捷进书系

主编：洪鸣远

中华题王

ZHONGHUA TIWANG

精选好题+方法内化+灵活运用=成功

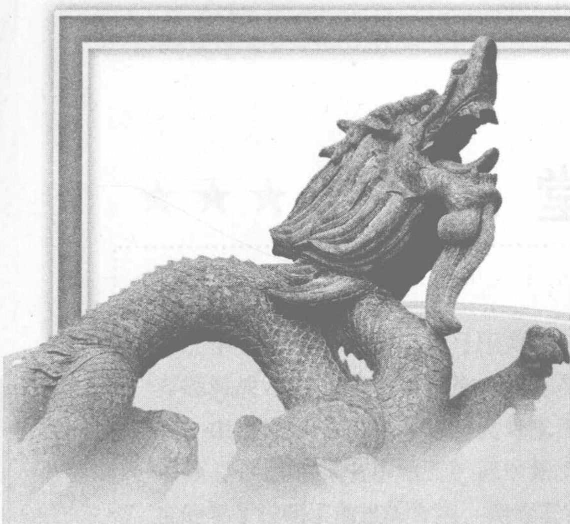
走进课堂，讲练互动

高中数学·必修4

配人教B版

新蕾出版社

捷进书系



中华题王

高中数学·必修4

配人教B版

本册主编：陈永林
安玉宝
本册副主编：王　娜
王季增

新蕾出版社

图书在版编目(CIP)数据

中华题王:人教B版. 数学.4:必修/张伟主编. —天津:
新蕾出版社,2007
ISBN 978-7-5307-4066-8

Ⅰ.中... Ⅱ.张... Ⅲ.数学课—高中—习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第098834号

中华题王·高中数学必修4(配人教B版)

出版发行 新蕾出版社
E-mail:newbuds@public.tpt.tj.cn
http://www.newbuds.com
地　　址 天津市和平区西康路35号(300051)
出 版 人 纪秀荣
电　　话 总编办:(022)23332422
发行部:(022)27221133,27221150
传　　真 (022)23332422
经　　销 全国新华书店
印　　刷 北京市密东印刷有限公司
开　　本 880×1230 1/16
字　　数 283千字
印　　张 11
版　　次 2007年7月第1版第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5307-4066-8
总 定 价 60.00元

★★★ 为课堂添效益 ★★★

★★★★★ Wei Ke Tang Tian Xiao Yi ★★★★★

学生课业负担重，学习压力大，学习效率是决定成绩好坏的关键因素。走出盲动误区，摒弃题海战术，为课堂添效益，向练习要成绩，是您走向成功的最佳选择。

由国家著名教育考试研究专家洪鸣远老师精心策划，由国家级课程改革实验区一线骨干教师倾心打造的《中华题王》高中新课标版脱颖而出。它犹如璀璨的启明星，为在题海中左奔右突的学子指明了前进的方向，拥有了它，就可以傲视天下，引领群雄。

《中华题王》——讲与练双向激活，教与学师生互动

一、丛书特点和功能——同步助学辅导用书

★以例题带动讲解，以思路分析和解后反思串连讲解过程，以对应巩固训练提高思维的效率和正确性。

★左右双栏，讲练对照，左讲右练的互动形式，巩固基础，解决难点问题，提升课堂教学效果。

★走进课堂，师生共用，全程模拟教学过程，有例题有练习，教师选例题，学生做练习。

★互联高中学段知识网络，帮助学生自我构建完整的知识体系.

★配备自我检测方案，定时检测学习效果，帮学生及时查缺补漏.

★依据课改精神，展示考点并选择最近三年的高考样题，使学生在同步学习中零距离体验高考氛围。

二、使用特点提炼——星级指数

★★★☆☆	难度中上，适合全体学生，
★★★★☆	题目新颖，题型全面经典
★★★★★	讲：练=3：7,讲与练的比例适当
★★★★★	配套新课标各版本必、选修教材、人教大纲版高二教材。

三、热卖理由——随讲随练，及时巩固，适用面广，针对性强

★即讲即练，指导解题，及时巩固和提升课堂教学效果。激活学生的思维潜能，深入反思方法和规律。

★荟萃专家智慧，编写理念与新课标一致，体例新颖，师生使用方便。

★课前预习、课堂讲解、随堂练习、课后复习、单元总结，自测水平，触摸高考，全程模拟教学进程。

★重教材，抓基础，重难点，抓方法，激活高品质思维方式。

学科导读图示 ★★★

课前感知——明确学习内容和目标，梳理教材知识点、重点和难点，并解答简单问题。

即讲即练——讲练互动，边学边练，及时巩固课堂效果。

典题例释——对应讲解，选择略高于教材难度的例题，以抓基础和深挖掘为手段，以思路分析、解题步骤、解后反思为串连，揭示解题方法和技巧，反思解题思想和规律。达到巩固知识，提升能力的目标。

随堂练习——右栏练习，选择与左栏知识点、解题方法对应的练习题，巩固基础，解决难点问题。以理清解题思路，掌握方法为目标。左右栏讲练互动，教师可选择适当例题和对应的习题，在课堂之上，边讲边练，及时巩固和检测教学效果。学生也可当堂检测自己对知识的掌握程度。

