1版
本册印张	39.75	**印　　次**	2008年6月第1次印刷
本册字数	284,000	**总 定 价**	480.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　24221-001

目录
Contents

A卷

B卷

2.10.56

$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad a=a_1=a_2\ldots \quad i\ j=1\ldots n. \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = na \in J$

$\prod_{i=1}^{n} a_i \quad a=a_i \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = a^n \in J$

§2. Těleso

pro okruh C někdy $ax=b$ má řešení někdy ne. $2x=6 \quad x\in C$

$2x=7 \quad x\in C$ neexistuje

Definice 2.1 —— . Buďiž K mn. libovolných prvků. Říkáme, že K je tělesem, když:

① na K je def. rovnost splňující R_0-R_3, při čemž K obsahuje aspoň dva různé prvky vzhledem k této rovnosti.

② na K je def. sčítání a násobení splňující axiomy:

A_0	$a+b=c.$	M_0	$ab=c.$
A_1	$a=b \Rightarrow a+c=b+c$	M_1	$a=b \Rightarrow ac=bc.$
A_2	$(a+b)+c=a+(b+c)$	M_2	$(ab)c=a(bc)$
A_3	$a+b=b+a$	M_3	$ab=ba$
A_4	$a+h=a$	M_4	$aj=a$
A_5	$a+(-a)=h$	$\boxed{M_5}$	
D	$a(b+c)=ab+ac.$		
I	$a\neq h.\ ab=h \quad b=h$		

důsledkem těch axiomů

M_5 = Ke každému prvku a z K, kde $a\neq h$ existuje převrácený prvek $\bar{a}$ tak, že $a\bar{a}=j$

Každé těleso je nejen okruhem. dokonce i je obor integrity.

Věta 2.1 – ~~Každé těleso K je oborem integrity, t.j.~~ axiom oboru integrity I je důsledkem axiomů $R_0 \div R_3$, $A_0 \div A_5$, $M_0 \div M_5$, D.

Důkaz $a \neq 0 \in K$.

podle ax. M_5 je $\bar{a}$ $a\bar{a} = j$

zvolme $b \in K$ tak, aby $ab = 0$.

podle M_3. $0 = ab = ba$.

$0 = 0\bar{a} = ba\bar{a} = b(a\bar{a}) = bj = b$.

$\underline{b = 0}$

Věta 2.2 Budiž K těleso, pak ke každému $0 \neq a \in K$ existuje právě jeden převrácený prvek $\bar{a} = \frac{1}{a} = a^{-1}$

Věta 2.3 Budiž $a, b, c \in K$ a nechť $c \neq 0$. Pak ~~a~~ $ac = bc \Rightarrow a = b$.

(1.16)

Věta 2.4 Budiž $a\, b \in K$. $a \neq 0$. Pak existuje právě jeden prvek $q \in K$ tak, že $a\,q = b$ je $q = b\bar{a} = b\frac{1}{a} = (\frac{b}{a})$

Věta 2.5 Nechť pro jediný nenulový prvek $a \in K$ platí $am = a$. Pak $m = j = 1$.

Věta 2.6 Budiž $0 \neq a \in K$ Prvek převrácený ~~...~~ a k $\frac{1}{a}$ je a

$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

Věta 2.7 Budiž n je přirozené číslo a $a_1 \dots a_n$ n nenulových prvků K. Pak

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}$$

JCK Adeppa.

J $\check{Z}$ mn. dvojic (uspořádaných) (a_1, a_2). $a_1, a_2 \in J$

$a_2 \neq 0$.

? Každá dvojice se nazývá zlomek oboru integrity J

$$(a_1, a_2) = \frac{a_1}{a_2}$$

Def. 2.2 Budiž J eden obor integrity, $\bar{Z}$ mn. zlomků J. Řekněme, že dva zlomky $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ jsou ekvivalentní ($\frac{a_1}{a_2} \sim \frac{b_1}{b_2}$) právě když

Ekvivalence zlomků $\quad a_1 b_2 = a_2 b_1$ v J.

