扈培础 编著

复变函数教程

科学出版社
www.sciencep.com

复变函数教程

扈培础　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍了复变函数的微积分理论，并强调从实分析的某些内容过渡到复分析的过程中可能出现的新现象及遇到的障碍. 前 7 章为复变函数课程的基本内容，包括复数、复变函数(微积分理论)、全纯函数、调和函数、解析函数、奇点理论和亚纯函数等内容. 第 8 章和第 9 章介绍三个重要的特殊函数：Γ函数、Riemann ζ函数、Weierstrass $\mathscr{P}$ 函数.

本书适合高校数学专业师生及相关专业科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数教程/扈培础编著. —北京：科学出版社，2008
ISBN 978-7-03-022506-1
Ⅰ. 复… Ⅱ. 扈… Ⅲ. 复变函数-教材 Ⅳ. O174.5
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 102850 号

责任编辑：张 扬／责任校对：刘亚琦
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 10 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 10 月第一次印刷 印张：13 3/4
印数：1—3 000 字数：254 000

定价：39.00 元

前 言

本书作为复变函数论的入门教程, 可供对微积分有一定了解的学生使用. 为了加深学生对微积分理论的认识, 作者较详细地介绍了复变函数的微积分理论, 并强调从实分析的某些内容过渡到复分析的过程中可能出现的新现象及遇到的障碍. 本书可以作为高等院校理工科、师范院校等若干专业复变函数课程的教材及科技工程技术人员的参考书.

本书一方面弱化了复变函数论中的一些传统内容, 如 Riemann 面、解析延拓、共形映射、边值问题等, 对 Riemann 映射定理、Schwarz 和 Christoffel (1829~1900) 多角形映射定理、Picard 定理、Dirichlet 问题等不展开讨论. 我们认为这些内容在专题课程中介绍效果会更好. 另一方面, 强化了复变函数论中的一些基本内容, 如最基本的 Cauchy 定理.

第 1 至 7 章为复变函数课程的基本内容, 包括复数、复变函数 (微积分理论)、全纯函数、调和函数、解析函数、奇点理论和亚纯函数等内容. 其中, 我们尝试通过习题尽可能反映复变函数理论自身的发展以及与微分几何和微分方程等学科的联系. 第 8 章和第 9 章可作为本书选择内容供教师或学生参考, 侧重介绍三个重要的特殊函数: Γ 函数、Riemann ζ 函数、Weierstrass $\mathscr{P}$ 函数. 希望通过这三个函数, 读者可对复变函数在数论中的应用有初步了解.

本书是受吴臻教授邀请为山东大学本科生教材改革而作. 作者感谢山东大学数学学院, 特别是刘建亚院长和吴臻副院长在写作过程中所给予的支持和在出版过程中的帮助. 作者感谢香港科技大学数学系在写作过程中提供的帮助; 感谢国家自然科学基金委员会多年的资助; 感谢科学出版社, 特别是张扬编辑为出版此书作出了努力. 杨重骏 (Chung-Chun Yang) 教授曾仔细地阅读原稿并提出了有价值的意见, 仪洪勋教授和杨连中教授审阅了原稿, 我的研究生和 2006 级基地班的学生指出了原稿中的一些缺点, 作者在此表示感谢.

扈培础

2008 年 3 月 3 日

目　录

第1章　复　　数

用 $\mathbb{R}$ 表示所有实数组成的集合, 用 $\mathbb{Q}$ 表示所有有理数组成的集合, 用 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数组成的集合. 用 $\mathbb{R}_+$ 表示所有非负实数的集合, $\mathbb{R}^+$ 表示所有正实数的集合. 符号 $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}^+$有类似的意义. 习惯上也用 $\mathbb{R}_*, \mathbb{Q}_*, \mathbb{Z}_*$ 分别表示元素 0 在 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ 中的余集.

1.1　复　数　域

实数集合 $\mathbb{R}$ 是一个**域**, 也就是说, 在 $\mathbb{R}$ 中定义了加法运算和乘法运算, 它们满足交换律、结合律和分配律. 数 0 及 1 分别是加法及乘法运算中的单位元素, 意即所有的 $x \in \mathbb{R}$ 满足

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x.$$

其次, 定义减法的方程 $b + x = a$ 恒有一个解 x, 而定义除法的方程 $bx = a$, 只要 $b \neq 0$, 也总有一个解 x.

