21世纪

高等学校应用型规划教材

# 经济应用数学基础

王敬修　主编

化学工业出版社

21世纪高等学校应用型规划教材

# 经济应用数学基础

王敬修　主编

化学工业出版社

·北京·

本书以教育部颁布的经济和管理类《经济数学基础课程教学基本要求》为依据，遵循“以应用为目的”，“以必需、够用为度”的原则，注重概念，重视应用。充分考虑到“微积分”学科本身的科学性，本书按照认识规律，以几何直观、物理背景和经济中典型问题，作为引入“一元函数微积分”和“线性代数”中数学概念的切入点，系统讲述了基本概念、基本理论和基本运算方法，注意揭示概念的本质含义和概念之间的内在联系；对内容阐述详细、说理透彻、富有启发性；典型例题分析给学生获得解题充分训练的平台。教材中配有练习，书后附有参考答案。

本书适合应用型本科院校、高职高专院校、成人高等院校的经济类、管理类专业的学生使用。

**图书在版编目（CIP）数据**

经济应用数学基础/王敬修主编．—北京：化学工业出版社，2008.7
21世纪高等学校应用型规划教材
ISBN 978-7-122-03440-3

Ⅰ．经…　Ⅱ．王…　Ⅲ．经济数学-高等学校-教材
Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第113962号

责任编辑：唐旭华　叶晶磊　　　装帧设计：风行书装
责任校对：宋　夏

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：化学工业出版社印刷厂
720mm×1000mm　1/16　印张10¾　字数218千字　2008年10月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：19.00元

# 《经济应用数学基础》编写人员

**主　　编**　王敬修

**编写人员**（以姓氏笔画为序）

牛玉玲　何　云　张　欣　陈凡红　薛　威

# 前　言

为了适应应用型院校开设的公共管理、法律、旅游、广告、英语等专业的教学需要，设置少学时的高等数学课程。我们依照教育部颁布的有关经济和管理类《经济数学基础课程教学基本要求》，编写了适应大专水平的教材。

本书编写过程中，遵循“以应用为目的”、“以必需、够用为度”的原则，注重概念，重视应用。我们又考虑到本门课程的概念性强，比较抽象，学生在学习上有一定困难，本书添写了初等数学预备知识，对“微积分”、“线性代数初步”则充分考虑学科本身的科学性，慎重选择其基本内容，较系统地讲述了基本概念、理论、基本运算方法，高度重视理论的应用。

本书按照认识规律，以几何直观、物理背景和经济中典型问题，作为引入数学概念的切入点，注意揭示概念的本质含义和概念之间的内在联系；对内容阐述详细、说理透彻、富有启发性；典型例题分析使学生获得解题充分训练的平台。建议教学时数为70～80学时左右。

通过本课程的教学，使学生逐步培养对事物抽象的概括能力、分析问题和解决问题的能力。

本书编写过程中，得到程源教授的热情支持和关心，借此机会特致衷心感谢。

编者深知写好一本合适教材的艰难，需要教学经验积累，因此恳请各位同仁和读者对书中的错误和缺点不吝赐教，以便今后再版时加以修正。

编　者

2008年5月于樱花园

# 目　录

# 预备知识

*数学是科学的大门和钥匙。*

——培根（R. Bacon）

为了学习高等数学，需要初等数学的知识。因此，本课程安排这部分内容，其目的有两个，一是“复习”，二是“提高”。其内容有集合、数理逻辑用语、实数、不等式、绝对值、代数式变形、指数、对数、数列求和、三角公式等数学基础知识。除此外，还介绍邻域、区域（间）等。

上述编排的内容，可针对学生的实际情况，可自主选择，有的放矢地实施教学。

## 第一节　集合及其运算

### 一、集合

集合是不能精确定义的基本概念。一般地说，把具有确定对象汇集到一起，组成一个整体；或把具有某种属性的事物看做一个整体，就叫做集合。而这些对象（事物）就是这个集合的元素。例如：

（1）太阳系的所有行星构成一个集合，每个行星都是这个集合的元素。

（2）自然数的全体构成一个集合，每个自然数都是这个集合的元素。

（3）所有代数式构成一个集合，其中任一代数式都是这个集合的一个元素。

一个集合，通常用英文大写字母 $A$，$B$，$C$，…等表示，它的元素通常用小写字母 $a$，$b$，$c$，…等表示。

如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 属于 $A$，记作 $a \in A$，读作 $a$ 属于 $A$。

