中国科学院科学基金资助的课题

SUIJIGUOCHENGGAILUN

随机过程概论

胡迪鹤 著

武汉大学出版社

[illegible]

SUIJI GUOCHENG GAILUN

随机过程概论

[illegible] 著

[illegible]

随机过程概论

（中国科学院科学基金资助的 题）

武汉大学出版社

一九八六年六月·武汉

随机过程概论

胡迪鹤 著

*

武汉大学出版社出版

（湖北武昌）

新华书店湖北发行所发行　　武汉大学印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32　17.75印张　439千字

1986年6月第一版　1986年6月第一次印刷

印数1—2,000

统一书：13279·26　定价：平 4.80元
精 5.80元

序 言

自本世纪初，“Марков 性”的概念形成以后，概率论的研究对象，从一族相互独立的随机变量，开始拓广到具有某种相依性的随机变量族，从而在概率论中逐渐形成了一个崭新的研究领域——随机过程论，时至今日，它在理论上已建立起一个庞大的体系，在应用上已渗透到核子物理、无线电工程技术、工程控制论、各种预报方法、公用事业中的数学方法等科学技术和国民经济的许多领域。引起许多数学理论工作者和实际工作者的广泛兴趣。

随机过程论的专著，国内外已有不少，且各有特色。作者力图从我国的实际水平出发，为读者，特别是自学者着想，写一本既扼要地介绍近代随机过程各分支的主要内容，又论证得严谨详细，便于自学的“随机过程概论”，本书就是在这样的动机下写成的。

全书共分九章24节，包含六部份。第一部份是预备知识，重点介绍单调系定理、条件期望和乘积空间上测度的产生。而条件期望则从实值随机变量关于 σ 代数的条件期望讲到取值于 Banach 空间的随机变量关于 σ 代数的条件期望，这为研究取值于 Banach 空间的鞅等专题作了准备。至于乘积空间上的测度的产生，为了适应对取值于某种拓扑空间的随机过程的研究，乘积空间的因子空间是所谓的 L C. C. B. T_2 空间 第二部份是独立增强过程，主要介绍 Poisson 过程和 Brown 运动，其目的是通过这两类过程，引起读者对随机过程的兴趣，并对随机过程有两个具体

的模型作背景。第三部份是马尔可夫过程，重点讨论马尔可夫性、强马尔可夫性和转移函数的分析理论。第四部份是鞅论，主要介绍古典鞅论，并适度地对近代鞅论的某些研究专题作一点粗略的介绍。第五部份是平稳过程和遍历性理论，介绍严平稳过程的遍历性理论及宽平稳过程的谱理论，并由此出发，进一步研究了线性算子的遍历性理论。第六部份简单地介绍了随机微分方程式理论，包括 $IT\hat{O}$ 积分、随机微分方程式的解的存在性、唯一性及复合函数的微分公式。

本书主要内容曾给武汉大学数学系81级和82级研究生讲授过，他们提出过一些宝贵意见，特此致谢。

由于作者水平有限，缺点错误在所难免，敬请不吝指教，以期改进。

胡迪鹤

1985年于武汉大学

目　录

第一章 预备知识

本书采用近代随机过程论中所通用的符号及术语。

例如，若Ω为任一集合，$\omega\in\Omega$表示ω属于Ω，或ω是Ω中的元素，$A\subset\Omega$表示A含于Ω，或A是Ω的子集。对于集合运算，$\cup$表示求并，$\cap$表示求交，而$A-B$、$A\triangle B$分别表示A和B的差以及A和B的对称差，$\varnothing$表示空集，$\bar{A}=\Omega-A$表A的补集，$\{\omega\}$表含ω的单点集。

R^n恒表n维欧氏空间，特别地$R=R^1$. $\bar{R}=\bar{R}^1=[-\infty,\infty]$表广义实数空间，对任何$a,b\in\bar{R}$，$a\vee b=\max\{a,b\}$，$a\wedge b=\min\{a,b\}$. 若$\tau_n\in\bar{R}$，$\tau_n\leqslant\tau_{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=\tau$，则记$\tau_n\uparrow\tau$，仿之可定义$\tau_n\downarrow\tau$。