1.1.1　代数运算

用任意实数 x, y 及**虚数单位** i 表示为 $x + \mathrm{i}y$ 这种形式的数称为**复数**(Gauss, 1777~1855, 著作《算术研究》), 通常以 $\mathbb{C}$ 表示复数的全体. 在 16 世纪时, 这样的数称为**虚数**, Cardano (1501~1576, 著作《大衍术》)开始用于解代数方程 (1545). 记号 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 是 Euler(1707~1783) 开始使用的 (1777).

在两个复数 $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$ 之间有 $z = w$ 当且仅当 $x = u, y = v$. 复数的加法、减法、乘法和除法运算分别定义如下:

$$z + w = (x + u) + \mathrm{i}(y + v),$$

$$z - w = (x - u) + \mathrm{i}(y - v),$$

$$zw = (xu - yv) + \mathrm{i}(xv + yu),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \mathrm{i}\frac{yu - xv}{u^2 + v^2},$$

当然, 在除法定义中假定了 $u^2 + v^2 \neq 0$. 特别地, 有

$$-w = (-u) + \mathrm{i}(-v) := -u - \mathrm{i}v,$$

$$\frac{1}{w}=\frac{u}{u^2+v^2}-\mathrm{i}\frac{v}{u^2+v^2}.$$

容易验证复数集合 $\mathbb{C}$ 关于加法和乘法的交换律、结合律和分配律成立, 并构成以 $0=0+\mathrm{i}0$ 为加法的单位元 (通常称为**零元**), 以 $1=1+\mathrm{i}0$ 为乘法的**单位元**的域.

若令实数 x 对应复数 $x+\mathrm{i}0$, 则实数的运算和复数的运算是一致的. 今后将 x 和 $x+\mathrm{i}0$ 看成是相同的, $\mathbb{R}$ 看成是 $\mathbb{C}$ 的子集. 同样地, 今后将 $0+\mathrm{i}1$ 简单地表示为 i. 由上述定义知

$$\mathrm{i}^2=-1.$$

所以方程 $z^2+1=0$ 在 $\mathbb{C}$ 内有根. 事实上, 对于 $\mathbb{C}$ 内的每个 z, 有

$$z^2+1=(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i}).$$

更一般地, 如果 z 和 w 是复数, 我们得到

$$z^2+w^2=(z+\mathrm{i}w)(z-\mathrm{i}w).$$

又因为

$$z=x+\mathrm{i}y=(x+\mathrm{i}0)+(y+\mathrm{i}0)(0+\mathrm{i}1),$$

故 $x+\mathrm{i}y$ 不只是记号, 也可以看成是 $\mathbb{C}$ 中元素的运算的结果. 在复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 中, x 称为 z 的**实部**, 以 $\mathrm{Re}(z)$表示或简写 $\mathrm{Re}\,z$; y 称为 z 的**虚部**, 以 $\mathrm{Im}(z)$表示或简写 $\mathrm{Im}\,z$. 非实数的复数称为**虚数**, 特别是, 复数 z 称为**纯虚数**当且仅当 $\mathrm{Re}(z)=0$; 复数 z 是**实数**当且仅当 $\mathrm{Im}(z)=0$. 零是同时可看作实数与纯虚数的唯一数.

习　题

1. 求下列复数的值:

$$\left(\frac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right)^2,\quad (1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n.$$

2. 设 $z=x+\mathrm{i}y$ $(x,y\in\mathbb{R})$, 求下列复数的实部和虚部:

$$\frac{1}{z},\quad z^3,\quad \frac{z+1}{z-1}.$$

1.1.2　共轭复数

在推出复数加法与复数乘法的法则的过程中, 只用到一个事实, 即 $\mathrm{i}^2=-1$. 由于 $-\mathrm{i}$ 有同样的性质, 因此, 如将复数定义中的 i 换成 $-\mathrm{i}$, 则原来的一切规则仍保持有效, 这可通过直接验证来证明. 将复数 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ 对应于形若 $x-\mathrm{i}y$ 的复数的变换称为**复共轭**, 而 $x-\mathrm{i}y$ 称为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**, 记为 $\bar{z}$. 明显地, 共轭变换是一种**对合变换**, 这就是说 $\bar{\bar{z}}=z$.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部 x 和虚部 y 可用 z 及其共轭复数 $\bar{z}$ 表示为

$$x=\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

因此, 一个复数 z 是实数当且仅当 $\bar{z}=z$. 另外, 也有基本公式

$$z\bar{z}=x^2+y^2\geqslant 0.$$

既然将复数定义中的 i 换成 $-$i 仍保持原有的一切规则, 那么有共轭变换的基本性质:

$$\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w},\quad \overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}.$$