集合有时也简称为集。

在数学中常用到的一些数集：

非负整数全体构成的集合，叫做自然数集，记作 $\mathbf{N}$。

在自然数集内排除 0 的集合，记作 $\mathbf{N}_+$。

整数全体构成的集合，叫做整数集，记作 $\mathbf{Z}$。

有理数全体构成的集合，叫做有理数集，记作 $\mathbf{Q}$。

实数全体构成的集合，叫做实数集，记作 $\mathbf{R}$。

含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集。

不含任何元素的集合，叫做空集，记作 $\varnothing$。

**二、集合的表示方法**

1. 列举法

当集合元素不多时，常常把集合的元素一一列举出来，写在大括号内表示这个集合，这种表示集合的方法叫做列举法。

例如，由 1,2,3,4,5 这 5 个数组成的集合，可表示为 $\{1,2,3,4,5\}$

又如，中国四大发明构成的集合，可以表示为

{指南针,造纸,活字印刷,火药}

自然数集 $\mathbf{N}$ 可表示为

$\{0,1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$，其中 $n$ 是自然数。

2. 性质描述法

集合 $A$ 的任一元素 $x$ 都具有性质 $P(x)$ 描述为 $\{x\in I\mid P(x)\}$。

这就是说，给定 $x$ 的取值集合 $I$，如果属于集合 $A$ 的任一元素 $x$ 都具有性质 $P(x)$，而不属于集合 $A$ 的元素都不具有性质 $P(x)$，则性质 $P(x)$ 叫做集合 $A$ 的特征性质。

例如，集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-1=0\}$ 的特征性质是

$$x^2-1=0$$

在实数范围内，集合 $A$ 的所有元素都满足方程 $x^2-1=0$，满足方程 $x^2-1=0$ 的实数也都在集合 $A$ 内。

又如 (1) {正偶数} 或 $\{x\mid x$能被 2 整除，且大于 $0\}$；

(2) {平行四边形} 或 $\{x\mid x$是两组对边分别平行的四边形$\}$

注：一个集合的特征性质不是唯一的。例如，{北京市} 或 {中华人民共和国首都} 或 $\{x\mid x$是中国具有明、清两代故宫的城市$\}$。

**三、集合之间的关系**

1. 子集

如果集合 $A$ 的任一个元素都是集合 $B$ 的元素，那么集合 $A$ 叫做集合 $B$ 的子集，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$。

2. 集合的相等

如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；反之，如果 $A=B$，则 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$。

**四、集合的运算**

1. 交集

对于两个给定的集合 $A$、$B$，由属于 $A$ 又属于 $B$ 的所有元素所构成的集合，叫做 $A$、$B$ 的交集，记作 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$。

**【例 1】** 设 $A=\{$奇数$\}$，$B=\{$偶数$\}$，$\mathbf{Z}=\{$整数$\}$，求 $A\cap\mathbf{Z}$，$B\cap\mathbf{Z}$，$A\cap B$。

**解**

$$A\cap\mathbf{Z}=\{\text{奇数}\}\cap\{\text{整数}\}=\{\text{奇数}\}=A$$

$$B\cap\mathbf{Z}=\{\text{偶数}\}\cap\{\text{整数}\}=\{\text{偶数}\}=B$$

$$A\cap B=\{\text{奇数}\}\cap\{\text{偶数}\}=\varnothing$$

**【例 2】** 已知 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}, B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$。

**解** $A\cap B=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$

$=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{smallmatrix}4x+y=6\\3x+2y=7\end{smallmatrix}\right\}=\{(1,2)\}$

2. 并集

对于两个给定的集合 $A$、$B$，把它们所有的元素并在一起所构成的集合，叫做 $A$ 与 $B$ 的并集，记作 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$。

**【例 3】** 已知 $\mathbf{Q}=\{x\mid x\text{是有理数}\}$，$\mathbf{Z}=\{x\mid x\text{ 是整数}\}$，求 $\mathbf{Q}\cup\mathbf{Z}$。

**解** $\mathbf{Q}\cup\mathbf{Z}=\{x\mid x\text{ 是有理数}\}\cup\{x\mid x\text{ 是整数}\}=\{x\mid x\text{ 是有理数}\}=\mathbf{Q}$

3. 差集

设 $A$、$B$ 两个集合，由 $A$ 中不属于 $B$ 的元素组成的集合，称 $A$ 与 $B$ 的差集，记为 $A-B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$。