Musíme dokázat, že takto definovaná rovnost v J platí pro $R_0 \div R_3$.

$$\begin{cases} R_0. & a \sim b,\ a \nsim b. \\ R_1 & a \sim a \\ R_2 & a \sim b \Rightarrow b \sim a \\ R_3 & a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c. \end{cases}$$

Důkaz. R_0. $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2}$ Pak buď $a_1 b_2 = a_2 b_1$, nebo $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, třetí možnost neexistuje.

R_1 $\frac{a_1}{a_2} \sim \frac{a_1}{a_2}$ Podle M_3 $a_1 a_2 = a_2 a_1$

R_2 $\frac{a_1}{a_2} \sim \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \sim \frac{a_1}{a_2}$.

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \xrightarrow{M_1 M_3} b_1 a_2 = b_2 a_1$$

R_3 $\frac{a_1}{a_2} \sim \frac{b_1}{b_2}$ $\frac{b_1}{b_2} \sim \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \sim \frac{c_1}{c_2}$

$$a_1 b_2 = a_2 b_1,\quad b_1 c_2 = b_2 c_1$$

$$c_2 a_1 b_2 = c_2 a_2 b_1,\quad a_2 b_1 c_2 = a_2 b_2 c_1$$

Podle R_3 v J $\quad c_2 a_1 b_2 = a_2 c_1 b_2$

$b_2 \neq 0$, $\quad c_2 a_1 = a_2 c_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \sim \frac{c_1}{c_2}$.

$\frac{a_1}{a_2} \in S(\frac{a_1}{a_2})$ (třída)

$\frac{b_1}{b_2} \in S(\frac{b_1}{b_2})$

R mn. všech tříd $S(\frac{a_1}{a_2})$ — je mn. tříd ekvivalentních zlomků J

8

Def. 2.3 Budiž J obor integrity. Z mn. tříd ekvivalentních zlomků, sčítání tříd v Z. def vzorcem
$$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)=S\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_2b_2}\right).$$
Násobení tříd v Z. def. vzorcem
$$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)=S\left(\frac{a_1b_1}{a_2b_2}\right).$$

Věta 2.8 Budiž J obor integrity Z mn. tříd ekvival. zlomků. Definujeme-li rovnost tříd jako rovnost množin, součet a součin tříd podle def. 2.3 je mn. Z tělesem. Při tom:

a/. nulovým prvkem je třída $S\left(\frac{0}{a_2}\right)$ $a_2 \neq 0$.

b/. Jednotkovým prvkem je třída $S\left(\frac{a}{a}\right)$ $a \neq 0$, $a \in J$

c/. Opačným prvkem k třídě $S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$ je třída $S\left(\frac{-a_1}{a_2}\right)$

d/. ~~Přip~~ Převráceným prvkem k třídě $S\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \neq S\left(\frac{0}{a_2}\right)$ je třída $S\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$.

Důkaz

A0. $S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)=S\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_2b_2}\right)$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{c_1}{c_2}\in S\left(\frac{a_1}{a_2}\right) &\Rightarrow S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\\ \frac{d_1}{d_2}\in S\left(\frac{b_1}{b_2}\right) &\Rightarrow S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)=S\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)+S\left(\frac{d_1}{d_2}\right)=S\left(\frac{c_1d_2+c_2d_1}{d_2c_2}\right).$$

Máme dokázat dva součty jsou identické.

$(a_1b_2+a_2b_1)d_2c_2 = a_2b_2(c_1d_2+d_1c_2)$.

$\left.\begin{aligned}c_1a_2&=c_2a_1\\ b_1d_2&=b_2d_1\end{aligned}\right\}$ pomocí těch rovností

$$\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_2b_2}\sim\frac{c_1d_2+c_2d_1}{c_2d_2}$$

M_0. $S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)=S\left(\frac{a_1b_1}{a_2b_2}\right)$

$\frac{c_1}{c_2}\in S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$ $\frac{d_1}{d_2}\in S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$ itendicke

$S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)S\left(\frac{d_1}{d_2}\right)=S\left(\frac{c_1d_1}{c_2d_2}\right)$

$c_1a_2=c_2a_1$ $d_1b_2=d_2b_1$

$(a_1b_1)(c_2d_2)=(a_1c_2)(b_1d_2)=(c_1a_2)(d_1b_2)=(c_1d_1)(a_2b_2)$

$(a_1b_1)(c_2d_2)=(c_1d_1)(a_2b_2)$

$\frac{a_1b_1}{a_2b_2}\sim\frac{c_1d_1}{c_2d_2}$.

