

中學適用
代數指導

趙餘勳編

三民圖書公司印行

用。適。學。用。

江苏工业学院图书馆

趙 勳 編
藏 書 章

上海三民圖書公司印行

編輯大意

- 一 本書可供中等學校代數補充課本，并爲會考及投考升學之用。
- 一 本書依據新課程標準編輯，第一章至第十二章說明關於代數之各種基本運算；自十三章起說明各種方程式之解法。
- 一 本書每章先舉定義、定理及公式。次舉例題，詳加說明，并將應行特別注意之處，另加附注，俾學者易於理解。
- 一 本書每類問題，大都採自全國初中畢業會考及高中入學試驗試題。
- 一 方程式爲代數學之基本，故本書對於各種方程式之解法，舉例特詳，并多附習題，俾學者得充分之練習。

一 本書遇有一題可用數種解法者，均分別提示，使學者能融會貫通。

一 本書另編“問題詳解”另本發售，俾採用者運算遇疑難時，可供參考之用。

一 編者對於“數學指導叢書”之預定計劃，除本書及算術指導外，尚有：幾何指導，三角指導，高等代數指導，解析幾何指導及^等積分指導等，正在編輯中，以後可陸續出版，以爲學者研求數學之一助。

目次

第一章 整式之加減乘除.....1

(一)加法 (二)減法 (三)乘法 (四)除法

(五)括號

第二章 乘法公式.....11

第三章 分解因數.....15

第四章 最大公約數及最小公倍數.....62

(一)最大公約數 (二)最小公倍數

第五章 分數式之加減乘除.....34

(一)加減法 (二)乘除法 (三)繁分數

第六章 指數.....41

(一)單項式之冪法 (二)二項式之展開

(三)多項式之演算

第七章 開方.....48

(一)單項式之開方 (二)多項式之開平方

(三)多項式之開立方

第八章 無理數.....55

(一)無理數之基本運算 (二)加法及減法

(三)乘法及冪法 (四)除法

第九章 虛數.....66

(一)虛數之演算 (二)複素數之演算

第十章 比例.....71

第十一章 級數.....76

(一)等差級數 (二)等比級數 (三)調和級數

第十二章 對數.....87

(一)對數之意義 (二)對數之定理

(三)常用對數

第十三章 一元一次方程式.....94

(一)式題 (二)應用題

第十四章 多元一次聯立方程式.....105

(一)二元一次聯立方程式

(二)三元一次聯立方程式

(三)雜例

(四)應用問題

第十五章 一元二次方程式.....123

(一)一元二次方程式解法 (二)應用題

第十六章 無理方程式.....131

第十七章 一元高次方程式.....136

(一)複二次方程式 (二)逆數方程式

(三)二項方程式 (四)雜例

第十八章 多元高次聯立方程式 150

(一)二元二次聯立方程式 (二)多元高次聯立方程式

(三)應用題

第十九章 分數方程式 173

(一)式題

(二)應用題

第二十章 對數方程式 184

第二十一章 指數方程式 186

第二十二章 不定方程式 191

第二十三章 方程式論 196

(一)方程式之根之研究

(二)一元二次方程式根及係數之關係

第二十四章 不等式 207

(一)一次不等式

(二)二次不等式

(三)分數不等式及無理不等式

第一章 整式之~~加減乘除~~

一 加法

演算整式之加法，當注意下列幾點：

- 一 被加式及加式均須依某文字之降冪序或昇冪序排列。
- 二 同類項（文字全同之項）可以合併，非同類項不能合併。
- 三 同號之二數相加，先加其絕對值，再附以公有之符號。
- 四 異號之二數相加，先減其絕對值，再附以絕對值大者之符號。
- 五 二數之絕對值相等而符號相反，則其和為零。
- 六 零與某數之和仍為某數。

【例一】 加 $4a-6b+4c$, $-3a+5b+3c-5d$

【解】

$$\begin{array}{r} 4a-6b+4c \\ -3a+5b+3c-5d \\ \hline a-b+7c-5d \end{array} (+)$$

【例二】 加 $6x^4 - 4x + 6 + 8x^2$, $9x - 5x^3 + 6x^2 - 2$

〔解〕 先依降幂序排列題中二式，再行求和。遇缺項，當留出地位。

$$\begin{array}{r} 6x^4 \qquad \qquad + 8x^2 - 4x + 6 \\ - 5x^3 + 6x^2 + 9x - 2 \\ \hline 6x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 5x + 4 \end{array} (+)$$

【例三】 加 $a^3 - 2b^3 + 3ab^2$, $5a^2b - ab^2 - 2a^3$, $8a^3 + 5b^3$

〔解〕

$$\begin{array}{r} a^3 \qquad \qquad + 3ab^2 - 2b^3 \\ - 2a^3 + 5a^2b - ab^2 \\ 8a^3 \qquad \qquad + 5b^3 \\ \hline 7a^3 + 5a^2b + 2ab^2 + 3b^3 \end{array} (+)$$