若E_1，E_2是两个集合，由E_1到E_2的变换f记作f: $E_1\longmapsto E_2$。有时，为了突出自变量及对应关系，也记作$x\longmapsto f(x)$。对任何$A\subset E_2$，$B\subset E_1$，记$f^{-1}(A)=\{x: x\in E_1, f(x)\in A\}$，$f(B)=\{y: y=f(x), x\in B\}$。若$E_3$为另一集合，$g: E_2\longmapsto E_3$，则由$E_1$到$E_3$的复合变换$g(f)$有时记作$g\circ f$. 若$E_2=\bar{R}$，再记$f^+=f\vee 0$, $f^-=(-f)\vee 0$, $\boxed{|f|=f^++f^-.}$

$\boxed{f=f^+-f^-}$

§1 集合系及单调系定理

定理1.1 设Ω为任一集合，以Ω的某些子集为元素的集合$\mathfrak{M}$皆称为Ω上的一个集合系，在无混淆的情况下，简称$\mathfrak{M}$为集合系。

例如 $\Omega = R^1$，R^1 中一切半开闭区间 $[a, b)$ 成一集合系 $\mathfrak{M}_1$；R^1 中一切开集 G 成另一集合系 $\mathfrak{M}_2$。

本书中所涉及的集合系，主要有半环、环、代数、σ 代数、Π 系和 d 系。关于半环、环、代数和 σ 代数，[1]中有详细的讨论，关于 Π 系和 d 系，[2]和[3]中亦有讨论。

定理1.2 设 Ω 为任一集合，$\mathfrak{M}$ 是 Ω 上的一个非空集合系。

（1） 称 $\mathfrak{M}$ 是半环，如果

（i） $\varnothing \in \mathfrak{M}$；

（ii） $A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}$；

（iii） $A, B \in \mathfrak{M}, A \supset B \Longrightarrow A - B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i, C_i \in \mathfrak{M}, C_i \cap C_j = \varnothing (i \neq j)$。

（2） 称 $\mathfrak{M}$ 是环，如果

$A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}, A - B \in \mathfrak{M}$。

（3） 称 $\mathfrak{M}$ 是代数，如果 $\mathfrak{M}$ 是环，且 $\Omega \in \mathfrak{M}$。

（4） 称 $\mathfrak{M}$ 是 σ 代数，如果 $\mathfrak{M}$ 是代数，且

可列并的闭合

$$“A_n \in \mathfrak{M} \ (n \geqslant 1) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}”.$$

若 $\mathfrak{M}$ 是 Ω 上一个半环，μ：$\mathfrak{M} \longmapsto \bar{R}$，且 μ 满足：

（i） $\mu(\varnothing) = 0$；

（ii） 对任何 $A \in \mathfrak{M}$，有 $0 \leqslant \mu(A) \leqslant \infty$；

（iii） 对任何 $A_n \in \mathfrak{M} \ (n \geqslant 1)$，$A_n \cap A_m = \varnothing \ (n \neq m)$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$，有 $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$，则称 μ 为 $\mathfrak{M}$ 上的一个（正）测度。

σ可加性

若 Ω 为任一集合，$\mathscr{F}$ 为 Ω 上一个 σ 代数，称二元体 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间。若在 $\mathscr{F}$ 上还定义了一个测度 μ，则三元体 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为测度空间。

设$(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$、$(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$为两个可测空间，$f$：$\Omega_1 \longmapsto \Omega_2$，称$f$关于$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$是可测的，如果对任何$A \in \mathscr{F}_2$，有$f^{-1}(A) \in \mathscr{F}_1$，记作$f \in \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$。特别地，若$\Omega_2 = R$，$\mathscr{F}_2 = \mathscr{B}$，$\mathscr{B}$是包含一切闭区间$[a, b]$的最小$\sigma$代数，$a$为实数或$-\infty$，$b$为实数或$+\infty$，则简记$f \in \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$为$f \in \mathscr{F}_1$。若$f \in \mathscr{F}_1$，$f \geqslant 0$，则记$f \in \mathscr{F}_1^+$。$f \in r\mathscr{F}_1$意味着$f \in \mathscr{F}_1$且$f$为实值，$f \in b\mathscr{F}_1$意味着$f \in \mathscr{F}_1$且$f$有界。

