21世纪高校教材

XIANXINGDAISHU XITIKE JIAOCHENG

线性代数习题课教程

● 蒋家尚 主编

苏州大学出版社

21 世纪高校教材

线性代数习题课教程

主　编　蒋家尚

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题课教程/蒋家尚主编. —苏州:苏州大学出版社,2008.8
21 世纪高校教材
ISBN 978-7-81137-098-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. 蒋… Ⅲ. 线性代数—高等学校—习题
Ⅳ. O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 120878 号

线性代数习题课教程

蒋家尚 主编

责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 787mm×960mm 1/16 印张 9.75 字数 182 千
2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81137-098-0 定价:13.50 元

《线性代数习题课教程》编委会

前　言

线性代数是大学理工科的主要基础课之一，也是硕士研究生入学考试的一门重要课程。线性代数内容较为抽象，有些习题难度较大，广大读者为了在大学期间学好这门课程，除了教材外，还需要适合自己的学习指导用书，本书的编写就是出于这一目的。本书的内容体系参照了同济大学数学教研室编写的《线性代数》，适用于各类各层次的线性代数学习者，对报考硕士研究生的读者亦有一定的帮助，也可作为教师的教学参考书。

本书包括以下六部分的内容：

1. 目的要求　按照全国工科院校线性代数课程教学的基本要求，让读者分层次明晰学习线性代数各章内容的目的与要求。

2. 内容提要　包括主要定义、主要定理和主要结论，并给出了作者在线性代数教学中总结出来的一些计算方法和计算公式。

3. 复习提问　提供了教师与学生在习题课上交流的内容，包含对一些概念的理解，辨析一些较难的计算问题等。

4. 例题分析　例题中有基本概念讨论题，有介绍基本方法的计算题或证明题，也给出了较灵活的综合题。对所给例题作了深入浅出的分析。

5. 自测练习　分 A、B 两个层次，A 层次的练习题以基本题为主，给出了答案；B 层次的练习题难度大一些，给出了详解。

6. 模拟试题　共给出十套线性代数模拟试题，并附有答案，便于读者巩固所学内容并找出薄弱环节。

本书的编写得到了江苏科技大学教材委员会的支持和帮助，得到了江苏科技大学数理学院全体线性代数任课教师的大力协作，在此一并表示衷心的感谢。

本书的不足之处敬请读者批评指正，不胜感谢。

编　者

2008 年 5 月

目录

Contents

第一章

行列式

一、目的要求

1. 了解 n 阶行列式的定义.
2. 掌握 n 阶行列式的性质.
3. 会应用行列式的性质和行列式按行(或列)展开定理计算行列式.
4. 会用克拉默(Cramer)法则求解线性方程组.

二、内容提要

1. 排列

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

定义 2　在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,那么它们就称为一个逆序,一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数.

定义 3　逆序数为偶数的排列称为偶排列;逆序数为奇数的排列称为奇排列.

将一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列,这样的变换称为一个对换.

2. n 阶行列式

定义 4　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

n 阶行列式中的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

3. **n 阶行列式的性质**

性质 1 行列互换，行列式不变.

注 行列式中关于行的性质，对于列也成立.

性质 2 行列式一行的公因子可提出去.

性质 3 行列式如果有一行为零，那么行列式等于零.

性质 4 行列式中如果有两行成比例，那么行列式等于零.

性质 5 行列式中如果某一行是两组数的和，那么该行列式就等于两个行列式的和，这两个行列式除了这一行分别是两组数外，其余的行与原来的行列式的对应行一样，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把一行的倍数加到另一行，行列式的值不变.

性质 7 对换行列式中两行的位置，行列式反号.

4. **行列式按行(或列)展开**

定义 5 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的排法构成一个 $(n-1)$ 阶的行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

定义 6　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 1　设 $D=|a_{ij}|_{nn}$，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D, & k=i,\\ 0, & k\neq i.\end{cases}$$

5. 一些特殊行列式

(1) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 范德蒙(Vandermode)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

6. 克拉默(Cramer)法则

定理 2(克拉默(Cramer)法则)　如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则线性方程组(1)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

方程组(1)中常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组，它总有零解 $x_1=0,\cdots,x_n=0$.

定理 3 如果方程组(1)对应的齐次线性方程组的行列式 $D\neq0$，则它只有零解；即若它有非零解，则必有 $D=0$.

三、复习提问

1. n 阶行列式还有无其他定义？

答：有，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

2. 下面等式对不对？

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e+f & g+h \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix}.$$

答：一般不正确，除非有一些数为 0，正确的应为

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ e+f & g+h \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c \\ f & h \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ e & g \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix}.$$

3. 如何计算二阶、三阶行列式？

答：一般采用定义计算即可.

4. 如何计算高阶($n>3$)的行列式？

答：计算 4 阶及 4 阶以上行列式，基本思路是：化零、降阶，灵活使用性质和特殊行列式. 一般方法有：

(1) 化成三角形行列式；

(2) 降阶法(按一行或一列展开);

(3) 递推公式,数学归纳法;

(4) 利用特殊行列式等.

5. 应用克拉默法则应注意哪些问题?

答:应注意两点:(1) 线性方程中方程个数与未知数个数相同;(2) 系数行列式 $D\neq 0$. 否则不能使用该法则解线性方程组,要用以后的知识.

