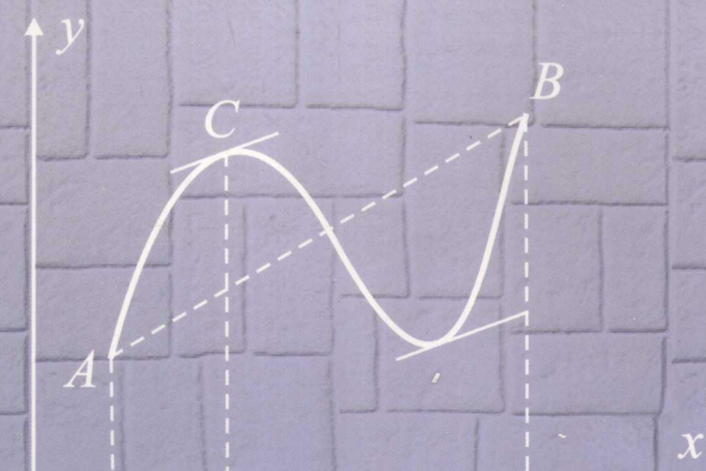
微 积 分

主编 田长明 唐 敏

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



UESTCP
电子科技大学出版社

微 积 分

主 编 田长明 唐 敏

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分 / 田长明，唐敏编著. —成都：电子科技大学出版社，2004. 9
ISBN 7-81094- 639 - 0

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①田… ②唐… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 094723 号

微 积 分

主编 田长明 唐 敏

出 版：电子科技大学出版社（成都建设北路二段四号 邮编：610054）
责任编辑：汤云辉
发 行：新华书店经销
印 刷：成都宁强印务有限责任公司
开 本：787mm × 1092mm 1/16 印张 13.50 字数 329 千字
版 次：2004年9月第一版
印 次：2006年6月第二次印刷
书 号：ISBN 7-81094-639-0/O · 35
印 数：2001—2600册
定 价：26.00元

前　言

本书是根据教育部和国家民委颁布的大学预科数学教学大纲，按照大学预科阶段数学教学要求，为满足大学预科数学教学的需要而编写的教材。

本书是以大学预科学生为教学对象，从大学预科学生的实际出发，结合本专科数学教学所需的基础知识选材编写，具有较强的针对性。

本书主要介绍了极限，函数的连续性，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，广义积分。既系统地介绍了一元函数的微积分，又兼顾了预科学生的实际水平，有利于为学生学习高等数学打下坚实的基础。

本书由浅入深、循序渐进地组织教材内容，结构合理，例题和习题丰富，语言通俗易懂，便于自学。

本书加强了基本知识的应用和基本技能的训练，力求把数学知识和实际问题有机地结合起来，尽力提高学生分析问题和解决问题的能力。每章末给出了小结，帮助学生掌握本章的知识和技能。

本书的主编是西南民族大学田长明和唐敏；参编人员有：田长明、唐敏、赵青、曾纯一。唐敏编著第 1 章至第 2 章，田长明编著第 3 章至第 6 章，赵青编著第 7 章至第 8 章，曾纯一选编了部分习题。

在本书的编写过程中，得到了西南民族大学各级领导的大力支持，在此谨致谢意。

本书可供高等学校各级各类预科学生使用。

由于作者水平有限，时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2004 年 8 月

目　　录

第一章 极　限

在高等数学中，极限是一个重要的基本概念. 其他的一些重要概念，如微分、积分等等，都是用极限来定义的.

§1.1 数列的极限

1.1.1 数列

我们先从圆的面积说起. 为了求圆的面积，可以先作圆的内接正四边形，如图 1-1 所示，并用此四边形面积 A_1 来作为圆的面积的第一次近似. 进一步可作圆的内接正八边形，并记内接正八边形的面积为 A_2，作为圆的面积的第二次近似. 循此下去，可作圆的一系列内接正 2^{n+1} 边形，依次可得相应的面积为 A_3，A_4，…，A_n，…，当内接正多边形的边数不断增加时，其相应的面积与圆的面积就越来越接近，当 n 无限增大时，圆内接正多边形的面积就无限接近于圆面积. 这里当 n 无限增大时，圆内接正 2^{n+1} 边形的面积 A_n 也不断增大，且向某个定数(圆的面积)不断接近. 若将这一定数称为 A_n 的极限，则圆的内接正 2^{n+1} 边形的面积的极限就是圆的面积.