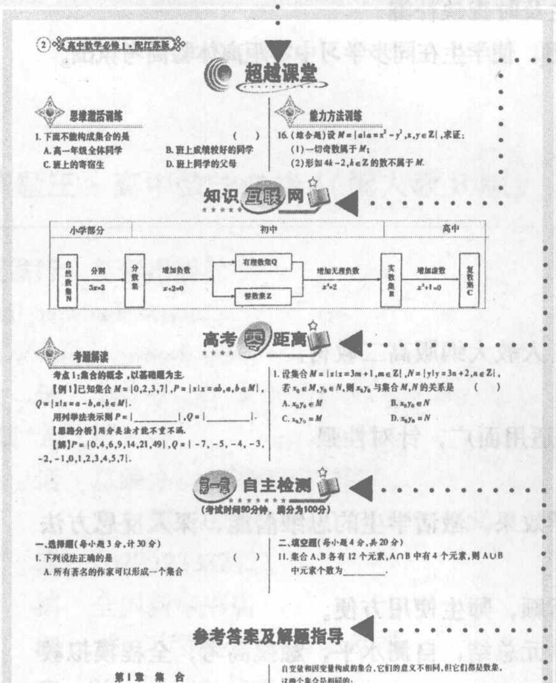
超越课堂——根据学生的认知差异，设计不同层次的课后练习题。“思维激活训练”重在巩固基础。“能力方法训练”侧重突破重难点。

知识互联网——提炼每章的知识网络结构，链接相关知识并形成体系，展示知识间的内在联系，体验所学知识在整个高中学段的地位和价值。

高考零距离——考点左右对应，互动讲练，左栏“考题解读”列举高考的考点和出题档次，配合三年内的高考真题和各地的模拟题，以思路分析和解后反思串连，剖析解题过程。右栏“体验成功”对应左面的考点设置对应性训练题目，深化对解题方法的理解和掌握，同步演练应考技能。

本章自主检测——自我检测本章的学习效果，卷面结构仿照高考题型、题量设置，帮助学生找到差距，查漏补缺。

参考答案及解题指导——呈现标准答案，指导学生如何解题。“理解题目—找到办法—呈现步骤—解后反思”层层深入，帮助学生提高思维品质。



全向激活你的思维潜能　深入反思解题方法和规律

目录

目录

第一章 基本初等函数(Ⅱ)

1.1 任意角的概念与弧度制

1.1.1 角的概念的推广

课前感知

1. 角可以看成是一条射线绕______从一个位置旋转到另一个位置形成的______,射线在旋转时有两个相反的方向,______为正角,______为负角,______为零角.

2. 在画图时,常用带箭头的弧来表示旋转的______和旋转的______旋转生成的角,又常叫做转角.

3. 引入正角、负角的概念后,角的减法可以转化为角的加法运算,即$\alpha-\beta$可化为______,这就是说______.

4. 设α表示任意角,所有与α终边相同的角以及α本身组成一个集合,这个集合可记为$S=$______,集合S的每一个元素都与α的终边相同,当______时对应元素为α.终边相同的角有______个.相等的角终边一定______,但终边相同的角不一定______.

5. 在直角坐标系中讨论角,是使角的顶点与______重合,角的始边与______重合,角的终边在第几象限,就把这个角叫做______,如果终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何象限.

即讲即练

典题例释

【例1】 下列各命题正确的是 ( )

A. 终边相同的角一定相等 B. 第一象限的角都是锐角

C. 锐角都是第一象限角 D. 小于90°的角都是锐角

【思路分析】本题可用各种角的定义,利用排除法予以解答,也可利用角的定义直接判断.

对于A,$-60°$和$300°$是终边相同的角,它们并不相等,则应排除A.

对于B,390°是第一象限角,但它不是锐角,则应排除B.

对于D,$-60°$是小于90°的角,但它不是锐角,则应排除D,综上知,应选C.

另外,因为锐角的集合是$\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$,第一象限角的集合是$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$,当$k=0$时,两集合相等,所以锐角是第一象限角.

【答案】C

【解后反思】要想否定一个命题,只需举出一个反例即可.

【例2】 已知$\alpha=1690°$,

(1)把α改写成$k\cdot 360°+\beta(k\in\mathbf{Z})$,$0°<\beta<360°$的形式;

(2)求θ,使θ与α的终边相同,且$-360°<\theta<360°$,并判断θ属于第几象限.

【思路分析】判断一个角属于第几象限,通常表示为$k\cdot 360°+\beta,k\in\mathbf{Z},0°<\beta<360°$的形式,只要判断$\beta$所在象限即可.

解:(1)$\alpha=4\times 360°+250°$,$k=4$,$\beta=250°$;

(2)θ与α终边相同,$\therefore\ \theta=k\cdot 360°+250°$.由

$-360°<k\cdot 360°+250°<360°,k\in\mathbf{Z}$,解得$k=-1,0$,

$\therefore\ \theta=-110°$或$250°$,属于第三象限.

【解后反思】求符合条件且与已知角终边相同的角,先写出与已知角终边相同的角的一般式,即所求角的通解,再依条件讨论k(即求k的特解).

【例3】 写出终边在$y=-|x|$上的角的集合.