練 習 一

下列各題求和：

1. $4a + 5b - 7c + 3d$, $3a - 5b + 2c + 5d$

2. $5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, $4x^3 + 7x^2 + 2x - 9$

3. $2x^3 - 5x^2 + 7x + 6$, $-6x - 4 + 3x^2 - 3x^3$,
 $-3x - 5x^3 - 7$

4. $9x^2 - 7xy - 3y^2$, $-5y^2 - 3xy + 5x^2$, $3xy - 5y^2 + 2x^2$

5. $x^3 - x^2 + x + 1$, $3x^3 + 2x^2 - 2x$, $-x^3 + x^2 - 1$

6. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c$, $\frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}a$, $\frac{1}{2}c - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$

(注意)本題的係數雖是分數，但文字均為整數，故亦名整式，不名為分式。(分母中有文字者始稱分式。)

二 減法

演算整式之減法，當注意下列幾點：

- 一 被減式及減式均須依某文字之降冪序或昇冪序排列。
- 二 同類項可以合併，非同類項不能合併。
- 三 演算時先將減式之各項變號(正變爲負，負變爲正)，然後依加法演算。
- 四 某數減零，仍爲某數。
- 五 零減某數，絕對值不變而符號變。

【例一】 從 $6a - 8b + 5c - 4d$ 減 $-2a + 4b - 6d - 2e$

〔解〕

$$\begin{array}{r} 6a - 8b + 5c - 4d \\ 2a - 4b \quad + 6d + 2e \\ \hline 8a - 12b + 5c + 2d + 2e \end{array} (+)$$

【例二】 從 $6x^3 - 3x^2 + 7x - 3$ 減 $6x^2 + 7 - 5x + 4x^3$

〔解〕 演算純熟後，草式上不必變號，但在心中變號計算之亦可。

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 3x^2 + 7x - 3 \\ 4x^3 + 6x^2 - 5x + 7 \\ \hline 2x^3 - 9x^2 + 12x - 10 \end{array} (-)$$

【例三】 從 $3a^2 - 4ab + b^2$ 減 $5ab + 6a^2$ ，再減 $4a^2 - 5b^2$

〔解〕 本題須連減二次，以變號用加法演算，較為便捷。

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 4ab + b^2 \\ - 6a^2 - 5ab \\ - 4a^2 \qquad + 5b^2 \\ \hline - 7a^2 - 9ab + 6b^2 \end{array} (+)$$

練習二

下列各題從左式減右式。

1. $ab + cd - ac - ld, ab + cd + ac + bd$
2. $x^3 + 11x^2 + 4, 8x^2 - 5x - 3, 6x^3 - 4x - 5$
3. $3xy^2 - 3x^2y + x^3 - y^3, x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - 1, -2x^5 + x^2 - 5x - 1$
5. $5a^3b - 6a^2b + 7ab^2 + 3b^3 + 5, -5ab^2 - 3 + 3b^3 + 3a^3b$
6. $\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x, \frac{1}{3}x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}x + 2x^3$

三 乘法

演算整式之乘法，當注意下列幾點：

- 一 被乘式及乘式，均須依某文字之降冪序或昇冪序排列。
- 二 同號之二數相乘，其積正；異號之二數相乘，其積為負。
- 三 任何數與零相乘，其積為零。

四 同一文字之幂相乘，等於其指數相加，如

$$x^3 \times x^4 = x^{3+4} = x^7$$

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

【例一】求 $3x+y$ 及 $4x-5y$ 之積

$$\begin{array}{r} \text{〔解〕} \quad \begin{array}{r} 3x + y \\ 4x - 5y \\ \hline 12x^2 + 4xy \\ -15xy - 5y^2 \\ \hline 12x^2 - 11xy - 5y^2 \end{array} \quad (\times) \end{array}$$

【例二】求 $4x^3-6x+5$ 及 $3x+5+4x^2$ 之積

$$\begin{array}{r} \text{〔解〕} \quad \begin{array}{r} 4x^3 - 6x + 5 \\ 4x^2 + 3x + 5 \\ \hline 16x^5 - 24x^3 + 20x^2 \\ 12x^4 - 18x^2 + 15x \\ 20x^3 - 30x + 25 \\ \hline 16x^5 + 12x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 15x + 25 \end{array} \quad (\times) \end{array}$$

【例三】求 x^2+3x+2 及 x^2+4x+3 之積

〔解〕 演算乘法時，為便利起見，可僅書係數，是為分離係數乘法，亦簡稱離係乘法。

$$\begin{array}{r} 1 + 3 + 2 \\ 1 + 4 + 3 \\ \hline 1 + 3 + 2 \quad (\times) \\ 4 + 12 + 8 \\ 3 + 9 + 6 \\ \hline 1 + 7 + 17 + 17 + 6 \end{array}$$

∴ 積是 $x^4+7x^3+17x^2+17x+6$

(注意) 如有缺項，當留出地位，以免錯誤。

練習三

下列各題求積：(5至8用分離係數法。)