A_1 $a=b\Rightarrow b+c\Rightarrow a+c$.

$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\Longleftrightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\Longleftrightarrow a_1b_2=b_1a_2$.

$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)=S\left(\frac{a_1c_2+a_2c_1}{c_2a_2}\right)$

$S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)+S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)=S\left(\frac{b_1c_2+b_2c_1}{b_2c_2}\right)$ itendické.

$(a_1c_2+a_2c_1)b_2c_2=a_2c_2(c_2b_1+c_1b_2)$

M_1 $a=b\Rightarrow ac=bc$.

$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$.

$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)=S\left(\frac{a_1c_1}{a_2c_2}\right)$ itendicke

$S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)=S\left(\frac{b_1c_1}{b_2c_2}\right)$

$a_1c_1b_2c_2=a_2b_1c_1c_2$

A_2. $\left[S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\right]+S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)=S\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_2b_2}\right)+S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$

$=S\left(\frac{a_1b_2c_2+a_2b_1c_2+c_1a_2b_2}{a_2b_2c_2}\right)$

$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\left[S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)+S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\right]=S\left(\frac{a_1b_2c_2+a_2b_1c_2+c_1a_2b_2}{a_2b_2c_2}\right)$

9

M_2. $(ab)c = a(bc)$

$$\left[S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\right]S\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = S\left(\frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2}\right)$$

$$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\left[S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\right] = S\left(\frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2}\right)$$

> identisch.

A_3 $a+b = b+a$

$$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + S\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = S\left(\frac{a_1b_2+b_1a_2}{a_2b_2}\right)$$

$$S\left(\frac{b_1}{b_2}\right) + S\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = S\left(\frac{b_1a_2+a_1b_2}{b_2a_2}\right)$$

M_3

A_4 $$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + S\left(\frac{0}{b_2}\right) = S\left(\frac{a_1b_2+a_2 0}{a_2b_2}\right) = S\left(\frac{a_1b_2}{a_1b_2}\right)$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1b_2}{a_2b_2} \iff a_1a_2b_2 = a_1a_2b_2.$$

M_4 $aj = a$

$$S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)S\left(\frac{d}{d}\right) = S\left(\frac{a_1d}{a_2d}\right) = S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)!$$

$$\frac{a_1d}{a_2d} = \frac{a_1}{a_2} \qquad a_1a_2d = a_1a_2d$$

$$\frac{l_1}{l_2} \in S\left(\frac{0}{a_2}\right) \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{0}{a_2} \Rightarrow l_1a_2 = 0l_2 \Rightarrow l_1a_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{l_1=0}}$$

$$\frac{f_1}{f_2} \in S\left(\frac{d}{d}\right) \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{d}{d} \Rightarrow f_1d = f_2d \quad d\neq 0 \Rightarrow f_1 = f_2$$

A_5

M_5

D $(a+b)c = ac+bc$.

$$\left[S\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+S\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\right]S\left(\frac{c_1}{c_2}\right)=S\left(\frac{a_1b_2c_1+b_1a_2c_1}{a_2b_2c_2}\right)$$

Věta 2,9 Obsahuje-li třída $S(\frac{a_1}{a_2}) \in \mathcal{J}$ zlomek tvaru $\frac{a}{1}$, obsahuje takový zlomek právě jeden.

Důkaz

$$\frac{a}{1} \in S\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = S\left(\frac{a}{1}\right)$$

$$\frac{b}{1} \in S\left(\frac{a}{1}\right) \Rightarrow \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow a = b.$$

$$\begin{matrix} a \leftrightarrow S(\frac{a}{1}) \\ b \leftrightarrow S(\frac{b}{1}) \end{matrix} \Leftrightarrow a+b \leftrightarrow S\left(\frac{a+b}{1}\right)$$

$$a\cdot b \leftrightarrow S\left(\frac{a\cdot b}{1}\right).$$

Z toho plyne, že $J \subset \mathcal{J}$.

