21世纪数学系列教材
微积分
（华中科技大学高等数学课题组编著
配套辅导书

微积分习题详解

赵益华 郑高峰 程婷 编著

華中師範大學出版社

21世纪数学系列教材
微积分
（华中科技大学高等数学课题组编著）
配套辅导书

微积分
习题详解

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书按照华中科技大学出版社出版的由华中科技大学高等数学课题组编著的21世纪系列教材《微积分》各章节所列习题的顺序，给出了各个习题的详细解答，并在每节习题之前给出了解答该节习题需要用到的准备知识，包括重点概念、重点定理、重点公式和重点法则，是一本方便实用的与教材相配套的教学参考书和学习辅导书。

新出图证(鄂)字10号

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题详解/赵益华，郑高峰，程婷编著.
—武汉：华中师范大学出版社，2008.10
ISBN 978-7-5622-3771-6
Ⅰ.微… Ⅱ.赵… Ⅲ.微积分—高等学校—解题 Ⅳ.O172.44
中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第145433号

微积分习题详解

作　　者：赵益华　郑高峰　程　婷©	
选题策划：王　胜	**责任编辑**：董晓伟
责任校对：罗　艺	**封面设计**：张晨晨
编 辑 室：第一编辑室	**电　　话**：027－67867361
出版发行：华中师范大学出版社	
社　　址：湖北省武汉市珞喻路152号	
销售电话：027－67863040　027－67867076　027－67867371　027－67861549	
传　　真：027－67863291	**邮　　购**：027－67861321
网　　址：http://www.ccnupress.com	**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
印　　刷：武汉鑫人达印务	**督　　印**：章光琼
字　　数：550千字	
开　　本：889mm×1194mm 1/16	**印　　张**：18.75
版　　次：2008年10月第1版	**印　　次**：2008年10月第1次印刷
定　　价：37.50元	

欢迎上网查询、购书

前　言

本书是与华中科技大学高等数学课题组编《微积分》(华中科技大学出版社出版)相配套的教学参考书和学习辅导书。

本书定名为《微积分习题详解》,主要突出一个“详”字。内容是对教材各章节所列出的习题和各章的自测题及书后给出的两套试题逐一给出详细解答。解答过程力求规范详细,便于具有一般高中数学基础的学生能够顺利阅读;对于难度较大的习题,一般给出两种以上解法,个别题甚至不惜篇幅,先推导出要用到的定理或公式再进行解答;每节习题解答之前都以“准备知识”列出解答该节习题需要用到的重点概念、重点定理、重点公式和重点法则,并且每一个习题都抄出课本原题后再进行解答。旨在使读者阅读时不再翻阅教材。这样做,未免有累赘繁琐之嫌,但编者认为,就其“方便”和“实用”两方面的作用和价值,要比刻意追求解答简单而使读者仍难于读懂,而意义要大得多。建议读者将习题做熟练后再将叙述过程进行简练。

本书在编著过程中,得到了原湖北省政协副主席崔建瑞先生及夫人赵俊峰教授和武汉科技大学中南分校校长赵作斌教授的热情关怀,得到了华中科技大学人工智能研究所所长、博士研究生导师李德华教授和华中师范大学数学与统计学学院院长、博士研究生导师李工宝教授的大力支持和认真指导,还得到了武汉科技大学中南分校信息工程学院院长、原武汉大学王化文教授和华中师范大学影视工程学院(现华中师范大学传媒学院)信息工程系主任、原华中科技大学教授、硕士研究生导师孟凡定先生的具体支持与指导,在此谨表衷心的感谢。

由于水平有限,时间仓促,错误与不当之处在所难免,敬请数学界同行和读者及时批评指正。

编著者

2008 年 10 月

目　录

第一章　函　　数

§1.1　变量与函数

准备知识

一、函数的概念

1. 变量的变域：变量 x 的可取值范围叫做变量 x 的变域. x 的变域可以用关于 x 的不等式表示，也可以用 x 的所有可取值的集合表示，还可以用 x 所在的区间表示. 例如

$$0<x\leqslant 1, x\in\{x\mid 0<x\leqslant 1\}, x\in(0,1]$$

表示的都是同一个变量 x 的变域.

2. 函数的定义：设 x,y 是两个变量，如果 x 的变化能够使 y 按照某个确定的对应规则 f 而随之变化，则称 f 是变量 x 到变量 y 的函数，或称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

3. 函数的定义域：能够使函数有意义的自变量的变域叫做函数的定义域. 定义域通常用集合 D 表示.

4. 函数值和函数的值域：在函数 $y=f(x)$ 中，对于自变量 x 在定义域内的任一确定的值，由对应关系 f 确定的函数 y 的值叫做函数值；函数值的集合叫做函数的值域. 值域通常用集合 W 表示.

5. 两个函数相等：当且仅当两个函数的对应关系和定义域分别相等时两个函数才相等.

二、函数的几何特性

1. 函数的单调性

设 $f(x)$ 在 I 上有定义，若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增（或单调减）.

单调增与单调减统称为单调. I 称为 f 的单调区间，f 称为 I 上的单调函数.

特别地，常函数也是单调函数，可以归为单调增函数，也可以归为单调减函数.

若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增（或严格单调减）.

单调递增函数的几何特征是它的图象自左至右呈上升趋势；单调递减函数的几何特征是它的图象自左至右呈下降趋势.

2. 函数的奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，若对 $f(x)$ 的定义域内的任意 x 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若对 $f(x)$ 的定义域内的任意 x 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 否则，$f(x)$ 称为非奇非偶函数.

奇函数的几何特征是图象关于原点对称，偶函数的几何特征是图象关于 y 轴对称，并且它们的定义域都关于原点对称.

3. 函数的周期性

若对任何 $x\in D$，都有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的一个周期. 若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z})$ 都是 $f(x)$ 的周期. 若在 $f(x)$ 的周期中，T 为最小的正周期，则称 T 为 $f(x)$ 的基本周期. 例如

$$\sin x、\cos x、\tan x、\cot x$$

都是周期函数，基本周期分别是 2π、2π、π、π.