1. $3x^4 - 7x^3 + x^2, 4x^2 - 5x$

2. $-4x + x^2 + 11, 4x^3 + 5x - 24 + x^3$

3. $2a^3 - 5a^2b + b^3, b^3 + 5ab^2 + 2a^3$

4. $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

5. $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 3, -7x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

6. $3x^4 - 1 + 2x^3 + 4x, x^3 - 3 + 2x$

7. $a^4 - 11b^4 + 2a^3b - 4ab^3 + a^2b^2, a^3 + 3b^3 - 2ab$

8. $8x^5 - 3a^3x^2 - 5a^4x + a^5, a^2 - 8ax + 7x^2$

四 除法

演算整式之除法，當注意下列幾點：

一 被除式及除式，均須依某文字之降冪序或昇冪序排列。

二 同號之二數相除，其商為正；異號之二數相除，其商為負。

三 任何數除零，其商為零。

四 零不能除任何數。

五 同一文字之冪相除，等於其指數相減，如

$$x^4 \div x^3 = x^{4-3} = x$$

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

【例一】 以 $a+b$ 除 $2a^2+3ab+b^2$

$$\begin{array}{r|l} 2a^2+3ab+b^2 & a+b \\ 2a^2+2ab & 2a+b \\ \hline ab+b^2 & \\ ab+b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

【例二】 以 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$ 除 $\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{12}xy^2+\frac{1}{12}y^3$

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{4}x^3+0+\frac{1}{12}xy^2+\frac{1}{12}y^3 & \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y \\ \frac{1}{4}x^3+\frac{1}{6}x^2y & \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2 \\ \hline -\frac{1}{6}x^2y+\frac{1}{12}xy^2 & \\ -\frac{1}{6}x^2y-\frac{1}{9}xy^2 & \\ \hline \frac{1}{8}xy^2+\frac{1}{12}y^3 & \\ \frac{1}{8}xy^2+\frac{1}{12}y^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

【例三】 以 $1-2x-3x^2$ 除 $1+x-14x^2+7x^3+3x^4-18x^5$

〔解〕 除法亦可用分離係數法演算。

$$\begin{array}{r|l} 1+1-14+7+3-18 & 1-2-3 \\ 1-2-3 & 1+3-5+6 \\ \hline 3-11+7 & \\ 3-6-9 & \\ \hline -5+16+3 & \\ -5+10+15 & \\ \hline 6-12-18 & \\ 6-12-18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

∴ 商是 $1+3x-5x^2+6x^3$

(注意)如有缺項,當留出地位。

練習四

下列各題,以右式除左式:(5至8用分離係數法。)

1. $x^3 - 8x^2 + 11x + 20, x^2 - 3x - 4$

2. $a^4 + a^3 - 9a^2 - 16a - 4, a^2 + 4a + 1$

3. $a^4 + a^2b^2 + b^4, a^2 + ab + b^2$

4. $1 - 6x^5 + 5x^6, x^2 - 2x + 1$

5. $2x^5 - 18x^4 + 39x^3 - 25x^2 + x + 1, x^3 - 7x^2 + 5x + 1$

6. $x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x - 1, x^4 - 3x^3 + 4x + 1$

7. $x^4 - y^4, x + y$

8. $\frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{30}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}, \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$

五 括號

演算括號問題,應注意下列幾點:

- 一 去括號時,倘括號前爲正號,則括號內各項之符號不變。
- 二 去括號時,倘括號前爲負號,則括號內各項當變號。(正變爲負,負變爲正。)
- 三 倘一式內有幾種括號,則先去最內層之括號。

(或先去最外層之括號亦可。)

【例一】 $- \{ -2x - [3y - (2x - 3y) + (3x - 2y)] + 2x \} = ?$

〔解〕 自內而外去括號。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= - \{ -2x - [3y - 2x + 3y + 3x - 2y] + 2x \} \\ &= - \{ -2x - [4y + x] + 2x \} \\ &= - \{ -2x - 4y - x + 2x \} \\ &= - \{ -x - 4y \} \\ &= x + 4y\end{aligned}$$

【例二】 $ax - by - \{ ax + by - [ax - by - (ax + by)] \} = ?$

〔解〕 自外而內去括號。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= ax - by - ax - by + [ax - by - (ax + by)] \\ &= -2by + [ax - by - (ax + by)] \\ &= -2by + ax - by - (ax + by) \\ &= ax - 3by - (ax + by) \\ &= ax - 3by - ax - by \\ &= -4by\end{aligned}$$

練習五

1. $3x - \{ 2y + [5x - (3x + y)] \} = ?$

2. $x - \{ 3y + [3z - (x - 2y)] + 2x \} = ?$

$$3. 16 - x - \{7x - [8x - (x - 7x)]\} = ?$$

$$4. a - \{3a + c - [4a - (3b - c) + 3b] - 2a\} = ?$$

$$5. a - \{5b - [a - (3c - 3b) + 2c - (a - 2b - c)]\} = ?$$

$$6. -[a - (b - c)] - [b - (c - a)] - [c - (a - b)] = ?$$