如，$\mathbf{Z}-\mathbf{N}=\{0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots\}$；

又如，$\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 就是由所有无理数组成的集合；

若 $A\subset B$，则 $A-B=\varnothing$。

4. 集合运算法则

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

## 第二节 数理逻辑用语

### 一、命题与量词

能够判断真假的句子叫做命题。例如：

① $5>3$；(真)　　② $2+5=6$。(假)

一个命题非真即假，不可能既真又假。不能判断真假的句子不是命题，例如：

① 祝你健康！② 你会说英语吗？③你快离开这里！④$x-1=0$。

其中，①是感叹句，②是疑问句，③是祈使句，④是一个含变数的等式。因不知 $x$ 代表什么数，无法判别真假，如当 $x=1$ 时，等式为真；当 $x=-1$ 时，等式为假。

在④中含有变量的式子，在数学中是最常见的，这种含有变量的语句，常称为开句或条件命题。在开句前，加上量词，往往就可使开句变为可判断真假的命题。例如：

存在一个数 $x$，使 $x-1=0$

就是一个真命题。

对任意实数 $x$，都有 $x-1=0$

则是假命题。

## 二、命题连接词

一些命题可用连接词把它们连接起来，构成一个新命题。常用的连接词有，“且”、“或”、“非”、“如果…那么…”等。下面分别说明这几个连接词在数学中的意义。

1. 且

设命题

$p$：12 能被 3 整除；$q$：12 能被 4 整除。

用“且”连接，可得新命题

12 能被 3 整除，且能被 4 整除。

一般地，设 $p$、$q$ 是两个命题，则“$p$”且“$q$”构成一个新命题，记作 $p\wedge q$。

如表 0-1 所示，我们可由 $p$、$q$ 的真假，判定 $p$ 且 $q$ 的真假。

表 0-1

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 |
| 假 | 真 | 假 |
| 真 | 假 | 假 |
| 假 | 假 | 假 |

这就是说，只有当 $p$ 和 $q$ 都是真命题时，$p\wedge q$ 才是真命题；如果 $p$ 和 $q$ 中有一个是假命题，那么 $p\wedge q$ 就是假命题，这叫 $p\wedge q$ 的真值表。

2. 或

设命题

$$p:5>3$$
$$q:5=3$$

用“或”连接，可得新命题

$$5>3 \text{ 或 } 5=3$$

通常记作 $5\geqslant 3$

一般地，设 $p$、$q$ 是两个命题，则“$p$”或“$q$”构成一个新命题，记作 $p\vee q$

如表 0-2 所示，我们可由 $p$、$q$ 的真假，判定 $p$ 或 $q$ 的真假。

表 0-2

| $p$ | $q$ | $p\vee q$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 |
| 真 | 假 | 真 |
| 假 | 真 | 真 |
| 假 | 假 | 假 |

如 $p$：明天刮风；$q$：明天下雨。

用“或”连接，则构成一个新命题

明天刮风或下雨。

由此可知，只有当明天既不刮风，又不下雨时，才是假命题。

3. 非（或否定）

设 $p$ 是一个命题，则命题 $p$ 的非（或否定）构成一个新命题。

记作 $\neg p$

如表 0-3 所示，我们可由 $p$ 的真假判定 $\neg p$ 的真假，叫 $\neg p$ 真值表。

**表 0-3**

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 真 | 假 |
| 假 | 真 |

如　明天刮风或下雨；它的非是：明天不刮风且不下雨。

又如　明天刮风，且下雨；它的非是：明天不刮风或不下雨。

4. “如果…，则（那么）…”

设 $p$、$q$ 是两个命题，用“如果…，则（那么）…”连接这两个命题，可得一个新的命题

如果 $p$，则 $q$，记作 $p\Rightarrow q$（$p$ 蕴含 $q$）

其中 $p$ 称为命题 $p\Rightarrow q$ 的条件，$q$ 称为命题 $p\Rightarrow q$ 的结论。

如表 0-4 所示，由 $p$、$q$ 的真假值，来判断 $p\Rightarrow q$ 的真假值。

**表 0-4**

| $p$ | $q$ | $p\Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 |
| 真 | 假 | 假 |
| 假 | 真 | 真 |
| 假 | 假 | 真 |