若 $f(x)$ 的基本周期为 T，则 $f(\omega x+c)$ 的基本周期等于 T/ω.

周期函数的几何特征是在各个周期上的图象都全等.

4. 函数的有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 B，使得对于所有的 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant B$，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界，称 B 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界；若存在常数 A，使对于所有 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant A$，则称 $f(x)$ 在 D 上有下界，称 A 为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界. 若存在正常数 M，使对于所有 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，称 M 为 $f(x)$ 在 D 上的一个界；若对任何 $M>0$ 总有 $x\in D$，使 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

有界函数的几何特征是图象夹在位于 x 轴两侧，与 x 轴平行且与 x 轴距离相等（都等于 M）的两条直线之间.

三、绝对值不等式的性质

1. $|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

2. $\sqrt{x^2}=|x|$.

3. $|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$，$|x|=0\Leftrightarrow x=0$.

4. 设 $a>0$，则 $|x|>a\Leftrightarrow\begin{cases}x>a,\\ x<-a,\end{cases}$ $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$.

习题 1.1 详解

1. 解下列不等式，用区间表示 x 的范围.

(1) $x^2<9$；

解：$\because$ $x^2<9\Leftrightarrow|x|<3\Leftrightarrow-3<x<3$，

$\therefore x$ 的范围为$(-3,3)$.

(2) $0<|x-2|<4$;

解：$\because 0<|x-2|<4 \Leftrightarrow \begin{cases}|x-2|<4,\\ |x-2|\neq 0.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-4<x-2<4,\\ x-2\neq 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<x<6.\\ x\neq 2.\end{cases}$

$\Leftrightarrow -2<x<2$ 或 $2<x<6$,

$\therefore x$ 的范围为$(-2,2)\cup(2,6)$.

(3) $|x+1|\geqslant 2$;

解：$\because |x+1|\geqslant 2 \Leftrightarrow x+1\leqslant -2$ 或 $x+1\geqslant 2 \Leftrightarrow x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 1$,

$\therefore x$ 的范围为$(-\infty,3]\cup[1,+\infty)$.

(4) $1<|x-1|<2$.

解：$\because 1<|x-1|<2 \Leftrightarrow \begin{cases}|x-1|>1,\\ |x-1|<2.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-1<-1,\\ -2<x-1<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1>1,\\ -2<x-1<2.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x<0,\\ -1<x<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2,\\ -1<x<3.\end{cases}$

$\Leftrightarrow$或 $-1<x<0$ 或 $2<x<3$,

$\therefore x$ 的范围为$(-1,0)\cup(2,3)$.

2. 求下列函数的定义域 D 和值域 W.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}$;

解：要使 $y=\dfrac{1}{1-x}$有意义，须使 $1-x\neq 0$，解得 $x\neq 1$，故

$$D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

又因为 $y=\dfrac{1}{1-x}$的分子不等于 0，所以 $y\neq 0$；且当 x 取$(-\infty,1)$上的所有值时，y 可取得一切正数，当 x 取$(1,+\infty)$上的所有值时，y 可取得一切负数，故

$$W=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

解：要使 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$有意义，须使 $1-x^2\neq 0$，解得 $x\neq \pm 1$，故

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

又因为 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$的分子不为 0，所以 $y\neq 0$；且当 x 取$(-1,1)$内的一切值时，y 可取得一切正数，当 x 取并区间$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上的一切值时，$y$ 可取得一切负数，故

$$W=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;

解：要使 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$有意义，须使 $\begin{cases}1-x\geqslant 0,\\ \sqrt{1-x}\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\leqslant 1,\\ 1-x\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x<1$，故

$$D=(-\infty,1).$$

又 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$的分子不为 0，所以 $y\neq 0$，而 $\sqrt{1-x}>0$，所以 $y>0$，故

$$W=(0,+\infty).$$

(4) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$;

解：要使 $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$有意义，须使

$$\left|\frac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1 \text{ 且 } 1+x\neq 0,$$

即

$$-1\leqslant\frac{2x}{(1+x)}\leqslant 1 \text{ 且 } 1+x\neq 0,$$

亦即

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x}+1\geqslant 0,\\ 1+x\neq 0,\end{cases} \text{ 且 } \begin{cases}\dfrac{2x}{1+x}-1\leqslant 0,\\ 1+x\neq 0,\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}\dfrac{3x+1}{x+1}\geqslant 0,\\ x\neq -1,\end{cases} \text{ 且 } \begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}\leqslant 0,\\ x\neq -1.\end{cases}$$

解得

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,$$

故

$$D=\left[-\frac{1}{3},1\right].$$

又此时，$\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$ 即 $-1\leqslant\dfrac{2x}{1+x}\leqslant 1$，而 $\arccos\dfrac{2x}{1+x}\in[0,\pi]$，故

$$W=[0,\pi].$$

(5) $y=\arcsin\left[\lg\left(\dfrac{x}{10}\right)\right]$;

解：要使 $y=\arcsin\left[\lg\left(\dfrac{x}{10}\right)\right]$有意义，须使 $\begin{cases}\dfrac{x}{10}>0,\\ \left|\lg\left(\dfrac{x}{10}\right)\right|\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>0,\\ -1\leqslant\lg\left(\dfrac{x}{10}\right)\leqslant 1\end{cases}$，亦即

$$\frac{1}{10}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant 10,$$

解得

$$1\leqslant x\leqslant 100,$$

故

$$D=[1,100].$$

因 y 是增函数，又

$$\arcsin\left(\lg\left(\frac{1}{10}\right)\right)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin\left(\lg\left(\frac{100}{10}\right)\right)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

从而

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故

$$W=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

(6) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+1$;

解：要使 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+1$ 有意义，须使 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\1-x\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\x\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $x=1$，故

$$D=\{1\}.$$

此时 $y=1$，故

$$W=\{1\}.$$

(7) $y=\arcsin\frac{1}{x}$;