~~$\mathcal{J}$ (podílový obor integrity)~~

$\mathcal{J}$ je podílové těleso oboru integrity

Def 2.4 Budiž J obor integrity (těleso) a J' nějaká jeho podmnožina. Je-li při zachování rovnosti, sčítání a násobení J' opět oborem int. (tělesem) ~~nazýváme~~ nazvene na J' podobor int. (podtěleso) oboru int. (tělesa) J

J se nazývá nadobor int. (nad těleso) oboru int. (tělesa) J'

Věta 2.10 A. Budiž J obor integrity (těleso) a $J' \subset J$.
J' je obor. integrity, právě když
1/ J' obsahuje aspoň dva různé prvky
2/ je-li $a, b \in J'$, pak $a+b \in J'$, $ab \in J'$
3/ je-li $a \in J' \Rightarrow (-a) \in J'$.
4/ $1 \in J'$

Věta 2.10 B Budiž J obor int. (těleso) a $K \subset J$
K je tělesem, právě když.
1/ je-li $a, b \in K$ pak $a+b \in K$, $ab \in K$
2/ je-li $a \in K \Rightarrow (-a) \in K$
3/ $1 \in K$

4/. je-li $a \in K$, $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in K$.

Důkaz $R_0 - R_3$. $A_0 - A_3$. $M_0 - M_3$. D. I

Dokážeme zbývající axiomy $M_4 - M_5$ $A_4 - A_5$

A_4 $a \in J'$ podle 3/ $(-a) \in J'$
podle 2. $a + (-a) = 0 \in J'$

A_5 je ekvivalentní s 3.

M_4 $a \in K$ $a^{-1} \in K$
podle 2 $aa^{-1} = 1 \in K$.

M_5 je ekvivalentní s 4'.

Def 2.5 Mějme dva obor. int. J a J'. Existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení prvků $a \in J$ na prvky $a' \in J'$, při kterém

1) $a + b \Longleftrightarrow a' + b'$

2) $ab \longleftrightarrow a'b'$

Říkáme, že obor. int. J a J' jsou isomorfní.
Samo zobrazení je isomorfismus.

15. 10. 56

P reálná čísla $\quad S\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in P, \ \alpha_2 \neq 0$

Věta 3.1 — mn. K všech uspořádaných dvojic ~~čt~~ reálných čísel (a_1, a_2) je tělesem.
Definujeme-li:

1) rovnost vztahem $(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Longleftrightarrow a_1 = b_1, \ a_2 = b_2$.

2/ Sčítání vztahem
$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

3/ Násobení
$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

V tělese K je
a/ Nulovým prvkem dvojice $(0, 0)$

b/ Jednotkem dvojice $(1, 0)$

c/ Opačným prvkem k (a_1, a_2) dvojice $(-a_1, -a_2)$

d/ Převráceným prvkem k $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$
dvojice $\left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right)$

Důkaz

① $R_0 \div R_3$ jsou zřejmé

② $A_0 \div A_3$ jsou zřejmé.

③ A_4: $\underline{\lvert a/ \rvert}$ $(a_1, a_2) + (0,0) = (a_1+0,\ a_2+0) = (a_1, a_2)$.

A_5: $\underline{\lvert e/ \rvert}$. $(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (0,0)$.

④. $M_0 \div M_4 \cdots$ jsou zřejmé

M_2. $(a_1 a_2)[(b_1 b_2)\cdot(c_1 c_2)] = (a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2 c_2 -$
$- a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1,\ a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)$

$= (a_1[a_1 b_1 - a_2 b_2] - c_2[a_1 b_2 + a_2 b_1],\ c_1[a_1 b_2 + a_2 b_1] + c_2[\ \ ])$

$= [(a_1, a_2)(b_1, b_2)](c_1, c_2)$.

M_4. $(a_1, a_2)(1.0) = (a_1 1 - a_2 0,\ a_1 0 + a_2 1) = (a_1, a_2)$.

⑤ M_5 $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ $a_1^2 + a_2^2 > 0$.

$(a_1, a_2)\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, \frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}\right) = (1.0)$.