【思路分析】角α终边落在$y=-|x|$上的所有角中的最

随堂练习

1. 已知集合$M=\{$第二象限角$\}$,$N=\{$钝角$\}$,$P=\{$大于90°的角$\}$,则下列关系式中正确的是 ( )

A. $M=N=P$ B. $M\cap P=N$

C. $N\subsetneqq M\cap P$ D. $N\subsetneqq M\subsetneqq P$

2. 已知α是锐角,则2α是 ( )

A. 第一象限角 B. 第二象限角

C. 小于180°的正角 D. 不大于直角的正角

3. 给出下列四个命题:①$-15°$是第四象限角;②185°是第三象限角;③475°是第二象限角;④$-350°$是第一象限角.其中正确的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 如果α是第一象限角,则$-\dfrac{\alpha}{2}$为 ( )

A. 第一、四象限角 B. 第一、二象限角

C. 第二、三象限角 D. 第二、四象限角

5. 若α是第一象限角,则$k\cdot 180°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$的终边所在的象限是 ( )

A. 第一象限 B. 第一、二象限

C. 第一、三象限 D. 第一、四象限

6. 写出与下列各角终边相同的角的集合S,并把S中在$-360°\sim 720°$间的角写出来.

(1)70°;(2)$-530°$.

7. 已知角α的终边与角$-690°$的终边关于y轴对称,求α.

小正角为225°和315°，因而终边落在$y=-|x|$上的角的集合实质上是写出与225°和315°终边相同的所有角的集合.

解：终边落在$y=-|x|$上的角的集合为

$\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+225°$或$\alpha=k\cdot 360°+315°, k\in \mathbf{Z}\}$.

【解后反思】能够将问题转化为“写出与α终边相同的角的集合”是解决问题的关键，转化思想是数学中的一种重要的数学思想，要引起重视.

【例4】 若集合$A=\{\alpha|k\cdot 180°+30°<\alpha<k\cdot 180°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$，集合$B=\{\beta|k\cdot 360°-45°<\beta<k\cdot 360°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$，求$A\cap B$.

【思路分析】利用图形，在直角坐标系中，分别寻找出集合A和集合B中的角的终边所在的区域，终边在这两个区域的公共部分内的角的集合，就是$A\cap B$.

解：如图1-1.1-1，集合A中的角的终边在阴影(Ⅰ)内，集合B中的角的终边在阴影(Ⅱ)内，因此$A\cap B$中的角的终边在阴影(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共部分内，所以$A\cap B=\{\alpha|k\cdot 360°+30°<\alpha<k\cdot 360°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$.

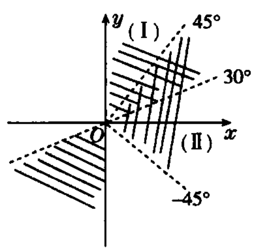


图1-1.1-1

【解后反思】借助于数学式子反映出的几何意义，利用图形的直观来解决问题，是我们解答数学问题的常用方法，即数形结合，要引起足够的重视.

8. 如图1-1.1-2，终边落在阴影部分的角的集合是 ( )

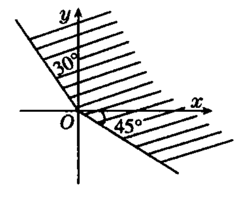


图1-1.1-2

A. $\{\alpha|-45°\leqslant\alpha\leqslant 120°\}$

B. $\{\alpha|120°\leqslant\alpha\leqslant 315°\}$

C. $\{\alpha|k\cdot 360°-45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+120°, k\in \mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|k\cdot 360°+120°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+315°, k\in \mathbf{Z}\}$

9. 集合$M=\{x|x=k\cdot 90°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=k\cdot 45°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$，则 ( )

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$

C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

10. 设集合$A=\{x|x=k\cdot 180°+(-1)^k\cdot 90°, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=k\cdot 360°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$，则集合A、B的关系是 ( )

A. $A\supsetneqq B$　　B. $A\subsetneqq B$

C. $A=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

超越课堂

思维激活训练

1. 与405°角终边相同的角是 ( )

A. $k\cdot 360°-45°, k\in \mathbf{Z}$　　B. $k\cdot 360°-405°, k\in \mathbf{Z}$

C. $k\cdot 360°+45°, k\in \mathbf{Z}$　　D. $k\cdot 180°+45°, k\in \mathbf{Z}$

2. 终边与坐标轴重合的角的集合是 ( )

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$　　B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°, k\in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 90°, k\in \mathbf{Z}\}$　　D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$

3. 射线OA绕端点O逆时针旋转120°到达OB位置，由OB位置顺时针旋转270°到达OC位置，则$\angle AOC=$ ( )

A. 150°　　B. -150°　　C. 390°　　D. -390°

4. 集合$A=\{\alpha|\alpha=k\cdot 90°+54°, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|-180°<\beta<180°\}$则$A\cap B$等于 ( )

A. $\{-36°, 54°\}$　　B. $\{-126°, 144°\}$

C. $\{-126°, -36°, 54°, 144°\}$　　D. $\{-126°, 54°\}$

5. 若α、β的终边互为反向延长线，则有 ( )

A. $\alpha=-\beta$

B. $\alpha=k\cdot 360°+\beta \quad (k\in \mathbf{Z})$

C. $\alpha=180°+\beta$

D. $\alpha=(2k+1)\cdot 180°+\beta(k\in \mathbf{Z})$

6. (易错题)若将时钟拨快5分钟，则时针转了______度，分针转了______度.