解：要使 $y=\arcsin\frac{1}{x}$ 有意义，须使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，且 $x\neq 0$，即 $|x|\geqslant 1$ 且 $x\neq 0$，解得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$，故

$$D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

又 $\frac{1}{x}\neq 0$，所以 $\arcsin\frac{1}{x}\neq 0$，且 x 取 $(-\infty,-1]$ 上的一切实数时，y 可取 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上的一切值，x 取 $[1,+\infty)$ 上的一切实数时，y 可取 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的一切值，故

$$W=\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

(8) $y=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\0, & x=0.\end{cases}$

解：因本分段函数在各段定义域上均有意义，故定义域为各段定义域的并集，即

$$D=(-\infty,+\infty).$$

又 $x\neq 0$ 时，$y=\sin\frac{1}{x}$，可取 $[-1,0)\cup(0,1]$ 上的一切实数，$x=0$ 时，$y=0$，并集为 $[-1,1]$，故

$$W=[-1,1].$$

注：本题求函数的值域用的是讨论的方法，下一节学习了反函数运算后，对于具有反函数的函数的值域，还可以通过求它的反函数的定义域来求其值域.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x\sin x$;

解：$\because$ $f(-x)=(-x)\sin(-x)=(-x)(-\sin x)$
$=x\sin x=f(x)$，

$\therefore$ $y=f(x)=x\sin x$ 为偶函数.

(2) $y=x\arcsin x$;

解：$\because$ $f(-x)=(-x)\arcsin(-x)$
$=(-x)(-\arcsin x)$
$=x\arcsin x=f(x)$，

$\therefore$ $y=f(x)=x\arcsin x$ 为偶函数.

(3) $y=x-x^3$;

解：$\because$ $f(-x)=(-x)-(-x)^3=-x-(-x^3)$
$=-(x-x^3)=-f(x)$

$\therefore$ $y=f(x)=x-x^3$ 为奇函数.

(4) $y=\arccos x$;

解：$\because$ $f(-x)=\arccos(-x)=\pi-\arccos x\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，

$\therefore$ $y=f(x)=\arccos x$ 为非奇非偶函数.

(5) $y=x^2\operatorname{sgn}x$;

解：$\because$ $f(-x)=(-x)^2\operatorname{sgn}(-x)=x^2(-\operatorname{sgn}x)$
$=-x^2\operatorname{sgn}x=-f(x)$

$\therefore$ $y=f(x)=x^2\operatorname{sgn}x$ 为奇函数.

(6) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$.

解：$\because$ $f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}$
$=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$

$\therefore$ $y=f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

4. 判断 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性 $(0<a\neq 1)$.

解：$\because$ $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+(-x)^2})$
$=\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)=\log_a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$
$=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}$
$=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$

$\therefore$ $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$，$(0<a\neq 1)$ 为奇函数.

5. 判断下列函数 f 与 g 是否相等？为什么？

(1) $f(x)=1$，$g(x)=\frac{x}{x}$;

解：不相等. 因 f 的定义域为 $\mathbf{R}$，g 的定义域为 $x\neq 0$，定义域不同.

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$;

解：不相等. 因 $f(x)=x$ 而 $g(x)=|x|$，函数解析式不同.

(3) $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$;

解：相等. 因 $f(x)=1$，$g(x)=1$，f 与 g 的解析式相同，且 f 与 g 的定义域都是 $\mathbf{R}$.

(4) $f(x)=\tan x$，$g(t)=\tan t$;

解：相等. 因 f 与 g 的对应规则相同，定义域也相同. 只是表示自变量的字母不同，但这与两函数是否相等无关.

(5) $f(x)=\sin x(-\infty<x<+\infty)$，
$g(x)=\sin x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

解：不相等. 因尽管 f 与 g 的对应规则相同，但定义域不相同.

6. 指出下列函数中的周期函数，并写出其基本周期 T.

(1) $y=\sin 2x$；

解：是周期函数，因对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有

$$\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x,$$

且 π 是能使上式成立的最小正值，故

$$T=\pi.$$

(2) $y=x\arcsin x$；

解：非周期函数.

(3) $y=\sin^2 x$；

解：是周期函数；因对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有

$$\sin^2(x+\pi)=(\pm\sin x)^2=\sin^2 x,$$

且 π 是能使上式成立的最小正值，故

$$T=\pi.$$

(4) $y=2\sin x$；

解：是周期函数，因 $2\sin x$ 与 $\sin x$ 有相同的周期，而 $y=\sin x$ 的基本周期为 2π，故 $y=2\sin x$ 的基本周期也是

$$T=2\pi.$$

(5) $y=\sin(x+2)$；

解：是周期函数，因 $\omega=1,\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$，即

$$T=2\pi.$$

(6) $y=\sin\frac{x}{2}$.

解：是周期函数，因 $\omega=\frac{1}{2},\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1/2}=4\pi$，即

$$T=4\pi.$$

7. 判断以下函数是有界还是无界？

(1) $y=\sin^2 x+1\ (-\infty<x<+\infty)$；

解：$\because\ -1\leqslant\sin x\leqslant 1,$

$0\leqslant\sin^2 x\leqslant 1,$

$1\leqslant\sin^2 x+1\leqslant 2,$

$|\sin^2 x+1|\leqslant 2$

$\therefore\ y=\sin^2 x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2) $y=\frac{x}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$；

解：因当 $|x|=1$ 时，$x^2=1$，从而

$$|y|=\frac{|x|}{1+x^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}<1;$$

当 $|x|<1$ 时，$0\leqslant x^2<|x|<1$，从而

$$|y|=\frac{|x|}{1+x^2}<\frac{1}{1+0}=1;$$

当 $|x|>1$ 时，$x^2>|x|$，从而

$$x^2+1>|x|,$$

所以

$$|y|=\frac{|x|}{1+x^2}<\frac{x^2+1}{1+x^2}=1,$$

即当 $-\infty<x<+\infty$ 时，恒有 $|y|<1$，故

$$|y|=\frac{x}{1+x^2},$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(3) $y=2^{\frac{1}{x}}(0<x<1)$；