在 $p\Rightarrow q$ 的真值表中，其他三行的规定是否有道理呢？

在第二行，如果条件是真，结论是假。因为真的不可能蕴含假的，所以把真的蕴含假的规定为假命题应该是合理的。在一般的推理过程中，如果前提是假的，后果是真是假也就不是那么重要了。所以我们不妨把假的蕴含真的或假的蕴含假的都规定为真命题。后两行的规定，是在数理逻辑学中为了便于命题演算，而作的一种约定，这种约定也有一定的道理。在生活和科学语言中，假的蕴含假的还是经常使用的，例如“如果地球没有引力，则悬空的苹果就不会落地。”应该是正确的命题。

又如，(1) 如果猫喜欢捉老鼠，那么鱼喜欢在陆地上走。(假)

(2) 如果 $2=3$，那么 $5=5$。(真)

(3) 如果 $2\neq 3$，那么 $3\neq 5$。(真)

总之，如果用上述 4 个命题连接词的命题，则所表达的意义与连接命题的意义相同。

### 三、充分条件与必要条件

当“如果 $p$，则$q$”是真命题时，那么我们就说，由 $p$ 可推出$q$，这时 $p\Rightarrow q$（真）可读出 $p$ 推出$q$。

如果由 $p$ 可推出$q$，我们又说，$p$ 是$q$ 的充分条件，或$q$ 是 $p$ 的必要条件。这就是说

$$p\Rightarrow q\ （真）$$

$p$ 是$q$ 的充分条件：

$q$ 是 $p$ 的必要条件；

三句话表达的都是同一逻辑关系，只是说法不同而已。下面举例说明：

（1）$x=y\Rightarrow x^2=y^2$，（真）

$x=y$ 是 $x^2=y^2$ 的充分条件，

$y^2=x^2$ 是 $x=y$ 的必要条件；

（2）$A=\varnothing\Rightarrow A\cap B=\varnothing$，（真）

$A=\varnothing$ 是 $A\cap B=\varnothing$ 的充分条件，

$A\cap B=\varnothing$ 是 $A=\varnothing$ 的必要条件。

一般地，如果

$$p\Rightarrow q\ （真）$$

且

$$q\Rightarrow p\ （真）$$

那么我们就说 $p$ 是$q$ 的充分且必要条件，简称充要条件，记作

$$p\Leftrightarrow q$$

显然，如果 $p$ 是$q$ 的充要条件，那么$q$ 也是 $p$ 的充要条件。

$p$ 是$q$ 的充要条件，又常说成$q$ **当且仅当** $p$，或 $p$ 与$q$ 等价。

当且仅当的含义：“当”的意思即是条件的充分性，就是说当这个条件满足时，结论必成立；“仅当”的意思是条件的必要性，即如果条件不满足，结论不成立，换句话说，结论“仅仅”在这个条件下成立。

例如，若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$，则这方程有相等实数根；反之，若 $ax^2+bx+c=0$ 有相等的实数根，则 $\Delta=0$。由于这两个命题都是真命题，所以这两个命题合起来可用充要条件表述为：

$\Delta=0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等实数根的充分必要条件。

**【例 4】** 已知 $p$ 是$q$ 的充分条件，$s$ 是 $r$ 的必要条件，$p$ 是 $s$ 的充要条件，求 $q$ 与 $r$ 关系。

**解** 根据已知可得

$$p\Rightarrow q(真)，r\Rightarrow s(真)，p\Leftrightarrow s\ （真）$$

所以

$$r\Rightarrow s\Leftrightarrow p\Rightarrow q$$

所以

$$r\Rightarrow q\ （真）$$

即 $r$ 是 $q$ 的充分条件，$q$ 是 $r$ 的必要条件。

## 习题0.1

1. 用集合符号写出下列集合：

(1) 大于 30 的所有实数的集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 上所有的点组成的集合；