7. 自行车大链轮有48齿，小链轮有20齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的角度是______.

8. 已知角β的终边在图1-1.1-3中阴影表示的范围内(不包括边界)，那么$\beta\in$______.

9. 若θ角的终边与168°角的终边相同，求在[0°,360°)内终边与$\frac{\theta}{3}$角的终边相同的角.

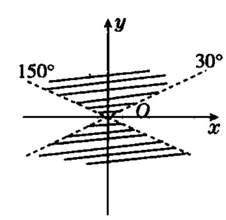


图1-1.1-3

10. 已知集合$A=\{\alpha|\alpha=k\cdot 1350°, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|\beta=k\cdot 150°, -10\leqslant k\leqslant 8\}$，求与$A\cap B$中角终边相同的角的集合S.

11. 已知$0°<\theta<360°$，θ角的7倍角的终边和θ角的终边重合，求角θ.

能力方法训练

12.（综合题）已知 α、β 是锐角，且 $\alpha+\beta$ 的终边与角 $-280°$ 终边相同，$\alpha-\beta$ 的终边与角 $670°$ 的终边相同，求角 α 和 β 的大小.

13.（易错题）若 α 是第二象限角，则 2α 和 $\frac{\alpha}{3}$ 各是第几象限角？

1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算

课前感知

1. ______叫做角度制.

2. ______叫做 1 弧度的角，用弧度作为单位来度量角的单位制叫做______，在弧度制下，1 弧度记作______.

3. 正角的弧度数是一个______，直角的弧度数是一个______，零角的弧度数是______. 在角的集合与实数集 **R** 之间建立了一一对应关系，即每一个角都有惟一的一个______与它对应；反过来，每一个实数也都有惟一的一个______与它对应.

4. $360° =$ ______rad，

$1° =$ ______ $\approx$ ______rad，

$n° =$ ______rad $\approx$ ______rad，

$1\text{rad} =$ ______ $\approx$ ______ $=$ ______，

$\alpha(\text{rad}) =$ ______.

即讲即练

典题例释

【例 1】 下列诸命题中，假命题是 （ ）

A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位.

B. 1 度的角是同角的 $\frac{1}{360}$，一弧度的角是同角的 $\frac{1}{2\pi}$.

C. 根据弧度的定义，$180°$ 一定等于 π 弧数.

D. 不论是用角度制还是用弧度制度量角，它们与圆的半径长短有关.

【思路分析】由角和弧度的概念，可知无论是角度制还是弧度制，角的大小与圆的半径的长短无关，而是与弧长与半径的比值有关.

【答案】D

【解后反思】对于概念类题目，要从定义入手，仔细分析每一句话，并注意与概念叙述的异同点.

【例 2】 圆弧长度等于其内接正三角形边长，则其圆心角的弧度数是 （ ）

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【思路分析】可根据弧度的计算公式进行求解，关键是先求出圆弧的长度，即正三角形的边长，设圆的半径为 r，则其内接正三角形的边长为 $\sqrt{3}r$，则根据 1 弧度角的定义可得 $\theta=\frac{\sqrt{3}r}{r}=\sqrt{3}$ 即所求圆心角的弧度数为 $\sqrt{3}$.

【答案】C

随堂练习

1. 下列诸命题中，真命题是 （ ）

A. 一弧度是一度的圆心角所对的弧.

B. 一弧度是长度为半径的弧.

C. 一弧度是一度的弧与一度的角之和.

D. 一弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角的大小，它是角的一种度量单位.

2. 若两个角的差是 1 弧度，两角和是 1 度，求这两个角.

3. 在半径为 5 cm 的圆中，圆心角为周角的 $\frac{2}{3}$ 的角所对的圆弧长为 （ ）

A. $\frac{4}{3}\pi$ cm B. $\frac{20}{3}\pi$ cm

C. $\frac{10}{3}\pi$ cm D. $\frac{50}{3}\pi$ cm

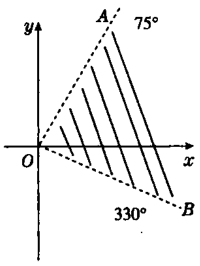
4. 直径 1.4 m 的飞轮，每小时按逆时针方向旋转 24 000 转，求

(1) 飞轮每秒转过的弧度数；

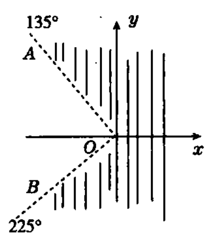
(2) 轮周上一点每 1 s 转过的弧长；

【解后反思】利用弧度数的计算公式求弧度数的关键是求出角所对的弧长.

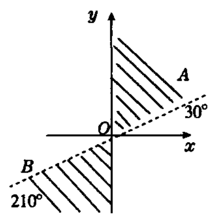
【例3】 用弧度表示顶点在原点，始边重合于 x 轴的非负半轴，终边落在阴影部分内的角的集合(不包括边界).



①图 1－1.2－1



②图 1－1.2－2



③图 1－1.2－3

【思路分析】首先利用弧度制与角度制的关系将有关角化为弧度数，同时在表示所给角的范围时还要注意正角和负角之间的转化.