解：不妨任给 $M>2$，则 $\log_2 M>1,0<\frac{1}{\log_2 M}<1$. 因为 $2^{\frac{1}{x}}>M$ 等价于

$2^{\frac{1}{x}}>2^{\log_2 M}$，因 $2>1$，故 2^u 是增函数，故

$$\frac{1}{x}>\log_2 M,\ 0<x<\frac{1}{\log_2 M},$$

所以只要取 $0<x<\frac{1}{\log_2 M}<1$，就有 $|y|>M$，故 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

(4) $y=2^{\frac{1}{x}}(-1<x<0)$；

解：令 $\frac{1}{x}=-t$，由 $-1<x<0$ 得 $\frac{1}{x}<-1,-t<-1$，从而 $t>1$，且 $2^{\frac{1}{x}}=2^{-t}=\frac{1}{2^t}$，因为 $2>1$，所以 2^t 为增函数，$\frac{1}{2^t}$ 为减函数，故

$$0<\frac{1}{2^t}<\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2},\left|\frac{1}{2^t}\right|<\frac{1}{2}$$

即

$$|2^{\frac{1}{x}}|<\frac{1}{2},$$

所以 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 在 $(-1<x<0)$ 内有界.

(5) $y=\ln(x^2+1)(0<x<2)$；

解：$\because\ u=x^2+1$ 在 $(0,2)$ 内为增函数，又由 $e>1$ 知 $y=\ln u$ 在 $(1,5)$ 内为增函数.

$\therefore\ y=\ln(x^2+1)$ 在 $(0,2)$ 内为增函数，

故 $0=\ln 1<\ln(x^2+1)<\ln 5$，即

$$|y|<\ln 5,$$

所以

$$y=\ln(x^2+1)$$

在 $(0,2)$ 内有界.

(6) $y=\frac{x+1}{x^2-x-2}(-1<x<0)$.

解：因在 $(-1,0)$ 内 $y=\frac{x+1}{x^2-x-2}=\frac{x+1}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$，而 $u=x-2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，从而

$$v=\frac{1}{u}=\frac{1}{x-2}$$

在 $(-\infty,2)$ 及 $(2,+\infty)$ 内为减函数，于是 $v=\frac{1}{u}=\frac{1}{x-2}$ 在 $[-1,0]$ 上为减函数，即有

$$\frac{1}{-2}<\frac{1}{x-2}<\frac{1}{-3},$$

即

$$|v|<\frac{1}{2}.$$

所以 $y=\frac{x+1}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$在$(-1,0)$内，有$|u|<\frac{1}{2}$.

故

$$y=\frac{x+1}{x^2-x-2}$$

在$(-1,0)$内有界.

§1.2　函数运算　初等函数

准备知识

一、函数的运算

1. 函数的四则运算的定义：设 f、g 是分别定义于 D_1 与 D_2 上的函数，D_1 与 D_2 的交集 $D=D_1\cap D_2$ 非空，对每个 $x\in D$，分别依以下算式

$$f(x)+g(x),f(x)-g(x),f(x)g(x),$$
$$f(x)/g(x)(g(x)\neq0)$$

定义函数 $f+g,f-g,fg,f/g$，依次称作函数 f 与 g 的和、差、积、商.

2. 和、差、积、商函数的奇偶性

(1) 奇函数的和函数与差函数仍是奇函数；奇函数的积函数与商函数是偶函数.

(2) 偶函数的和、差、积、商仍是偶函数.

(3) 奇函数与偶函数的积函数与商函数是奇函数.

(4) 奇函数与奇函数或偶函数与偶函数的积函数与商函数都是偶函数.

3. 复合函数与函数的复合

(1) 定义

设 $x=f(t)(t\in D_f)$ 与 $y=g(x)(x\in D_g)$ 为给定函数，(D_f、D_g 分别为 f、g 的定义域). 若 f 的值域 W 包含在 g 的定义域 D_g 中，则依下式

$$y=\varphi(t)=g[f(t)]\ (t\in D_f)$$

定义的函数 φ 称为 f 与 g 的复合函数，记作 $g\circ f$ 或 $g[f(t)]$. 分别称 t、x、y 为复合函数 $g\circ f$ 的自变量、中间变量及因变量.

(2) 函数的复合顺序：$g\circ f$ 按 $g[f(t)]$的顺序复合，$f\circ g$按 $f[g(t)]$的顺序复合.

(3) 复合函数的单调性：增增为增，减减为增；增减为减，减增为减.（同向为增，异向为减）

4. 反函数

(1) 定义：设函数 $y=f(x)$的定义域是 D，值域是 W. 若对每个 $y\in W$，存在唯一的 $x\in D$，满足 $y=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$为可逆函数或有反函数，它所确定的由 y 到 x 的函数称为 f 的反函数，记作 f^{-1}. 即

$x=f^{-1}(y)$ $(y\in W)$（习惯上记作 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in W)$）.

(2) 一个函数的定义域和值域分别是它的反函数的值域和定义域.

(3) 在同一坐标系中 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图象是同一条曲线；$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称.

(4) 严格单调函数一定存在反函数. 其求法：先由 $y=f(x)$解得 $x=f^{-1}(y)$，再将其中的 x,y 分别换成y,x.

函数的四则运算、复合运算和求逆（即求反函数）运算称作函数的三大基本运算.

二、初等函数

1. 基本初等函数：常函数 $y=C$（C 为常数），幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$，指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$，对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$），三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$ 及反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\text{arccot} x$ 等六类函数统称为基本初等函数.

2. 简单初等函数：六种基本初等函数以及由它们经过有限次四则运算所得到的函数统称为简单初等函数.