(3) 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 外部一切点的集合。

2. 下列集合中哪个是空集？

(1) $A=\{x\mid x+5=5\}$；

(2) $B=\{x\mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x^2+5=0\}$；

(3) $C=\{x\mid x>5$ 且 $x<5\}$。

3. 如果 $A=\{x\mid 3<x<5,\ x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x>4、x\in \mathbf{R}\}$，

求 (1) $A\cup B$，(2) $A\cap B$。

4. 已知集合 $A=\{a,3,2,4\}$，$B=\{1,3,5,b\}$，若 $A\cap B=\ \{1,2,3\}$，求 $a$，$b$。

5. 判断下列各题中 $A$ 是 $B$ 成立的充分条件，还是必要条件，还是充要条件或者都不是：

(1) 命题　$A$：$a^2=b^2$，$B$：$a=b$；

(2) 命题　$A$：$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$，$B$：$0<\sin\theta<\dfrac{1}{2}$；

(3) 命题　$A$：两个三角形相似，$B$：两个三角形面积相等；

(4) 命题　$A$：$x>20$，$B$：$|x|>20$；

(5) 命题　$A$：平面上两直线平行，$B$：两直线的斜率相等。

# 第三节　实数与不等式

## 一、实数与数轴

1. 实数

实数是有理数和无理数的统称。整数与分数统称有理数。因为整数可视作分母为1的分数，所以有理数就是分数。例如 $p/q$（$p$，$q$ 是整数，且 $q\neq 0$）的数叫有理数。

若是无限不循环小数，叫无理数。例如$\sqrt{2}$，$\pi$，e，…无理数，它是不能用 $p/q$ 的形式表示的。

2. 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴，如图 0-1 所示。


图 0-1

有了数轴之后，任何一个实数均可用数轴上的一个点表示。反之，数轴上任何一点都表示一个实数。这样就建立了一一对应的关系。

## 二、实数的性质

(1) 在实数范围内，既没有最小的数，也没有最大的数。

(2) 实数运算具有封闭性：对实数作四则运算，其结果仍然是实数。

(3) 连续性：由有理数集合 **Q** 和无理数集合 **W** 构成实数集合 **R**。

($\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{W}$)，才具有连续性。

**三、不等式**

数轴上的任意两点中，右边的点对应的实数比左边的点对应的实数大。于是对任意两个实数 $a$ 和 $b$，它们具有如下的基本性质：

(1) $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；

$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；

$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$。

(2) 不等式的性质

**性质 1** 如果 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$。(不等式的传递性)

**性质 2** 如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$。

这表明，不等式的两边同时加上（或同时减去）同一实数，不等号的方向不变。

**性质 3** 如果 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$。

如果 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$。

这表明，如果不等式两边乘以同一个正数，则不等号的方向不变，如果乘以同一个负数，则不等号的方向改变。

(3) 两个正实数的算术平均值大于或等于它的几何平均值（均值定理）

即
$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\quad(a>0,b>0)$$

对任意 $n(n\geqslant 2)$ 个正数，它的算术平均值大于或等于它的几何平均值。

如果 $a_1>0$，$a_2>0$，…，$a_n>0$，且 $n\geqslant 2$ 则
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立。

**四、一元一次不等式的解法**

解不等式实际上就是利用数与式的运算法则，以及不等式的性质，对所给的不等式进行变形，并要求变形后的不等式与变形前的不等式的解集相等，直到能表明未知数的取值范围为止。