由此可推出差与商的对应性质: 如果 $w+X=z$, $wY=z$, 则

$$\bar{z}=\bar{w}+\bar{X},\quad \bar{z}=\bar{w}\bar{Y},$$

因此

$$\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w},\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

例 1.1 考虑复数系数的方程

$$a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n=0.$$

设 α 是这个方程的一个根, 则 $\bar{\alpha}$ 必是方程

$$\bar{a}_0+\bar{a}_1z+\cdots+\bar{a}_nz^n=0$$

的一个根. 特别地, 若方程的系数都是实数, 则 α 和 $\bar{\alpha}$ 必是同一方程的根.

习 题

1. 试用 $z=x+\mathrm{i}y$ 与 $z=x-\mathrm{i}y$ 分别计算 $z/(z+1)$, 从而证明所得结果是共轭的.
2. 设 $z=z_1+z_2+\cdots+z_n$, $w=w_1w_2\cdots w_n$. 利用归纳法证明:

$$\bar{z}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_n,\quad \bar{w}=\bar{w}_1\bar{w}_2\cdots\bar{w}_n.$$

3. 设 $R(z)$ 是 z 的有理函数, 如果 $R(z)$ 的所有系数是实数, 则 $\overline{R(z)}=R(\bar{z})$.
4. 给定实数 a,b,c,d 使得下面方程有一个实根:

$$z^2+2(a+\mathrm{i}b)z+(c+\mathrm{i}d)=0.$$

证明: $d^2-4abd+4b^2c=0$.

5. 给定实数 a,b,c,d 使得下面方程有一个纯虚数根:

$$z^3+3(a+\mathrm{i}b)z+(c+\mathrm{i}d)=0.$$

证明: $c^3-27ab^2c-27b^3d=0$.

1.1.3　绝对值(模)

给定复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 定义一个非负实数

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.1}$$

明显地, 有等式 $|\bar{z}|=|z|$ 和如下不等式:

$$\max\{|x|,|y|\}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.2}$$

性质 1.1　由式 (1.1) 定义的对应 $|\cdot|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+$ 是一个绝对值, 也就是说, 它满足下列性质:

(1) $|z|=0$ 当且仅当 $z=0$;

(2) $|zw|=|z||w|$ 对所有 $z,w\in\mathbb{C}$ 成立;

(3) $|z+w|\leqslant|z|+|w|$ 对所有 $z,w\in\mathbb{C}$ 成立.

证明　性质 (1) 显然. 下面证明性质 (2). 注意

$$|zw|^2=zw\overline{zw}=z\bar{z}w\bar{w}=|z|^2|w|^2$$

及绝对值不为负数, 故得到性质 (2). 至于性质 (3), 首先有

$$|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=z\bar{z}+(z\bar{w}+w\bar{z})+w\bar{w}$$

或

$$|z+w|^2=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w})+|w|^2. \tag{1.3}$$

既然

$$\mathrm{Re}(z\bar{w})\leqslant|z\bar{w}|=|z||w|,$$

那么式 (1.3) 产生

$$|z+w|^2\leqslant(|z|+|w|)^2,$$

从而得到性质 (3). □

若将 $\mathbb{C}$ 看作复数域上的向量空间, 满足上面性质的对应 $|\cdot|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+$ 也称为向量空间 $\mathbb{C}$ 的一个**模**. 以后不再区分 $\mathbb{C}$ 上的模与绝对值的概念. 既然商 $Y=z/w$ $(w\neq0)$ 满足关系 $wY=z$, 因此 $|w||Y|=|z|$, 或

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}.$$

从式 (1.3) 容易得到

$$|z-w|^2=|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{w})+|w|^2. \tag{1.4}$$

此式产生不等式

$$|z-w|^2 \geqslant |z|^2 - 2|z||w| + |w|^2,$$

进一步得到

$$|z-w| \geqslant ||z| - |w||. \tag{1.5}$$

将式 (1.3) 与式 (1.4) 相加, 得到恒等式

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2). \tag{1.6}$$

例 1.2 应用归纳法可将性质 (2) 推广至任意有限个复数的积:

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|,$$

也可将性质 (3) 推广至任意有限个复数的和:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|. \tag{1.7}$$

习 题

1. 求下面复数的绝对值:

$$-3\mathrm{i}(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})(1+4\mathrm{i}), \quad \frac{(2+4\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(4-\mathrm{i})}.$$

2. 假设 $|a| < 1$. 如果 $|z| \leqslant 1$, 求证

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leqslant 1.$$

证明: 仅当 $|z| = 1$ 时, 上面不等式中等号成立.