3. 初等函数：六种基本初等函数以及由它们经过有限次四则运算和有限次复合所得到的函数统称为初等函数. 例如，双曲函数

$$y=\text{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}(-\infty<x<+\infty),$$

$$y=\text{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}(-\infty<x<+\infty),$$

$$y=\text{th}x=\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}(-\infty<x<+\infty)$$ 和反双曲函数

$$y=\text{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),(-\infty<x<+\infty),$$

$$y=\text{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),(1\leqslant x<+\infty),$$

$$y=\text{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},(-1<x<1),$$

就是初等函数

三、分段函数

由两个以上对应法则分别在不同的自变量的变域上定义的一个函数称作分段函数. 分段函数不是初等函数. 常用的分段函数有

(1) 绝对值函数：$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

(2) 符号函数：$y=\text{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(3) 取整函数：$y=[x]$=不小于 x 的最大整数

(4) 狄里克雷 Dirichlet 函数：

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

分段函数的定义域等于各段上函数定义域的并集.

习题 1.2 详解

1. 证明：

(1) 两个偶函数的和、差、积、商仍是偶函数；

证：设 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 均为 I 上的偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$. 故

① $f(-x)\pm g(-x)=f(x)\pm g(x)$，这说明 $f(x)\pm g(x)$仍是偶函数；

② $f(-x)g(-x)=f(x)g(x)$，这说明 $f(x)g(x)$仍是偶函数；

③ $f(-x)/g(-x)=f(x)/g(x)$ $(g(x)\neq 0)$，这说明 $f(x)/g(x)$ $(g(x)\neq 0)$仍是偶函数.

(2) 奇函数与偶函数的积与商是奇函数.

证：设 $y=f(x)$是 I 上的奇函数，$y=g(x)$ 是 I 上的偶函数，则有 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$. 故

① $f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)]\cdot g(x)=-[f(x)\cdot g(x)]$，这说明 $f(x)g(x)$是奇函数；

② $g(-x)/g(-x)=-f(x)/g(x)$ $(g(x)\neq 0)$，这说明 $f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$是奇函数.

2. 指出下列函数由哪几个简单函数复合而成.

(1) $y=3^{2\sin x}$；

解：$y=3^{2\sin x}$是由 $y=3^u$，$u=2v$，$v=\sin x$ 三个简单函数复合而成.

(2) $y=3^{\sin 2x}$；

解：$y=3^{\sin 2x}$是由 $y=3^u$，$u=\sin v$，$v=2x$ 三个简单函数复合而成.

(3) $y=\tan\lg 2x$；

解：$y=\tan\lg 2x$ 是由 $y=\tan u$，$u=\lg v$，$v=2x$ 三个简单函数复合而成.

(4) $y=(\arccos 2^x)^2$.

解：$y=(\arccos 2^x)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\arccos v$，$v=2^x$ 三个简单函数复合而成.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$(f\circ f\circ f)(x)$.

解：因为 $(f\circ f\circ f)(x)=f[f(f(x))]$，

$$f(f(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=\frac{x-1}{x},$$

所以 $f[f(f(x))]=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\dfrac{1}{\frac{x-x+1}{x}}=x$，

即

$$(f\circ f\circ f)(x)=x,\quad (x\neq 0,1).$$

4. 设 $f(x+x^{-1})=x^2+x^{-2}$，求 $f(x)$及 $f(\sin x)$.

解：令 $u=x+x^{-1}=x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+1}{x}$，则

$$x^2+x^{-2}=x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{x^4+1}{x^2}=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-2=u^2-2.$$

从而

$$f(u)=u^2-2,$$

所以

$$f(x)=x^2-2,$$

并且

$$f(\sin x)=\sin^2 x-2.$$

5. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f(e^x-1)$ 及 $f(1)$.

解：因为 $\ln e^x=x$，所以

$$\begin{aligned}f(e^x-1)&=(e^x-1)^2\ln(1+e^x-1)\\&=(e^x-1)^2\ln e^x=(e^x-1)^2x=x(e^x-1)^2,\end{aligned}$$

并且

$$f(1)=1^2\ln(1+1)=\ln 2.$$

6. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，求 $f[g(x)$及 $g[f(x)]$.

解：$f[g(x)]=(2^x)^2=2^{2x}$，　$g[f(x)]=2^{x^2}$.

7. 判断下列函数在所给区间上是否可逆，可逆时写出其反函数：

(1) $y=x^2(-\infty<x<+\infty)$；

解：$\because$ $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上非严格单调，

$\therefore$ $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$不可逆.

(2) $y=x^2(x\geqslant 0)$；

解：因 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上严格单调增，故 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上可逆，反函数为 $x=\sqrt{y}$.

(3) $y=x^2(x\leqslant 0)$；

解：因 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$上严格单调减，故 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$上可逆，反函数为 $x=-\sqrt{y}$.

(4) $y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi\right)$；

解：因 $y=\sin x$ 在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right)$上严格单调减，故 $y=\sin x$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right)$上可逆，反函数为 $x=\pi-\arcsin y$.

(5) $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$；

解：因 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$ 上严格单调减，故 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$ 上可逆，反函数为 $x=\dfrac{1}{y}(y>0)$.

(6) $y=\operatorname{sgn}x(-\infty<x<+\infty)$.

解：$\because$ $y=\operatorname{sgn}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上非单调，

$\therefore$ $y=\operatorname{sgn}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上不可逆.

8. 设复合函数 $g\circ f$ 有意义，f 是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，证明 $g\circ f$ 是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数.

证：因 f 是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，故对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(-x)=f(x),$$

而

$$g\circ f=g\{f(x)\},$$

于是

$$g\circ f(-x)=g\{f(-x)\}=g\{f(x)\}=g\circ f(x),$$

故

$$g\circ f \text{ 是}(-\infty,+\infty)\text{上的偶函数.}$$

第一章自测题详解

一、单项选择题(每小题 4 分,共 40 分).