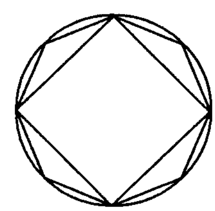


图 1-1

为给出极限的定义，我们首先引入数列，并讨论数列的极限.

1．数列

无穷多个按照自然数顺序排列的数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为数列. 记作$\{x_n\}$，其中每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 为数列的一般项或通项.

例如：

(1) $2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{n+1}{n},\cdots$；

(2) $-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\cdots,-\dfrac{1}{2^n},\cdots$；

(3) $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$；

(4) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$;

(5) $1,3,5,\ \cdots,(2n-1),\cdots$

都是数列，它们的一般项依次为 $\frac{n+1}{n}$，$-\frac{1}{2^n}$，$\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$，$(-1)^{n+1}$，$2n-1$.

在几何上，数列$\{x_n\}$可看作数轴上的一族动点，它依次取数轴上的点 x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_n，$\cdots$ 将上述 5 个数列分别表示在数轴上，如图 1-2 所示，就是上述 5 个数列的前面几项在数轴上的表示.

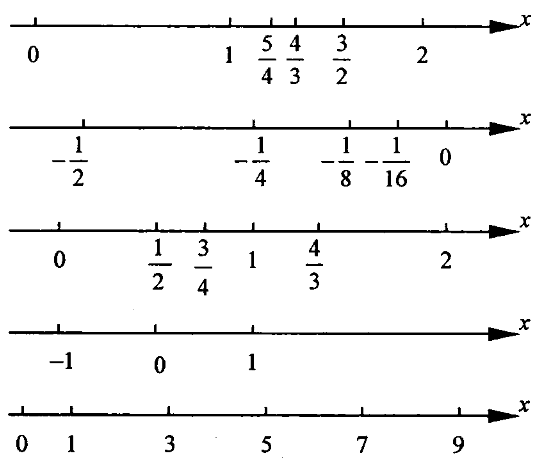


图 1-2

2．单调有界数列

对数列$\{x_n\}$

①若有 $x_1\leqslant x_2\leqslant\ \cdots\ \leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$，则称该数列为单调增加数列；反之，若有 $x_1\geqslant x_2\geqslant\ \cdots\ \geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots$，则称该数列为单调减少数列.

例如：数列$\{-\frac{1}{2^n}\}$，$\{2n-1\}$等为单调增加数列，而数列$\{\frac{n+1}{n}\}$，$\{\frac{1}{n}\}$ 等为单调减少数列.

②若存在正数 M，使对一切 x_n 均有$|x_n|\leqslant M$成立，则称数列$\{x_n\}$为有界数列.

若这样的 M 不存在，则称数列为无界数列.

例如：数列 $\{(-1)^n\}$，$\{\frac{n+1}{n}\}$，$\{-\frac{1}{2^n}\}$等都是有界数列，而数列$\{2n-1\}$，$\{2^n\}$等为无界数列.在有界数列$\{x_n\}$的定义中，$|x|\leqslant M$(即$-M\leqslant x_n\leqslant M$)表明，$x_n$ 在$-M$与 M 之间取值，我们称 M 是这一数列的上界，$-M$ 则是这一数列的下界.一般地，若数列$\{x_n\}$有下界 a 和上界 b，即 $a\leqslant x_n\leqslant b$，则由于 x_n 必满足$|x_n|\leqslant\max\{|a|，|b|\}$，因而$\{x_n\}$是有界数列.

具有性质①，②的数列称为单调有界数列.

1.1.2 数列的极限

1．数列极限的定义

考察数列：$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdots$由图 1-2 容易看出，当 n 无限增大时，数列 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 无限趋近于一个确定的常数 1，此时我们说数列 $x_n=\{\frac{n+1}{n}\}$以常数 1 为极限.一般地有：

定义 1 设有数列$\{x_n\}$和常数 A，如果当 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$)，数列$\{x_n\}$的值无限趋近于一个确定的常数 A，则称数列$\{x_n\}$在 $n\to\infty$时以常数 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=A \quad \text{或 } x_n\to A(n\to\infty)$$

如果数列不趋近于一个确定的常数，则称数列没有极限.

如果数列有极限，则称数列为收敛数列，否则为发散数列.