四、例题分析

例题 1　设 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)=S$,求 $\tau(i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1)$.

解　在 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 这 n 个数中任取 i_k 与 i_m,则它们在且仅在下面两个排列

$$i_1 i_2\cdots i_n \text{ 与 } i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1$$

之一中构成一个逆序,而 n 个数中任取两个数的取法有 C_n^2 种,所以

$$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1)=C_n^2,$$

所以

$$\tau(i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1)=\frac{n(n-1)}{2}-S.$$

例题 2　试证:n 阶行列式中零元素的个数如果多于 n^2-n 个,则此行列式等于零.

证明　n 阶行列式中共有 n^2 个元素,如果零元的个数多于 n^2-n 个,则非零元素的个数少于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个,故此行列式中至少有一行(或列)的元素全为零,故该行列式等于零.

例题 3　计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

解　将各列加到第 1 列,并提出第 1 列的公因子,得

$$D_n=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}\left(\begin{array}{l}\text{第 1 列化零:}\\ \text{各行减去第 1 行}\end{array}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right).$$

注 本题采用化成三角形行列式的方法求行列式.

例题 4 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

解 设 $n\geqslant 2$. 第 n 行开始，逐次将下一行减去上一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{cases} -1, & n=2, \\ 0, & n>2. \end{cases}$$

注 本题采用消法变换.

例题 5 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解 从第 2 行开始，每一行乘(-1)后加到上一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

从第 $n-1$ 列开始，依次用前一列乘(-1)加到后一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix},$$

按第 1 列展开，得

$$D_n=(1-x)\begin{vmatrix}1-x & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x\end{vmatrix}+$$

$$x\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=(1-x)^n+(-1)^{n+1}x^n=(-1)^n[(x-1)^n-x^n].$$

注　本题采用按某一行(或列)展开计算.

例题 6　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b\end{vmatrix}.$$

解　按第 1 列展开,得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-a\begin{vmatrix}b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2},$$

从而得递推公式　$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$.

由于　$D_1=a+b$, $D_2=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2$,

所以　$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n$.

于是　$D_n=aD_{n-1}+b^n=a^2D_{n-2}+ab^{n-1}+b^n=\cdots$

$$=a^{n-1}D_1+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$$

$$=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$$

$$=\begin{cases}(n+1)a^n, & a=b,\\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a\neq b.\end{cases}$$

注 本题采用递推公式计算.

例题 7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解 将行列式加边成 $n+1$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},$$

将行列式的第 1 行的(-1)倍加到其余各行,则有

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

将行列式中第 $i(i=2,\cdots,n+1)$列的$\dfrac{1}{a_{i-1}}$倍加到第 1 列,则有

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

注 本题采用加边法计算行列式.所谓加边法,就是在原行列式中增加一行一列,将原来的 n 阶行列式变成 $n+1$ 阶行列式再进行计算.

例题 8 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

解 将 $x=\pm1,\pm2$ 代入，易知 $D(\pm1)=D(\pm2)=0$. 因此 D 含有 4 个线性因子$(x\pm1)$，$(x\pm2)$；又易知 D 为 4 次多项式，故不妨设

$$D=a(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

令 $x=0$ 代入行列式，算得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=4\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-12,$$

因此 $\quad -12=a\cdot 4\Rightarrow a=-3.$

所以 $\quad D=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$

注 本题为 4 阶行列式，通常可用化零法按第 1 行或第 4 行展开计算，但用上述方法更加简便.

例题 9 证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

证明 对 n 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$D_1=2\cos\theta=\dfrac{\sin2\theta}{\sin\theta}$，即结论成立. 现设 $n=k$ 时结论成立，即 $D_k=\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$，那么，当 $n=k+1$ 时，将 D_{k+1} 按第 1 行展中，得

$$D_{k+1}=2\cos\theta D_k-D_{k-1}=\frac{2\cos\theta\cdot\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin(k+1)\theta-\sin(k+1-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin(k+1)\theta-[\sin(k+1)\theta\cos\theta-\cos(k+1)\theta\sin\theta]}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta\sin(k+1)\theta+\sin\theta\cos(k+1)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta},$$

因此，当 $n=k+1$ 时结论亦成立.

注 数学归纳法在证明或计算行列式的题目中有广泛的应用.

例题 10 已知 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$ 的值，其中 A_{ij} 为行列式 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

解 由于 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=1\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{44}$，它是行列式 D 中第 2 列元素与第 4 列对应元素代数余子式乘积之和，故由展开式定理的推论知

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0.$$

注 如果直接计算 $A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}$ 的值，然后把它们加起来求结果，则计算量较大，且容易出错.

例题 11 设 $f(x)$ 是三次多项式，已知 $f(0)=0, f(1)=-1, f(2)=4, f(-1)=1$，求 $f(x)$.

解 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，根据已知条件有

$f(0)=d=0$,

$f(1)=a+b+c=-1$,

$f(2)=8a+4b+2c=4$,

$f(-1)=-a+b-c=1$,

解三元线性方程组

$$\begin{cases} a+b+c=-1, \\ 8a+4b+2c=4, \\ -a+b-c=1. \end{cases}$$

由 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=12,\quad D_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=12,$