1. 函数 $y=\lg(x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}+\arccos x$ 的定义域是　(B)

A. $(-1,+\infty)$　B. $(-1,1]$　C. $(-1,1)$

解: $\lg(x+1)$有意义的范围是$(-1,+\infty)$,$\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$有意义的范围是$(-2,+\infty)$,$\arccos x$ 有意义的范围是$[-1,1]$,故 y 有意义的范围应是三者的交集,即

$$(-1,1],$$

故选 B.

2. 设 $f(x)$是二次多项式,并且

$$f(0)=4,f(1)=2,f(2)=1,$$

则 $f(x)=$　(A)

A. $\dfrac{1}{2}(x^2-5x+8)$

B. $-\dfrac{1}{2}(x^2+x-4)$

C. $\dfrac{1}{2}(x^2-4x+8)$

解: 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,将

$$f(0)、f(1)、f(2)$$

的值分别代入,得

$$\begin{cases}c=4,\\a+b+c=2,\\4a+2b+c=1.\end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{5}{2},c=4$. 于是

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+4=\frac{1}{2}(x^2-5x+8).$$

故选 A.

3. 设 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$,它是$(-\infty,+\infty)$上的　(C)

A. 有界函数　B. 偶函数　C. 奇函数

解: 由习题 1.1 第 4 题知 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数,故选 C.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2;\\x^2-1, & x\geqslant2.\end{cases}$ 则 $f\{f(1)\}=$　(A)

A. 3　B. 2　C. 0

解: $f(1)=1+1=2,f\{f(1)\}=f(2)=2^2-1=3$,故选 A.

5. 下列函数 $f(x)$与 $g(x)$是相同的有　(A)

A. $f(x)=\cos(\arccos x)$, $g(x)=x$,其中$|x|\leqslant1$

B. $f(x)=x-3,g(x)=\sqrt{(x-3)^2}$

C. $f(x)=\lg[(x-1)/(x+1)]$,
$g(x)=\lg(x-1)-\lg(x+1)$

解: A 中 $f(x)=\cos(\arccos x)=x$,定义域为 $|x|\leqslant1$,均与 $g(x)$相同. 故选 A.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x},g(x)=1-x$,则 $f[g(x)]=$　(C)

A. $1-\dfrac{1}{x}$　B. $1+\dfrac{1}{x}$　C. $\dfrac{1}{1-x}$

解: $f[g(x)]=\dfrac{1}{1-x}$,故选 C.

7. $y=x^3$ 与 $y=\sqrt[3]{x}$关于(　)对称　(B)

A. x 轴或 y 轴　B. 直线 $y=x$　C. 原点

解: 因 $y=x^3$ 与 $y=\sqrt[3]{x}$互逆,故它们关于直线 $y=x$ 对称. 所以选 B.

8. $y=x^3$ 与 $x=y^{\frac{1}{3}}$　(C)

A. 关于 x 轴或 y 轴对称

B. 关于直线 $y=x$ 对称

C. 是同一条曲线

解: $y=x^3$ 与 $x=y^{\frac{1}{3}}$互逆且等价,故为同一条曲线,选 C.

9. 在$(-\infty,+\infty)$内单调减少的函数是　(C)

A. $y=x^2$　B. $y=x^3$　C. $y=0.1^x$

解: 只有指数函数 $y=0.1^x$ 的底数 $0<0.1<1$,为单减函数. 故选 C.

10. 在所给区间上无界函数是　(C)

A. $y=\ln(1+x)$, $x\in[0,1]$

B. $y=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$

C. $y=x^2$, $x\in(0,+\infty)$

解: 因闭区间上函数必有界,故排除 A;因余弦函数有界,故排除 B;选 C. 事实上,幂函数 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$上无上界,从而无界.

二、填空题(每小题 5 分,共 40 分).

1. 设 $f(3x)=2x+1,f(a)=5$ 则 $a=$__6__;

解: 因为 $f(3x)=2x+1=2\cdot\dfrac{3x}{3}+1$,所以

$$f(a)=2\cdot\frac{a}{3}+1$$

从而 $2\cdot\dfrac{a}{3}+1=5$,解得 $a=6$.

应填 6.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则 $f\{f(x)\}=$__x__.

解: $f\{f(x)\}=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$

$$=\frac{\left(1-\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)}$$

$$=\frac{1+x-1+x}{1+x+1-x}=\frac{2x}{2}=x.$$

应填 x.

3. 设 $f(x)=x^3+1$,则 $f(x^2)=$ $\underline{\quad x^6+1\quad}$;

解:$f(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$. 应填 x^6+1.

4. 设 $f(x)=3x+5$, 则 $f(f(x)-2)=$ $\underline{\quad 9x+14\quad}$;

解:$f(x)-2=3x+5-2=3x+3$,

$f(f(x)-2)=f(3x+3)=3(3x+3)+5=9x+14$.
应填 $9x+14$.

5. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$, 则 $f(x)=\underline{x^2+1}$;

解:令 $x+\frac{1}{x}=t$, 则

$$x^2+\frac{1}{x^2}+3=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+3$$
$$=t^2-2+3=t^2+1, f(t)=t^2+1,$$

故

$$f(x)=x^2+1.$$

应填 x^2+1.

6. 设 $f\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x}{2x-1}$, 则 $f(x)=$ $\underline{\quad \frac{1}{1-x}\quad}$;

解:令 $\frac{1}{x}-1=t$ 则

$$\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{\frac{2x-1}{x}}=\frac{1}{2-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}-1\right)}$$
$$=\frac{1}{1-t},$$

故 $f(t)=\frac{1}{1-t}$,从而 $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

应填 $\frac{1}{1-x}$.

7. $f(x)=x^2-6x+5$ 的值域是 $\underline{\quad [-4,+\infty)\quad}$;

解:$\because$ $a=1>0$,

$$\therefore\ y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times1\times5-6^2}{4\times1}=-4$$

故 $$W=[-4,+\infty).$$

应填$[-4,+\infty)$.

8. $f(x)=2+3\cos x$ 的值域是 $\underline{\quad [-1,5]\quad}$.