解:(1)在图①中，以 OB 为终边的角可看成 $-30°$ 化为弧度为 $-\frac{\pi}{6}$,

而 $75°=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{12}\pi$,

$\therefore\{\theta|2k\pi-\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{5}{12}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)在图②中，以 OB 为终边的角 $225°$ 可以看作 $-135°$，化为弧度即 $-\frac{3}{4}\pi$,

而 $135°=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{4}\pi$,

$\therefore\{\theta|2k\pi-\frac{3}{4}\pi<\theta<2k\pi+\frac{3}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)在图③中，$30°=\frac{\pi}{6}$，$210°=\frac{7}{6}\pi$,

$\therefore\{\theta|2k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\theta|2k\pi+\frac{7}{6}<\theta<2k\pi+\frac{3}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$. $\therefore\{\theta|k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

【解后反思】(1)在表示角的集合时，一定要使用统一度量单位，不能混用. (2)在进行区间合并时，一定要做到准确无误.

【例4】 扇形的周长在一定时，它的圆心角 θ 取何值时，才能使该扇形面积 S 最大？最大值是多少？

【思路分析】设扇形面的半径为 R，弧长为 l，则 $l=C-2R$，由 $\theta=\frac{l}{R}$ 知，要求 S 的最大值，只需要求 S 最大时的 R，即需建立 S 关于 R 的函数关系式，将问题转化为求函数的最值.

解:设扇形半径为 R，则扇形的弧长为 $C-2R$,

$\therefore S=\frac{1}{2}(C-2R)\cdot R=-R^2+\frac{C}{2}R$

$=-\left(R-\frac{C}{4}\right)^2+\left(\frac{C}{4}\right)^2$,

$\therefore$ 当 $R=\frac{C}{4}$ 时，即 $\theta=\frac{C-2R}{R}=2$ 时,

扇形有最大面积 $\frac{C^2}{16}$.

【解后反思】研究实际应用问题中的最值问题，往往先将其转化为二次函数的最值问题，这是经常用到的数学思想方法.

(3)轮周上一点转动 2 000°所经过的距离.

5. 已知集合 $A=\{x|k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|4-x^2\geqslant0\}$，求 $A\cap B$.

6. 已知 $\alpha=-800°$，把 α 改写成 $\beta+2k\pi,k\in\mathbf{Z},0\leqslant\beta<2\pi$ 的形式，并指出 α 在第几象限.

7. 扇形 AOB 的周长为 8 cm,

(1)若这个扇形的面积为 3 cm^2，求圆心角的大小.

(2)求这个扇形的面积取得最大值时圆心角的大小和弦长 AB.

超越课堂

思维激活训练

1. 在半径为 10 的圆中，$\frac{4\pi}{3}$的圆心角所对弧长为　　(　　)

A. $\frac{40}{3}\pi$　　B. $\frac{20}{3}\pi$　　C. $\frac{200}{3}\pi$　　D. $\frac{400}{3}\pi$

2. 把 $-1485°$写成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的形式是(　　)

A. $-8\pi+\frac{\pi}{4}$　　B. $-8\pi+\frac{7}{4}\pi$

C. $-10\pi+\frac{\pi}{4}$　　D. $-10\pi+\frac{7}{4}\pi$

3. 一条弦长等于圆的半径，则这条弦所对的圆心角的弧度数是　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. 1　　D. π

4. 在面积不等的圆内，1 弧度的圆心角所对的　　(　　)

A. 弧长相等　　B. 弦长相等

C. 弧长等于所在圆的半径　　D. 弦长等于所在圆的半径

5. $\alpha=-2\text{rad}$，则 α 的终边在　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

6. 集合 $P=\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$则 $P\cap Q$ 等于　　(　　)

A. $\varnothing$

B. $\{x|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi$ 或 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

C. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$

D. $\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

7. 把 $-\frac{107}{6}\pi$ 化成 $k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z},\alpha\in[0°,360°)$ 的形式是______.

8. 半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点，点 P 从 $A(1,0)$ 出发依逆时针方向等速沿圆周旋转，已知点 P 在 1 秒内转过的角为 $\theta(0<\theta<\pi)$，经过 2 秒达到第三象限，经过 14 秒后，恰好回到 A 点，则 θ 的值为______.

9. 如果一个扇形的圆心角为 72°，半径等于 20 cm，则扇形的面积为______.

10. 一条弦的长度等于半径 r，求：

(1)这条弦所对的劣弧长；

(2)这条弦和劣弧所组成的弓形的面积.

能力方法训练

11. (数学建模)如图 1－1.2－4 所示，$\overset{\frown}{AB}$为公路弯道，摩托自 A 驶向 B 和自 B 驶向 A，大约各要行驶多少米？(精确到 1 m，图中长度单位：m).

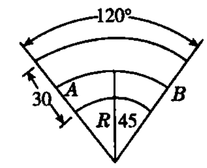


图 1－1.2－4

12. (综合题)已知 $A=\{x|y=\sqrt{36-x^2}\}$，$B=\{\beta|2k\pi-\frac{\pi}{3}<\beta<2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$，

求 $A\cap B,A\cup B$.