3. 给定复数 $a_k, b_k (k = 1, 2, \cdots, n)$, 证明 **Cauchy**(1789~1857)不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$

(提示: 研究和式 $\sum |a_k - \lambda \bar{b}_k|^2$ 并选取适当的复数 λ)

4. 证明复数 z 满足

$$|z-a| + |z+a| = 2$$

的充分必要条件是 $|a| \leqslant 1$. 如果这一条件满足, 则 $|z|$ 的最大值和最小值是什么?

1.2 复数的几何表示

借助平面给予复数的加法和乘法运算直观的解释, 并介绍无穷远点的概念.

1.2.1 复平面

对于某平面 Π 上一个给定的直角坐标系 XOY 来说, Π 上的任一点 P 可由一对实数 (x,y)(称为点 P 的坐标) 唯一确定, 这样一来, 平面 Π 与全体实数对的集合

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

有一个一一对应, 在此对应下, 通常恒同点 P 与它的坐标 (x,y), 这时, 坐标为 $(0,0)$ 的点是平面 Π 的原点 O. 在这个坐标系下, 恒同 Π 与 $\mathbb{R}^2$. 在通常的代数结构与拓扑下, $\mathbb{R}^2$ 称为二维欧几里得 (Euclid, 著作《几何原本》) 空间.

在平面 Π 上给定的直角坐标系下, 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用坐标为 (x,y) 的点 P 来表示, 并且常把**复数** z 叫做**点** z, 特别地, 复数 (或点)0 恰是平面 Π 的原点 O. 第一个坐标轴 (X 轴) 称为**实轴**, 第二个坐标轴 (Y 轴) 称为**虚轴**. 两轴所在的平面称为**复数平面**, 或者简称为**复平面**, 或 **Gauss 平面**. 在复数平面上, 当以 z 和 w 表示其变量时, 相应地称为 z **平面**, w **平面**. 通常我们将复数域 $\mathbb{C}$ 与复数平面恒同. 点 z 及其共轭复数 $\bar{z}$ 对称地位于实轴的两边. 点 z 关于虚轴的对称点是 $-\bar{z}$. 四个点 z, $-\bar{z}$, $-z$, $\bar{z}$ 是一矩形的四个顶点, 两坐标轴是这一矩形的对称轴.

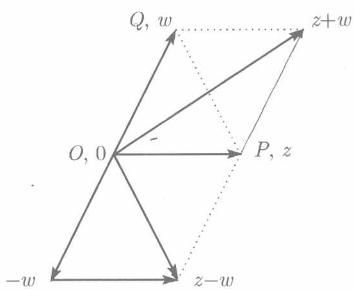

图 1.1 复数加法

复数的加法可以解释为**矢量加法**. 若复数 z 对应平面 Π 上的点为 P, 则 z 对应一个矢量 $\overrightarrow{OP}$. 如果另一个复数 w 对应平面 Π 上的点为 Q, 从而对应的矢量是 $\overrightarrow{OQ}$, 像通常一样, 任何一个矢量作平行移动后所得的矢量都视为与原矢量恒等, 那么 $z+w$ 对应的矢量恰是 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$, 也就是说, 复数和 $z+w$ 可通过 z 及 w 对应的矢量的**平行四边形法则**来得到 (图 1.1).

由于 $-w$ 对应矢量 $-\overrightarrow{OQ}$, 而且 $z-w=z+(-w)$, 可以仿照 $z+w$ 的情形作出 $z-w$(图 1.1). 显然, 复数相减与矢量相减的法则也一致.

矢量表示的另一个优点就是矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的长等于 $|z|$. 因此点 z 与 w 之间的距离为 $|z-w|$. 在这个意义上, **三角不等式**

$$|z+w|\leqslant|z|+|w|$$

及恒等式 (1.6) 就成为熟知的几何定理了.

习 题

1. 求证一直线的方程为 $a z+\bar{a}\bar{z}+b=0$, 此处 a 为非零复数, b 为实数. 从此推出三点 z_1, z_2, z_3 共线的条件, 并证明三点 $1+4\mathrm{i}$, $2+7\mathrm{i}$, $3+10\mathrm{i}$ 共线.