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为任一测度空间，$f$：$\Omega \longmapsto R$，$f \in \mathscr{F}$，$f$在$\Omega$上的积分记作$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$，或$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)$，或$\int_\Omega f d\mu$，或$\int f d\mu$。对任何$A \in \mathscr{F}$，$f$在$A$上的积分定义为$\int_\Omega I_A f d\mu$，其中

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & 若\ \omega \in A; \\ 0, & 若\ \omega \bar{\in} A, \end{cases}$$

$= \int_A f d\mu$

称为A上的示性函数。本书恒用I_A表A上的示性函数。

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为任一测度空间，$f \in \mathscr{F}$，$f_n \in \mathscr{F}$　$(n \geqslant 1)$。

（1）　若对任何$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} \mu(|f - f_n| > \varepsilon) = 0,$$

或 $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| \le \varepsilon) = 1$

则称$\{f_n\}$依测度μ收敛于f，记作

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f, [\mu].$$

$f_n \xrightarrow{\mu} f$

特别地，若$\mu(\Omega) = 1$，则称μ是概率测度，$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为概率空间（概率测度常用$P$表示），依概率测度收敛简称为概率收敛。

（2）　若存在$A \in \mathscr{F}$，$\mu(A) = 0$，使

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)，当\ \omega \bar{\in} A，$$

则称$\{f_n\}$关于测度μ，[a, e]收敛于f，简称$\{f_n\}$ [a. e.] 收敛于f，记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \ [a.\ e.] \quad (\mu),$$

或

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \ [a.\ e.].$$

（3） 若$\int_\Omega |f_n|^p d\mu < \infty$，$\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$，$(1 \leqslant p < \infty)$，且

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p d\mu = 0,$$

则称$\{f_n\}$ [L^p]收敛于f，记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad [L^p].$$

定理1.3 设 $\mathfrak{M}$ 是Ω上一个集合系。

（1） 称 $\mathfrak{M}$ 是Π系，如果

对小交封闭

$$A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A \in \mathfrak{M}.$$

（2） 称$\mathfrak{M}$是 d 系，如果

（i） $\Omega \in \mathfrak{M}$；

（ii） $A, B \in \mathfrak{M}, A \subset B \Longrightarrow B - A \in \mathfrak{M}$；

（iii） $A_n \in \mathfrak{M}, A_n \subset A_{n+1}\ (n \geqslant 1) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

定义1.4 设 $\mathfrak{M}$ 是 Ω 上的一个集合系。含 $\mathfrak{M}$ 的最小 d 系（σ 代数），记作 $d(\mathfrak{M})$（$\sigma(\mathfrak{M})$）。

因为任意个 d 系（σ代数）的交仍为 d 系（σ 代数），故$d(\mathfrak{M})$（$\sigma(\mathfrak{M})$）的存在 性是无疑的。当然，$d(\mathfrak{M})$、$\sigma(\mathfrak{M})$是唯一确定的。

若 $\mathfrak{M}^n=\{$一切$[a, b)=[a_1, b_1; \cdots; a_n, b_n), a_i, b_i\in R^1\}$是 R^n 中的一切左闭右开区间，即

$$[a_1, b_1; \cdots; a_n, b_n)$$
$$=\{x: x=(x_1, \cdots, x_n), a_i\leqslant x_i<b_i, 1\leqslant i\leqslant n\},$$

则显然 $\mathfrak{M}^n$ 是 R^n 上的半环，由 $\mathfrak{M}^n$ 所产生的 σ 代数 $\sigma(\mathfrak{M}^n)$ 称为 R^n 上的 Borel σ 代数，其中每一集皆称为 n 维 Borel 集，用 $\mathscr{B}^n$ 表 $\sigma(\mathfrak{M}^n)$。特别地记 $\mathscr{B}=\mathscr{B}^1$，一维 Borel 集简称为 Borel 集。对任何 $A\subset R^n$，记 $A\cap\mathscr{B}^n=\{A: A=A\cap B, B\in\mathscr{B}^n\}$。特别地 $[a, b]\cap\mathscr{B}$ 简记为 $\mathscr{B}[a, b]$，

如前所述，$\overline{\mathscr{B}}=\sigma$(一切$[a, b]$, a 为实数或 $-\infty$, b 为实数或 $+\infty$)称为 $\bar{R}$ 上的 Borel σ 代数。