13. (创新题)如图，动点 P、Q 从点 $A(4,0)$ 出发沿圆周运动，点 P 按逆时针方向每秒钟转$\frac{\pi}{3}$弧度，点 Q 按顺时针方向每秒钟转$\frac{\pi}{6}$弧度，则 P、Q 第一次相遇时 P、Q 点各自走过的弧度为______，______.

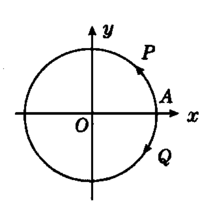


图 1－1.2－5

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 三角函数的定义

课前感知

1. 设 α 是任意角,α 终边上(除去原点)任意一点 $P(x,y)$,P 点到原点 O 的距离是 $r(r=\sqrt{x^2+y^2},r>0)$,那么 $\sin\alpha=$______,$\cos\alpha=$______,$\tan\alpha=$______,$\cot\alpha=$______,$\sec\alpha=$______,$\csc\alpha=$______.

2. 填表:

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	
$\cos\alpha$	
$\tan\alpha$	

3. $\sin\alpha=\frac{y}{r}$,若 $y>0$,则______,若 $y<0$,则______,$\cos\alpha=\frac{x}{r}$,若______,则 $\cos\alpha>0$,若______,则 $\cos\alpha<0$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}$,若______,则 $\tan\alpha>0$,若______,则 $\tan\alpha<0$.

4. 若 $\sin\alpha>0$,则 α 的终边在______,
若 $\cos\alpha>0$,则 α 的终边在______,
若 $\tan\alpha>0$,则 α 的终边在______.

即讲即练

典题例释

【例1】 已知角 θ 终边上一点 $P(x,3)(x\neq0)$,且 $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}x$,求 $\sin\theta,\tan\theta$ 的值.

【思路分析】由正弦、正切函数的定义可求出相关的函数值.

解:$\because\ r=\sqrt{x^2+9},\cos\theta=\frac{x}{r},\therefore\ \frac{\sqrt{10}}{10}x=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

又 $x\neq0,\therefore x=\pm1$.

又 $y=3>0,\therefore\ \theta$ 是第一或第二象限角.

当 θ 为第一象限角时,$\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10},\tan\theta=3$.

当 θ 为第二象限角时,$\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10},\tan\theta=-3$.

【解后反思】若角 α 已经给定,不论点 P 选择在 α 终边上的什么位置,角 α 的三角函数值都是确定的,所以只需知 α 终边上一点的坐标即可根据三角函数的定义,求出角的三角函数值,对于不同象限的角 θ,求其三角函数值时,要分象限讨论.

【例2】 判断下列各式的符号.

(1) $\sin2003°\cdot\cos2004°\cdot\tan2005°$;

(2) $\tan191°-\cos191°$;

(3) $\sin2\cdot\cos3\cdot\tan4$.

【思路分析】角度确定了,所在的象限就确定了,三角函数值的符号也就确定了,因此只需确定角所在的象限,即可进一步确定各式的符号.

解:(1) $\because\ 2003°=5\times360°+203°$,

$2004°=5\times360°+204°$,

$2005°=5\times360°+205°$,都是第三象限角.

随堂练习

1. 若点 $P(-m,\sqrt{3}m)(m<0)$ 在角 α 的终边上,求 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$.

2. 若角 α 的终边落在射线 $y=-3x(x\leqslant0)$ 上,求 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$.

3. 下列各三角函数值:①$\sin1125°$;②$\tan\frac{37}{12}\pi\cdot\sin\frac{37}{12}\pi$;③$\frac{\sin4}{\cot4}$;④$\sin1-\cos1$,其中为负值的个数是 ( )

A. 1个　B. 2个

C. 3个　D. 4个

4. 已知 $\cos\alpha<0,\tan\alpha<0$:

(1)求角 α 的集合;

(2)求角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限;

$\therefore \sin 2003° < 0, \cos 2004° < 0, \tan 2005° > 0.$

$\therefore \sin 2003° \cdot \cos 2004° \cdot \tan 2005° > 0.$

(2)$\because$ 191°是第三象限角,$\therefore \tan 191° > 0.$

$\cos 191° < 0, \therefore \tan 191° - \cos 191° > 0.$

(3)$\because \frac{\pi}{2} < 2 < \pi, \frac{\pi}{2} < 3 < \pi, \pi < 4 < \frac{3}{2}\pi,$

$\therefore$ 2 是第二象限角,3 是第二象限角,4 是第三象限角.

$\therefore \sin 2 > 0, \cos 3 < 0, \tan 4 > 0.$

$\therefore \sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \tan 4 < 0.$

【解后反思】(1)能准确判断角的终边位置是判断该角的三角函数值符号的关键;(2)要熟记三角函数值在各象限的符号规律.

【例 3】 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sin x+\cos x$ (2)$y=\sin x+\tan x$

(3)$y=\frac{\sin x+\cos x}{\tan x}$ (4)$y=\sqrt{\sin x}+\tan x$

【思路分析】利用 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$ 的定义域及函数有意义的条件即可确定角 x 的取值范围.

解:(1)$\because$ 使 $\sin x$、$\cos x$ 有意义的 $x \in \mathbf{R}$,

$\therefore y=\sin x+\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2)要使函数有意义,必须使 $\sin x$、$\tan x$ 有意义,

$\therefore$ 有 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$.