**【例 5】** 解不等式 $2(x+1)+\dfrac{x-2}{3}>\dfrac{7x}{2}-1$。

**解**
$$12(x+1)+2(x-2)>21x-6$$
$$14x+8>21x-6$$
$$-7x>-14$$
$$x<2,\text{解集}\{x\,|\,x<2\}$$

**五、一元一次不等式组的解法**

首先解出每一个不等式的解集，它的解集中的元素，都要满足每个不等式。

因此，求不等式组的解集，实际上就是求每一不等式的解集的交集。

**【例 6】** 解不等式组

$$\begin{cases} 10+2x\leqslant 11+3x & ① \\ 7+2x>6+3x & ② \end{cases}$$

**解** 由式①、式②中分别解出解集为 $\{x\mid x\geqslant -1\}$，$\{x\mid x<1\}$，得原不等式组的解集

$$\{x\mid x\geqslant -1\}\cap\{x\mid x<1\}=[-1,1)$$

上述交集运算在数轴上表示，如图 0-2 所示。

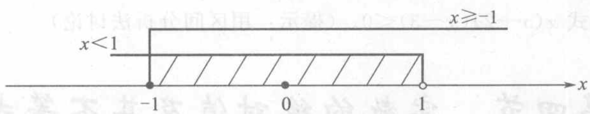



图 0-2

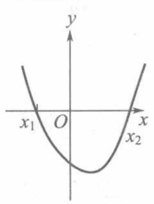
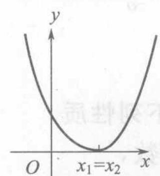
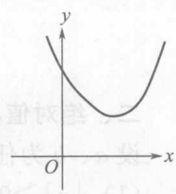
**六、一元二次不等式的解法**

一般形式

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0\ (a\neq 0)$$

一元二次不等式的主要结论，如表 0-5 所示。

**表 0-5**

| 判别式 $\Delta=b^2-4ac$ | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
|---|---|---|---|
| 二次函数曲线 $y=ax^2+bx+c(a>0$ 的图像) |  |  |  |
| 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根 | $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ | 没有实根 |
| $ax^2+bx+c>0(a>0)$ | $x<x_1$ 或 $x>x_2$ | 除 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的一切实数 | 全体实数 |
| $ax^2+bx+c<0(a>0)$ | $x_1<x<x_2$ | 空集 | 空集 |

## 习题0.2

1. 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，求证：

(1) $(a+b)^2\geqslant 4ab$； (2) $(a+b+c)^3\geqslant 27abc$； (3) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4$。

2. 已知 $a$、$b$、$c$、$d$ 都是正实数，求证

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\leqslant\frac{a+b+c+d}{2}$$

3. 求证：

(1) $\frac{2a}{1+a^2}\leqslant 1$；　(2) 当 $a<b$ 时，$a<\frac{a+b}{2}<b$。

4. 解下列不等式：

(1) $3x+1<2x+5$；　(2) $3(1-2x)>2(x-2)$；　(3) $\frac{2}{5}(x-2)\leqslant x-\frac{2}{5}$。

5. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}x+3<4\\x+3>-1\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x-2>0\\x-5<0\\2x+3>0\end{cases}$；　(3) $\begin{cases}(x^2+1)(x-3)<0\\3x+4<5x-6\end{cases}$。

[提示：$(x^2+1)(x-3)<0$ 与 $x-3<0$ 同解]

6. 解下列不等式 $x(x+2)(x-3)<0$。（提示：用区间分析法讨论）

# 第四节　实数的绝对值及其不等式

## 一、实数 $a$ 的绝对值用符号 $|a|$ 表示

定义
$$|a|=\begin{cases}a, & 当\ a\geqslant 0\\-a, & 当\ a<0\end{cases}$$

此式表明，正数和零的绝对值是自身，负数的绝对值是自身的相反数。

从几何上说，$|a|$ 表示数轴上的点 $a$ 与原点之间的距离，如图 0-3 所示。

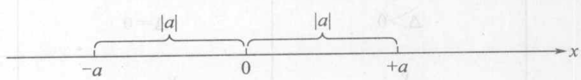



图 0-3

## 二、绝对值具有下列性质

设 $a$、$b$ 为任意实数，

(1) $|a|\geqslant 0$　仅当 $a=0$ 时，$|a|=0$；

(2) $|a|=\sqrt{a^2}$；

(3) $|-a|=|a|$；

(4) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$，

对（4）说明，当 $a\geqslant 0$ 时，$-|a|\leqslant a=|a|$　①

当 $a<0$ 时，$-|a|=a\leqslant |a|$　②

综合式①，式②，就是
$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$$

若取实数 $k>0$，则 $|a|\leqslant k$。

它表示 $-k\leqslant a\leqslant k$，这说明点 $a$ 与原点的距离不超过 $k$，另一方面 $-k\leqslant a\leqslant k$ 又表示 $a$ 在 $-k$ 和 $k$ 之间，因而 $a$ 与原点的距离不超过 $k$，所以 $|a|\leqslant k$。为此，经常用到下列两种关系：

当 $k>0$ 时，$|a|\leqslant k$ 与 $-k\leqslant a\leqslant k$ 等价，