定义1.1 集合系 $\mathfrak{M}$ 是 σ 代数的充要条件是：$\mathfrak{M}$ 既是 d 系又是 Π 系。

证 必要性是显然的。$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$ 充分性。显然，由 $\mathfrak{M}$ 是 d 系和 Π 系推知 $\mathfrak{M}$ 是代数。下面证明 $\mathfrak{M}$ 对可数并运算封闭。事实上，由 $\mathfrak{M}$ 既是 d 系又是 Π 系推知

$$A\in\mathfrak{M}\Longrightarrow\bar{A}=\Omega-A\in\mathfrak{M}. \tag{1.1}$$

由(1.1)式及 $\mathfrak{M}$ 是 Π 系推出

$$A_i\in\mathfrak{M}\quad(i=1, \cdots, n)\Longrightarrow\bigcup_{i=1}^n A_i=\overline{\left(\bigcup_{i=1}^n\bar{A}_i\right)}\in\mathfrak{M}. \tag{1.2}$$

由(1.2)式及 d 系的第(iii)条性质得

$$A_n\in\mathfrak{M}\quad(n\geqslant1)\Longrightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\in\mathfrak{M}.$$

定理证毕。

定义1.2 设 $\mathfrak{M}$ 是 Ω 上的 Π 系，则 $d(\mathfrak{M})=\sigma(\mathfrak{M})$.

证 由于$\sigma(\mathfrak{M})$是包含$\mathfrak{M}$的一个 d 系，所以$\sigma(\mathfrak{M})\supset d(\mathfrak{M})$. 因此，只须证明 $d(\mathfrak{M})$是σ代数. 用定理1.1，又只须证明$d(\mathfrak{M})$是一个 Π 系即可。事实上，令

$\mathscr{D}_1=\{B: B\in d(\mathfrak{M}),\ B\cap A\in d(\mathfrak{M})$对一切$A\in\mathfrak{M}$成立$\}$,

往证 $\mathscr{D}_1=d(\mathfrak{M})$（此即 $d(\mathfrak{M})$ 中之集与 $\mathfrak{M}$ 中之集之交仍属于 $d(\mathfrak{M})$）. 由于 $\mathfrak{M}$ 是 Π 系，所以 $\mathscr{D}_1\supset\mathfrak{M}$. 若能证 $\mathscr{D}_1$ 是 d 系，则 $\mathscr{D}_1\supset d(\mathfrak{M})$，从而 $\mathscr{D}_1=d(\mathfrak{M})$.

（i） 显然 $\Omega\in\mathscr{D}_1$

（ii） 设 $B_1, B_2\in\mathscr{D}_1$, $B_1\subset B_2$，则对任何 $A\in\mathfrak{M}$，由 $\mathscr{D}_1$ 的定义有 $B_1\cap A$, $B_2\cap A\in d(\mathfrak{M})$，显然 $B_1\cap A\subset B_2\cap A$. 所以，由 d系的性质(ii)有$(B_2-B_1)\cap A=((B_2\cap A)-(B_1\cap A))\in d(\mathfrak{M})$，此即$(B-B_1)\in\mathscr{D}_1$.

（iii） 设 $B_n\subset B_{n+1}$, $B_n\in\mathscr{D}_1$ $(n\geqslant 1)$，则对任何 $A\in\mathfrak{M}$，有 $B_n\cap A\in d(\mathfrak{M})$, $(B_n\cap A)\subset(B_{n+1}\cap A)$，所以由$d$ 系的性质(iii)有

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\cap A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A)\in d(\mathfrak{M}),$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{D}_1$.

这就证明了$\mathscr{D}_1$是 d 系. 所以 $\mathscr{D}_1=d(\mathfrak{M})$.