$\therefore$ 函数 $y=\sin x+\tan x$ 的定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

(3)要使函数有意义,必须使 $\tan x$ 有意义即 $\tan x \neq 0$,

$\therefore$ 有 $\begin{cases} x \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$.

$\therefore$ 函数 $y=\frac{\sin x+\cos x}{\tan x}$ 的定义域为

$\{x \mid x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

(4)当 $\sin x \geqslant 0$ 且 $\tan x$ 有意义时,函数有意义

$\therefore$ 有 $\begin{cases} 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, \\ x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$

$\therefore$ 函数 $y=\sqrt{\sin x}+\tan x$ 的定义域为

$\left[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

【解后反思】求函数的定义域就是求使函数有意义的自变量 x 的取值范围,求解时要注意函数如 $\tan x, \sec x, \csc x$ 本身有意义的条件.

(3)试判断 $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, \tan\frac{\alpha}{2}$ 的符号.

5. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{\sin x \cdot \tan x}$;

(2)$y=\lg\sin 2x+\sqrt{9-x^2}$;

(3)$y=\sqrt{\sin(\cos x)}$;

(4)$y=\sqrt{\cos(\sin x)}$.

超越课堂

思维激活训练

1. 角 α 终边上一点 $P(a,a)$($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$),则 $\sin\alpha$ 的值是 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

2. $\alpha=-\frac{5}{2}\pi$,则 $\sin\alpha, \tan\alpha$ 的值分别是 (

A. -1,不存在 B. 1,不存在

C. $-1,0$　　D. $1,0$

3. 已知 θ 满足 $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$ 且 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$，则角 θ 的终边在　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 函数 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{|\tan x|}{\tan x}$ 的值域是　(　　)

A. $\{1,2\}$　B. $\{-2,0,2\}$　C. $\{-2,2\}$　D. $\{0,1,2\}$

5. 下列各式为正号的是　(　　)

A. $\cos2-\sin2$　　B. $\cos2\cdot\sin2$

C. $\tan2\cdot\cos2$　　D. $\sin2\cdot\tan2$

6. 设角 α 属于第二象限且 $|\cos\frac{\alpha}{2}|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 角属于　(　　)

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

7. 已知下列四个命题：

①角 α 终边上一点 $P(x,y)$，则 $\sin\alpha$ 的值随 y 的增大而增大；

②若 α 是第一或第二象限角，则 $\sin\alpha>0$；

③正角的三角函数值为正，负角的三角函数值为负，零角的三角函数值为零；

④若 $\cos A<0$，则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，其中正确的是　(　　)

A. ①④　B. ②④　C. ①②　D. ①②④

8. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A\cdot\cos B\cdot\tan C<0$，则 $\triangle ABC$ 是　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 锐角或钝角三角形

9. $5\sin90°+2\cos0°-3\sin270°+10\cos180°=$______.

10. 已知角 α 终边经过点 $P(5,-12)$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$______.

11. 函数 $y=\frac{\sqrt{\sin x}+\lg\cos x}{\tan x}$ 的定义域为______.

12. 已知角 α 终边经过点 $(3a-9,a+2)$ 且 $\cos\alpha\leq0,\sin\alpha>0$，则 a 的取值范围是______.

13. 已知角 α 的终边上一点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3},y)(y\neq0)$ 且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，求 $\cos\alpha,\tan\alpha$.

14. 已知角 α 的终边与函数 $y=\frac{3}{2}x$ 的图象重合，求 α 的六个三角函数值.

15. 已知 $f(x)=\log_2\sin x+\sqrt{\frac{81}{16}\pi^2-x^2}$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域；

(2)求 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

16. 函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是______.

能力方法训练

17. 角 α 终边上存在一点 $P\left(-\frac{4}{5m},\frac{3}{5m}\right)$ 且 $\frac{\cos\alpha}{\tan\alpha}<0$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$.

18. 解答下列问题：

(1)若 θ 在第四象限，试判断 $\sin(\cos\theta)\cdot\cos(\sin\theta)$ 的符号.

(2)若 $\tan(\cos\theta)\cdot\cot(\sin\theta)>0$，试指出 θ 所在的象限.

1.2.2 单位圆与三角函数线

课前感知

三角函数线

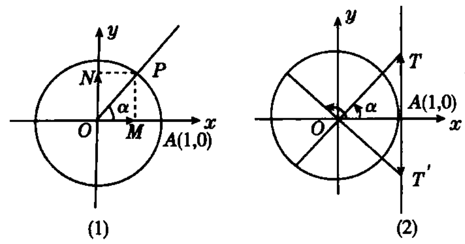


图 1－2.2－1

设角 α 的顶点在单位圆的圆心 O，始边与 x 轴的正半轴重合，终边与单位圆交于点 P，过 P 作 PM 垂直 x 轴于 M，作 PN 垂直 y 轴于 N，则点 M、N 分别是点 P 在 x 轴，y 轴上的______（简称______）. 由三角函数的定义可知，点 P 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 其中 $\cos\alpha=$______，$\sin\alpha=$______.

即角 α 的余弦和正弦分别等于角 α 终边与单位圆交点的______坐标和______坐标，过 A 作与 x 轴垂直的直线与 α 的终边或其反向延长线交于点 $T(T')$ 则 $\tan\alpha=$______，我们把向量______、______、______，分别叫做 α 的正弦线、余弦线、正切线.