解:$\because$ $-1\leqslant\cos x\leqslant1, -3\leqslant3\cos x\leqslant3$,

$$-1\leqslant2+3\cos x\leqslant5.$$

$\therefore$ $W=[-1,5]$. 应填$[-1,5]$.

三、(10 分) 某单位有汽车一辆,一年中的税款,保险费及司机工资支出共 a,另外每行驶 1 km 需油费 b. 试写出一年中平均每公里费用 y 与行驶公里数 x 的函数关系式.

解:依题设,一年中总费用为 $a+bx$,故平均每公里费用为$\frac{(a+bx)}{x}$,即

$$y=\frac{(a+bx)}{x}.$$

四、(10 分)证明 Dirichlet 函数 $D(x)$以任何正有理数为周期.

证:设 q 为任意给的正有理数,则对任何实数 x,因为 $x+q$ 与 x 同为有理数或无理数. 故 $D(x+q)=D(x)$,这说明 q 是函数 $D(x)$的周期.

第二章　极限·连续

§2.1　数列的极限

准备知识

一、数列极限的概念

1. 数列极限的定义：设$\{x_n\}$是一数列，A为一常数，若对任给正数ε，总存在正整数N，使当$n>N$时，

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称$\{x_n\}$的极限等于A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A$$

或

$$x_n\to A(n\to\infty)$$

后式读作“当n趋向于∞时，x_n趋近于A”. x_n趋近于A不要求x_n一定等于A.

2. 数列的收敛与发散：若数列的极限存在，则称该数列收敛，称该数列为收敛数列；若数列的极限不存在，则称该数列发散，称该数列为发散数列.

数列的极限存在是指满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$的常数$A$存在；数列的极限不存在是指满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$的常数$A$不存在，或$x_n\to\infty(n\to\infty)$.

二、数列极限的性质

1. 必要条件与唯一性：设$\{x_n\}$是一个收敛数列，则$\{x_n\}$必是有界数列且极限是唯一的.

2. 保域性：设$x_n\to c(n\to\infty)$，$a<c<b$，则当n充分大时，$a<x_n<b$；反之，若当n充分大时，$x_n\geqslant a$(或$x_n\leqslant b$)，则$c\geqslant a$(或$c\leqslant b$).

3. 保号性：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c(c\neq0)$，则有：若$c>0$(或$c<0$)，则当$n$充分大时，$x_n>0$(或$x_n<0$)；反之，若当$n$充分大时，$x_n>0$(或$x_n<0$)，则$c\geqslant0$(或$c\leqslant0$).

4. 可变项性：一个数列去掉或改变其中有限多个项不改变其敛散性.

三、数列极限的运算法则

设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均为收敛数列，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则有：

1. 和差法则：

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n=A\pm B;$$

2. 积法则：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n=AB$；

由积法则还可以推出：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}Kx_n=K\lim\limits_{n\to\infty}x_n$($K$为常数)，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^m=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^m$($m$为正整数)，

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{\frac{1}{m}}=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^{\frac{1}{m}}$($\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0,m\in\mathbf{N}$)；

3. 商法则：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n/\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A/B(B\neq0)$.

四、数列极限的存在准则

1. 夹挤准则：设n充分大时$a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$. 若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均收敛于同一极限$A$，则$\{x_n\}$也收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

2. 单调有界收敛准则：单调增且有上界的数列或单调减且有下界的数列均为收敛数列.

五、常用极限

① $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.　② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.　④ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.　⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

⑦ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.　⑧ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin1/n}{1/n}=1$.

⑨ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

⑩ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1n^m+a_2n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_1n^m+b_2n^{m-1}+\cdots+b_m}=\dfrac{a_1}{b_1}(b_1\neq0)$.

习题2.1详解

1. 证明：单调增数列必有下界，单调减数列必有上界.

证：设$\{x_n\}$为一单调增数列，由单调增数列的定义知，对每一个$n\in\mathbf{N}_+$，都有$x_n\leqslant x_{n+1}$，即有

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

取首项$x_1=A$，则对任意$n\in\mathbf{N}_+$，都有$x_n\geqslant A$，即A是数列$\{x_n\}$的一个下界；

设$\{x_n\}$为一单调减数列，由单调减数列的定义知，对每一个$n\in\mathbf{N}_+$，都有$x_n\geqslant x_{n+1}$，即有

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

取首项$x_1=B$，则对任意$n\in\mathbf{N}_+$，都有$x_n\leqslant B$，即B是数列$\{x_n\}$的一个上界.

2. 写出以下数列$\{x_n\}$的前m项.

(1) $x_n=\dfrac{2n-1}{3n+2}(m=5)$；

解：$x_1=\dfrac{1}{5}$，$x_2=\dfrac{3}{8}$，$x_3=\dfrac{5}{11}$，$x_4=\dfrac{1}{2}$，$x_5=\dfrac{9}{17}$.

(2) $x_n=\frac{1-(-1)^n}{n^2}$ $(m=5)$；

解：$x_1=2, x_2=0,\ x_3=\frac{2}{9}, x_4=0, x_5=\frac{2}{25}$.

(3) $x_n=n^{(-1)^n}n$ $(m=5)$；

解：$x_1=1, x_2=4, x_3=1, x_4=16, x_5=1$.

(4) $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, x_1=\sqrt{2}$ $(m=3)$.

解：$x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

3. 以下哪些说法等价于“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$”？

(1) 对任意正数 ε，落在 $N(a,\varepsilon)$ 之外的 x_n 至多有限个.

(2) 对任意正数 ε，满足不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 的 x_n 有无限个.

(3) 对某个很小的正常数 ε，当 n 充分大时，$|x_n-a|<\varepsilon$.

解：只有说法(1)等价于“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$”，因这时，对任给 $\varepsilon>0$，落在 $N(a,\varepsilon)$ 之外的 x_n 只有有限个项，而其余无限项都落在 $N(a,\varepsilon)$ 之内，即有无穷多项，使 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，符合数列极限的定义，故说法(1)等价于“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$”.