2. 设 $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$ 是固定的. 对于每个可能选取的 a 和 c, 试画出满足条件

$$|z-a|-|z+a|=2c$$

的点集. 当 a 是任意复数时, 上述方程的点的轨迹如何?

1.2.2 三角表示

从**极坐标**(图 1.2)开始讨论. 假设平面 Π 上任一非原点的点 $P(x,y)$ 的极坐标是 (r,θ), 这里 r 是 O 与 P 两点的距离, θ 是实轴正向逆时针方向转到矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角, 故可假设为 $0 \leqslant \theta < 2\pi$, 那么

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

得到对应点 (x,y) 的复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的**极坐标表示**:

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

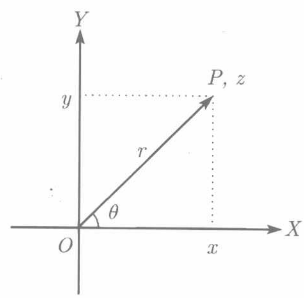

图 1.2 极坐标

在这个极坐标表示中, $r = |z| > 0$, 极角 θ 与 2π 任一整数倍的和都记为

$$\mathrm{Arg}(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

或简写为 $\mathrm{Arg}\, z$, 并称为复数 z 的**辐角**. 这样, 复数 z 的极坐标表示立刻产生它的**三角表示**:

$$z = |z|\,(\cos \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{i}\sin \mathrm{Arg}\, z)\,. \tag{1.8}$$

根据定义可以看到, 每一个非零复数的辐角对应无穷多个值, 它们彼此相差 2π 的整数倍. 首先注意 $\mathrm{Arg}\, z$ 对于 $z = 0$ 是没有定义的. 当 $z \neq 0$, $\mathrm{Arg}\, z$ 中有唯一的一个值 α 满足条件 $-\pi < \alpha \leqslant \pi$, 称为 z 的**辐角主值**, 记作 $\arg(z)$ 或 $\arg z$. 事实上, 使用上面的记号, 有

$$\arg(z) = \begin{cases} \theta, & \mathrm{Im}(z) \geqslant 0, \\ \theta - 2\pi, & \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

同时, 有关系式

$$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.10}$$

将辐角与反正切比较. 熟知正切满足

$$\tan\arg z = \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

所以反正切为

$$\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x} = \arg z + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

这样, $\arg z$ 恰恰对应反正切的主值:

$$\arctan\frac{y}{x}=\arg z,\quad x>0. \tag{1.12}$$

给定两个非零复数 z 和 w, 设它们的三角表示为

$$z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi).$$

$$w=R(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi).$$

那么 z 与 w 的积为

$$\begin{aligned}zw=rR\{&(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)\\&+\mathrm{i}(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi)\}.\end{aligned}$$

根据余弦及正弦的加法定理

$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\psi)&=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi,\\\sin(\varphi+\psi)&=\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi,\end{aligned}$$

得到乘积 zw 的三角表示:

$$zw=rR\{\cos(\varphi+\psi)+\mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)\}. \tag{1.13}$$

由此可知乘积 zw 的模为 rR, 辐角为 $\varphi+\psi$. 后面这一结果是新的, 可用下式表示:

$$\mathrm{Arg}(zw)=\mathrm{Arg}\ z+\mathrm{Arg}\ w. \tag{1.14}$$

在除法的情况下, (1.14) 变为

$$\mathrm{Arg}\frac{z}{w}=\mathrm{Arg}\ z-\mathrm{Arg}\ w. \tag{1.15}$$

例 1.3　式 (1.13) 可推广到任意多个因子的积, 特别地, z 的幂为

$$z^n=r^n\{\cos(n\varphi)+\mathrm{i}\sin(n\varphi)\}. \tag{1.16}$$

这一公式在 $n=0$ 时显然成立, 而由于

$$z^{-1}=r^{-1}(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)=r^{-1}\{\cos(-\varphi)+\mathrm{i}\sin(-\varphi)\},$$

故知当 n 为负整数时, 式 (1.16) 仍成立.

当 $r=1$ 时, 式 (1.16) 产生**de Moivre 公式**:

$$(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+\mathrm{i}\sin(n\varphi). \tag{1.17}$$

这一公式提供了将 $\cos(n\varphi)$ 和 $\sin(n\varphi)$ 用 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 表示的最简单方法. 例如,

$$\cos(2\varphi)=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi,\quad \sin(2\varphi)=2\sin\varphi\cos\varphi.$$