⑥ D. $(a_1, a_2)\{(b_1, b_2) + (c_1, c_2)\} = (a_1, a_2)(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$

$= a_1(b_1+c_1) - a_2(b_2+c_2),\ a_1(b_2+c_2) + a_2(b_1+c_1)$

$= [(a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 - e_2 c_2),\ \dots\ ]$

$= [(a_1, a_2)(b_1, b_2),\ (a_1, a_2)(c_1, c_2)]$

8/4

Věta 3.2. a, Těleso K obsahuje prvek (0.1)

pro tento prvek platí
$$(0.1)^2 = (-1.0)$$

b, Těleso K obsahuje podtěleso P' isomorfní s tělesem P

Důkaz a, $(0.1)^2 = (0.1)(0.1) = (00.-1.1, 0.1+1.0) = (-10)$

b, $(a\,0)\ a \in P$.
1) $(a\,0) + (b\,0) = (a+b, 0) \in P'$.

2) $(a\,0)(b\,0) = (ab, 0) \in P'$.

3) $(a\,0) \to (-a\,0) \in P$.

4). $(a\,0) \neq (0,0)$. $\Rightarrow a \neq 0$.
$$(a\,0)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+0^2}\ \frac{-0^2}{a^2+0^2}\right) = \left(\frac{1}{a}\ 0\right)$$

$P' \leftrightarrow P$ $P' \ni (a\,0) \leftrightarrow a \in P$

Za důsledek je, že K obsahuje podtěleso P reálných čísel.

$(a\,0) = a$. $i = (0\,1)$

$(a_1\,a_2) = (a_1+0, 0+a_2) = (a_1\,0) + (0\,a_2)$

$(a_2\,0)(0.1) = (0\,a_2)$

$(a_1\,a_2) = (a_1\,0) + (0\,a_2) = (a_1\,0) + (a_2\,0)(0.1)$
$= a_1 + a_2 i$

12

Def 3.1. Těleso K zavedené v větě 3.1, nazýváme těleso komplexních čísel. Jeho prvky a_1+a_2i jsou kompl. čísla. K.č. pro které $a_2=0$ se nazýváme ~~reálná čísla~~. K.č. pro které $a \neq 0$ se nazýváme imaginární..

k.č pro které $a_1=0$ se nazy. ryze imagin.

K.č. i je imaginální jednotka, a_1 je reálná, a_2 imaginální část k.č. a_1+a_2i

$0=(0,0)=0+0i$ ryze imaginální a současně reálná.

Def. 3.2 —. Každý prvek těl. K. nazýváme číslo a každé podtěleso K nazýváme číselné těleso.

Def. 3.3 - Číslo $\overline{\alpha}=a_1-a_2i$ se nazýváme číslo kompl. sdružené s číslem (共轭复数)

$\alpha=a_1+a_2i$

$\overline{\alpha}=\alpha$. $-0=0$. $-a_2\neq a_2$.

$\overline{\alpha}=-\alpha$ $-a_1=a_1 \Rightarrow a_1=0$.

Věta 3.3 Jsou-li $\alpha, \beta \in K$. dvě čísla platí

1 $\overline{(\alpha+\beta)}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$.

2 $\overline{(\alpha\beta)}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

3 $\overline{(-\alpha)}=-\overline{\alpha}$

4 $\beta\neq 0$ $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$.

5 $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$

Věta 3.4 — Buďiž $\alpha = a_1 + a_2 i$

Pak ① $\underline{\alpha + \bar{\alpha}} = 2a_1$ je reálné

② $\underline{\alpha\bar{\alpha}} = a_1^2 + a_2^2$ je reálne nezáporné číslo. Při tom $\alpha\bar{\alpha} = 0$ právě když $\alpha = 0$.

$$\alpha\bar{\alpha} = (a_1, a_2)(a_1, -a_2) = (a_1^2 + a_2^2, 0)$$

$$a_1^2 + a_2^2 = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

~~Věta~~ Def 3.4 — Reálne nezáporné číslo
$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$
se nazývání absolutní hodnotu čísla α

Věta 3.5. Absolutní hodnota má vlastnosti

trojúhelníková nerovnost

H1. $|\alpha| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0.$

H2 $|\alpha| > 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq 0.$

H3 $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

H4 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ trojúhelníková nerovnost

$$|\alpha\beta| = \sqrt{(\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta})} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}\,\beta\bar{\beta}} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}\sqrt{\beta\bar{\beta}} = |\alpha||\beta|.$$

Důkaz H4. $\quad A > 0 \quad X \geq 0$

$$AX^2 + 2BX + C \geq 0$$

$$D = B^2 - AC \leq 0$$