其次，再令

$\mathscr{D}_2=\{B: B\in d(\mathfrak{M}),\ B\cap A\in d(\mathfrak{M})$ 对一切 $A\in d(\mathfrak{M})$成立$\}$，往证 $\mathscr{D}_2=d(\mathfrak{M})$（$d(\mathfrak{M})$是$\Pi$ 系）. 由 $\mathscr{D}_1=d(\mathfrak{M})$知 $\mathscr{D}_2\supset\mathfrak{M}$. 仿 $\mathscr{D}_1$ 可证$\mathscr{D}_2$也是 d 系，所以 $\mathscr{D}_2=d(\mathfrak{M})$. 定理证毕。

下面我们研究类似定理1.2 的函数形式的定理。

定理1.3 设 Ω 为任一集合，$\mathfrak{M}$是Ω上一个 Π 系，$\mathscr{H}$ 是满足下列条件的定义在Ω上的一些实值函数所构成的向量空间：

（1） $1\in\mathscr{H}$, $I_A\in\mathscr{H}$（对一切 $A\in\mathfrak{M}$）；

（2） “$f_n \in \mathscr{H}$，$0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$，

$f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 是实值函数（有界函数）$\Longrightarrow f \in \mathscr{H}$”，

则 $\mathscr{H}$ 包含了 Ω 上的所有的实值（有界）$\sigma(\mathfrak{M})$可测函数。

证 令 $\mathscr{D} = \{A : I_A \in \mathscr{H}, A \subset \Omega\}$，由假设（1）得知 $\Omega \in \mathscr{D}$，$\mathfrak{M} \subset \mathscr{D}$. 由于 $\mathscr{H}$ 是向量空间，故由 $A_1, A_2 \in \mathscr{D}$，$A_1 \subset A_2$ 可推出 $I_{A_2 - A_1} = (I_{A_2} - I_{A_1}) \in \mathscr{H}$，即是 $A_2 - A_1 \in \mathscr{D}$. 又由（2）可知：

$$“A_n \in \mathscr{D},\ A_n \subset A_{n+1}\quad (n \geqslant 1)$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \sup_{n \geqslant 1} I_{A_n}} \in \mathscr{H}$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}”$$

总之，$\mathscr{D}$ 是 Ω 上的包含 $\mathfrak{M}$ 的 d 系。因此，由定理 1.2 得知 $\mathscr{D} \supset d(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M})$.

任取$f \in r\sigma(\mathfrak{M})$，则$f = f^+ - f^-$，$f^+, f^- \in r\sigma(\mathfrak{M})$，$f^+ \geqslant 0$，$f^- \geqslant 0$。

f^+ 可表为非负单调上升的简单函数列$\{f_n^+ = \sum\limits_{i=1}^{K_n} a_i^{(n)} I_{A_i^{(n)}}\}$的极限，$a_i^{(n)} \in R^+$，$A_i^{(n)} \in \sigma(\mathfrak{M})$，$A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} = \varnothing$ $(i \neq j,\ i, j = 1, \cdots, K_n)$。由 $f_n^+ \in \mathscr{H}$ 及假设（2）可知 $f^+ \in \mathscr{H}$. 仿之可证 $f^- \in \mathscr{H}$。再用 $\mathscr{H}$ 是向量空间知 $f \in \mathscr{H}$。定理证毕。

设 Ω_1, Ω_2 为任意两个集合，$\mathfrak{M}$是 Ω_2 上的一个集合系，$f: \Omega_1 \longmapsto \Omega_2$，本书中恒记 $f^{-1}(\mathfrak{M}) = \{B : B = f^{-1}(A), A \in \mathfrak{M}\}$。

命题1.1 设 Ω_1、Ω_2、$\mathfrak{M}$、f 如上，则

$$\sigma(f^{-1}(\mathfrak{M})) = f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M})). \tag{1.3}$$

证 显然 $f^{-1}(\mathfrak{M}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M}))$. 若注意 $f^{-1}(\bigcup\limits_n A_n) = \bigcup\limits_n f^{-1}(A_n)$，$f^{-1}(A_1 - A_2) = f^{-1}(A_1) - f^{-1}(A_2)$，$f^{-1}(\bigcap\limits_n A_n)$

$=\bigcap_n f^{-1}(A_n)$，$f^{-1}(\Omega_2)=\Omega_1$，则可知对 Ω_2 上任一 σ 代数 $\mathscr{E}$，$f^{-1}(\mathscr{E})$亦为代数，从而 $f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M}))$是$\Omega_1$上的 σ 代数。所以

$$\sigma(f^{-1}(\mathfrak{M}))\subset f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M})). \tag{1.4}$$