即讲即练

典题例释

【例1】 在单位圆中画出适合下列条件的角 α 的终边：

(1) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$；(2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$；(3) $\tan\alpha=2$.

【思路分析】 对于(1)设角 α 终边与单位圆交于 $P(x,y)$ 则 $\sin\alpha=y,\cos\alpha=x$，所以要作出满足 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 的角 α 终边，只要在单位圆上找出纵坐标为 $\frac{2}{3}$ 的点 P，则 OP 即为 α 的终边，对于(2)、(3)可采用类似的方法予以处理.

解：(1)作直线 $y=\frac{2}{3}$ 交单位圆于 P、Q 两点，则 OP 与 OQ 为角 α 的终边，如图 1－2.2－2.

(2)作直线 $x=-\frac{3}{5}$ 交单位圆于 M、N 两点，则 OM、ON 为角 α 的终边，如图 1－2.2－3.

(3)在直线 $x=1$ 上截取 $AT=2$，其中点 A 的坐标为 $(1,0)$. 设直线 OT 与单位圆交于 C、D 两点，则 OC 与 OD 为角 α 的终边. 如图 1－2.2－4.

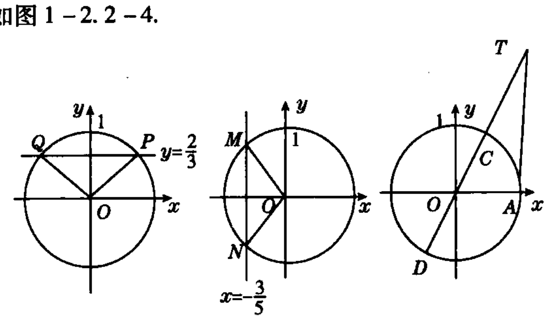


图 1－2.2－2　　图 1－2.2－3　　图 1－2.2－4

【解后反思】 三角函数线可以用来求出满足形如 $f(x)=m$ 的三角函数的角 α 的终边，体现出了数形结合思想解题的优越性.

【例2】 利用单位圆求下列三角函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2\cos x-1}$；(2) $y=\lg(3-4\sin^2x)$.

随堂练习

1. 利用三角函数线求满足下列要求的角 α 的集合：

(1) $\sin\alpha\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$.

2. 利用单位圆中的三角函数线确定满足 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$ 的角 α 的范围.

3. 已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第一象限，在 $[0,2\pi)$ 内求 α 的取值范围.

【思路分析】 首先作出单位圆，然后根据各问题的约束条件，利用三角函数线画出角 α 满足条件的终边范围.

解：(1)如图 1-2.2-5：

$\because\ 2\cos x-1\geqslant 0$，$\therefore\ \cos x\geqslant\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\ x\in\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

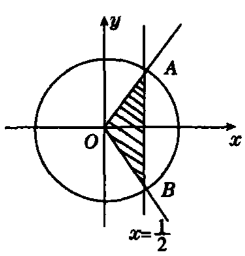
(2)如图 1-2.2-6：

$\because\ 3-4\sin^2x>0$，$\therefore\ \sin^2x<\dfrac{3}{4}$.

$\therefore\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\ x\in\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3},2k\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

即 $x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\quad(k\in\mathbf{Z})$.



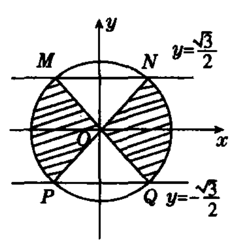


图 1-2.2-5　图 1-2.2-6

【解后反思】 求三角函数定义域的本质是解三角不等式(组)，其步骤与方法是：首先作出单位圆，然后根据约束条件，利用三角函数线画出角 x 所在的区域(可用阴影表示)，然后写出区域角的集合即可.

【例3】 求证：当 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

【思路分析】 利用单位圆解决.

【证明】 如图 1-2.2-7.

设角 α 终边与单位圆交于点 P，单位圆
与 x 轴正半轴交点为 A，过点 A 作圆的切线
交 OP 的延长线于 T，过 P 作 $PM\perp OA$ 于 M，
连结 AP，则

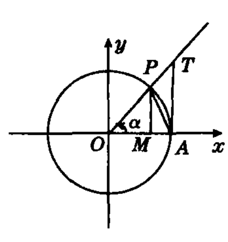


图 1-2.2-7

在 Rt$\triangle POM$ 中：$\sin\alpha=MP$.

在 Rt$\triangle AOT$ 中：$\tan\alpha=AT$.

又根据弧度制的定义，有$\overset{\frown}{AP}=\alpha\cdot OP=\alpha$.

由 $S_{\triangle POA}<S_{扇形POA}<S_{\triangle AOT}$得：

$\dfrac{1}{2}OA\cdot MP<\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AP}\cdot OA<\dfrac{1}{2}OA\cdot AT$.

即：$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

【解后反思】 数形结合是高中数学中常用的数学思想，它要求找到与所要研究的问题相应的几何解释，再由图形的相关性质来解决问题.

4. 试确定满足 $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$的角 x 的取值范围.

5. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求证：$1<\sin\alpha+\cos\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.