对于说法(2)，因满足 $|x_n-a|<\varepsilon$ 的 x_n 有无限个，而不满足 $|x_n-a|<\varepsilon$ 的 x_n 也可能有无限个，那就不符合数列极限的定义了. 例如 $1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},\cdots\cdots$，就是这种情况，该数列的极限就不存在；

对于说法(3)，因“对某个很小的正常数 ε”与“任给正数 ε”的意义绝然不同，所以说法(3)不符合数列极限的定义.

4. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n+4}$；

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{4}{n}}=\frac{2+0}{5+0}=\frac{2}{5}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{n^2+n+1}$；

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0-0}{1+0+0}=2$.

注：若数列的通项 a_n 为分式，并且分式的分子和分母都是关于 n 的同次多项式，则当 $n\to\infty$ 时，a_n 的极限等于分子与分母最高次项系数之比.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4$；

解：原式 $=(1+0)^4=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$；

解：原式

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+3^n}{3^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{0+1}{\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}}=3.$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$；

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(1-0)}{\frac{1}{2}}=1$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}$.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}}$

$$=2^{\frac{\frac{1}{2}[1-0]}{\frac{1}{2}}}=2.$$

5. 用夹挤准则求以下极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$；

解：$\because\ -1\leqslant\sin n\leqslant 1, -\frac{1}{n}\leqslant\frac{\sin n}{n}\leqslant\frac{1}{n}$,

又 $$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$；

解：$\because\ 1\leqslant n!\ \leqslant n^{n-1}, \frac{1}{n^n}\leqslant\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{n}$,

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n})$.

解：$\because\ n\leqslant 1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}\leqslant n\cdot\sqrt[3]{n}$,

$$\frac{n}{n\sqrt{n}}\leqslant\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}}\leqslant\frac{n\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[6]{n}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}=0,$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n})=0$.

6. 用单调有界收敛准则证明$\{x_n\}$收敛.

(1) $x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{2x_n},(n\geqslant 1)$;

证：依题设可知

$$x_1=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}},x_2=\sqrt{2\sqrt{2}}=2^{\frac{3}{4}},x_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=2^{\frac{7}{8}},$$
$$\cdots,x_n=2^{\frac{2^n-1}{2^n}},\cdots$$

显然 $x_n>1>0$,因$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{2^{[(2^{n+1}-1)/2^{n+1}]}}{2^{[(2^n-1)/2^n]}}=2^{\frac{1}{2^{n+1}}}>1$,所以

$$x_{n+1}>x_n(n\geqslant 1),$$

故$\{x_n\}$为单调增数列. 又 $x_n=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}<2^1=2$,即$\{x_n\}$有上界 2. 根据单调有界收敛准则知$\{x_n\}$必收敛.

(2) $x_n=\dfrac{5}{1}\cdot\dfrac{6}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+4}{2n-1}$.

证：首先，考察数列通项 x_n 中的最后一个因式$\dfrac{n+4}{2n-1}$,令$\dfrac{n+4}{2n-1}=1$,得 $n=5$,令$\dfrac{n+4}{2n-1}>1$,得 $n<5$，令$\dfrac{n+4}{2n-1}<1$，得 $n>5$. 故数列$\{x_n\}$前 4 项为单调增，从第 5 项开始为单调减. 事实上$\{x_n\}$的前 4 项为

$$5,10,14,16,$$

从第 5 项开始依次为

$$16,14\frac{6}{11},12\frac{4}{13},\cdots.$$

又$\dfrac{n+4}{2n-1}>0$,即$\{x_n\}$的各因式均为正，$x_n>0$,即$\{x_n\}$有下界 0.

根据一个数列去掉或改变其中有限多个项不改变其敛散性及单调有界收敛准则知，$\{x_n\}$必收敛.

7. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

证：首先设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,即对任给 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，$|x_n-0|<\varepsilon$ 总成立，即$|x_n|<\varepsilon$ 总成立. 此时$||x_n|-0|=|x_n|<\varepsilon$ 亦总成立. 故有

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}|x_n|=0;$$

然后设$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$,即对任给 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，$||x_n|-0|<\varepsilon$ 总成立，即$||x_n||=|x_n|<\varepsilon$ 总成立，此时亦有

$$|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon$$

总成立. 故有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,即

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}|x_n|=0.$$

8. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}(a\geqslant 0)$.

解：当 $0\leqslant a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a^n}=\frac{0}{1+0}=0,$$

当 $a=1$ 时，$a^n=1,(n=1,2,3,\cdots.)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a^n}+1}=1.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\begin{cases}0,0<a<1;\\ \dfrac{1}{2},\quad a=1;\\ 1,\quad a>1.\end{cases}$$

9. 用定义证明以下极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;

证：任给 $\varepsilon>0$,因为

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|<\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow\sqrt{n^2+a^2}-n<n\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{n^2+a^2}<n+n\varepsilon=n(1+\varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow n^2+a^2<n^2(1+\varepsilon)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2<n^2(1+\varepsilon)^2-n^2=n^2[(1+\varepsilon)^2-1]$$
$$\Leftrightarrow n^2>\frac{a^2}{(1+\varepsilon)^2-1}\Leftrightarrow n>\frac{|a|}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}},$$

故只要取正整数 $N=\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}}\right]+1$,便有当 $n>N$时，

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$$

总成立，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$.

证：任给 $\varepsilon>0$,因为

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n<\varepsilon\Leftrightarrow n\log_2\frac{1}{2}<\log_2\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow n(\log_2 1-\log_2 2)<\log_2\varepsilon\Leftrightarrow n(0-1)<\log_2\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow -n<\log_2\varepsilon\Leftrightarrow n>-\log_2\varepsilon=\log_2\frac{1}{\varepsilon},$$

故只要取正整数 $N=\left[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$,便有当 $n>N$ 时，

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n-0\right|<\varepsilon$$