再令

$\mathscr{G}=\{A: f^{-1}(A)\in\sigma(f^{-1}(\mathfrak{M})), A\in\sigma(\mathfrak{M})\}$，则 $\mathscr{G}\supset\mathfrak{M}$，且$\mathscr{G}$是 σ 代数，从而$\mathscr{G}\supset\sigma(\mathfrak{M})$，即

$$f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M}))\subset\sigma(f^{-1}(\mathfrak{M})). \tag{1.5}$$

由(1.4)、(1.5)式得(1.3)式。命题得证。

命题1.2 设 Ω 为任一集，I 为任一指标集，$(E_i, \mathscr{E}_i)$为可测空间，f_i 为由 Ω 到 E_i 的变换，$\mathscr{G}_i$ 是 E_i 上的集合系，$\sigma(\mathscr{G})=\mathscr{E}_i$ $(i\in I)$，令

$\mathscr{G}=\{B: B=\bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(A_i), A_i\in\mathscr{G}_i, J$ 为 I 中有限子集$\}$，

$$\sigma(f_i, i\in I)=\sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathscr{E})),$$

则

（1） $\mathscr{G}_i$ 是 Π 系 $(i\in I)\Longrightarrow\mathscr{G}$ 是 Π 系；

（2） $\sigma(\mathscr{G})=\sigma(f_i, i\in I)$.

证 （1） 由 Π 系的定义知(1)成立。

（2） 对每一个 $i\in I$，由命题1.1有

$$\sigma(\mathscr{G})\supset\sigma(f_i^{-1}(\mathscr{G}_i))=f_i^{-1}(\sigma(\mathscr{G}_i))=f_i^{-1}(\mathscr{E}_i),$$

从而

$$\sigma(\mathscr{G})\supset\sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathscr{E}_i))=\sigma(f_i, i\in I). \tag{1.6}$$

而$\sigma(f_i, i\in I)\supset\mathscr{G}$ 是显然的，所以

$$\sigma(I_i, i\in I)\supset\sigma(\mathscr{G}). \tag{1.7}$$

由(1.6)、(1.7)式知(2)成立。

定理1.4 设 Ω、I、J、$\mathscr{G}_i$、$\mathscr{G}$、f_i如命题 1.2 所定义，$\mathscr{G}_i$ 是 Π 系。若 $\mathscr{H}$ 是 Ω 上的一些实值函数所构成的向量空间，满足：

（i） $1\in\mathscr{H}$；

（ii） “$h_n\in\mathscr{H}$，$0\leqslant h_n\leqslant h_{n+1}$ $(n\geqslant 1)$，$h=\sup\limits_{n\geqslant 1} h_n$ 有限（有界）$\Longrightarrow h\in\mathscr{H}$”；

（iii） $\mathscr{F}\equiv\{f: f=\prod\limits_{i\in J}(I_{A_i}\circ f_i)$，$A_i\in\mathscr{G}_i$，$J$ 是 I 的有限子集$\}\subset\mathscr{H}$，

则 $\mathscr{H}$ 包含了所有 $\sigma(f_i, i\in I)$可测的实值（有界）函数。

证 注意：

$$\prod_{i\in J}(I_{A_i}\circ f_i)=\prod_{i\in J} I_{f_i^{-1}(A_i)}=I_{\bigcap\limits_{i\in J} f_i^{-1}(A_i)},\tag{1.8}$$

则可知

$$\mathscr{F}=\{I_A: A\in\mathscr{G}\}.$$

由(iii)得$\{I_A: A\in\mathscr{G}\}\subset\mathscr{H}$. 再注意$\mathscr{G}$是$\Pi$系，则由定理1.3即得定理1.4.

今后，我们称定理 1.2～1.4 皆为“单调系定理。定理1.2是集合形式的单调系定理，定理1.3、定理1.4是函数形式的单调系定理。

习　　题

1． 设

$\mathfrak{M}_1=\{$一切$[a, b)$; $a, b\in R^1\}$,

$\mathfrak{M}_2=\{$一切$[a, b]$; $a, b\in R^1\}$,

$\mathfrak{M}_3=\{$一切(a, b); $a, b\in R^1\}$,

$\mathfrak{M}_4=\{$一切$(a, b]$; $a, b\in R^1\}$,

$\mathfrak{M}_5=\{$一切$(-\infty, b)$; $b\in R^1\}$,