例 1 讨论数列 $x_n=-\frac{1}{2^n}$ 的极限

解 由图 1-2 看出，当 n 无限增大时，数列 $x_n=-\frac{1}{2^n}$ 由 $x=0$ 的左侧无限趋近于 0，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0$$

例 2 讨论数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的极限

解 由图 1-2 看出，当 n 无限增大时，数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 由 $x=1$ 的两侧无限趋近于 1，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$$

当 n 无限增大时，数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 的值在+1 与－1 两点来回跳动，而数列 $x_n=2n-1$ 的值无限增大时，它们都不趋近于某一确定的常数，所以数列$\{(-1)^{n+1}\}$与$\{2n-1\}$都没有极限，它们是发散数列.

2．数列极限的“$\varepsilon-N$”分析定义

设ε是任意给定的无论多么小的正数.用“总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时”来刻画“当 n 无限增大时”；用“$|x_n-A|<\varepsilon$”来刻画“数列$\{x_n\}$的值无限趋近于一个确定的常数 A”，就得到数列极限的“$\varepsilon-N$”分析定义.

定义 2 设有数列$\{x_n\}$和常数 A，如果对于任意给定的正数ε，总存在正整数 N，使得当

$n>N$ 时，恒有

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

则称数列$\{x_n\}$在 $n\to\infty$时以常数 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或\ x_n \to A(n\to\infty)$$

为叙述方便通常这样用符号：$\forall$——表示任意给定的，$\exists$——表示存在，$\overline{\exists}$——表示不存在，$\ni$——表示使得.

定义 2 可简记为：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$，$\exists N$，$\ni$ 当 $n>N$ 时，恒有$|x_n - A| < \varepsilon$

3．数列极限的几何意义

将常数 A 及数列 x_1，x_2，…，x_n，…在数轴上用对应点表示.若数列 x_n 以 A 为极限，就表示对于任意给定的正数ε，总存在正整数 N，使从点 x_{N+1} 开始，其后所有的点，即 x_{N+1}，x_{N+2}，…都落在 A 的ε 邻域内(见图 1-3).

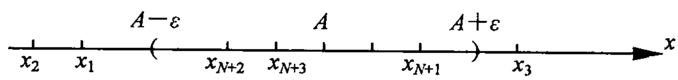


图 1-3

1.1.3　用定义证明数列极限的方法

要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，就是要证明$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists N$，$\ni$当 $n>N$ 时，恒有$|x_n - A| < \varepsilon$

证明方法：

从要证明的不等式$|x_n - A| < \varepsilon$出发，去寻找使不等式成立的 n 应当满足条件 $n>N$，再根据这个条件取出 N，说明 N 的存在性，从而证明数列满足定义的条件：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists N$，$\ni$ 当 $n>N$ 时，恒有$|x_n - A| < \varepsilon$.

例 3　证明：数列 $x_n = \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的极限是 1.

证　因为$|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$，所以对于任意给定的正数$\varepsilon$，要使$|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$，只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$即可，故取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$时，恒有$|x_n - 1| < \varepsilon$成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$$

例 4　证明：数列 $x_n = q^n$ ($|q|<1$) 的极限为零.

证　对任给$\varepsilon>0$，欲使$|q^n - 0| < \varepsilon$，即$|q^n| < \varepsilon$，只要$n\lg|q| < \lg\varepsilon$.注意到$|q|<1$，故 $\lg|q|<0$，由此可得

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$$

因而，只要取 $N = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right]$，则当 $n > N$ 时，恒有$|q^n| < \varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1).$$

例 5　设当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$的极限存在，证明：数列$\{x_n\}$为有界数列.

证　设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则由数列极限的定义，对给定的$\varepsilon = 1$，必存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1$$

又

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|$$

所以当 $n > N$ 时，必有

$$|x_n| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

成立，取 $M = \max\{|x_1|，|x_2|，\cdots，|x_N|，1 + |a|\}$，那么数列$\{x_n\}$中的一切 x_n，都满足不等式：

$$|x_n| \leqslant M$$

即 数列$\{x_n\}$是有界数列.

习　题　1.1

1．写出下列数列的前 5 项：

(1) $\{x_n\} = \{1 - \frac{1}{2^n}\}$；　(2) $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\}$；

(3) $\{x_n\} = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n})\}$；　(4) $\{x_n\} = \{\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\}$.

2．观察下列数列当 $n\to\infty$时的变化趋势，指出哪些有极限，极限值是多少以及哪些没有极限.

(1) $\{x_n\} = \{\frac{1}{3^n}\}$；　(2) $\{x_n\} = \{(-1)^n\frac{1}{n}\}$；　(3) $\{x_n\} = \{2 + \frac{1}{n^2}\}$；

(4) $\{x_n\} = \{\frac{n-1}{n+1}\}$；　(5) $\{x_n\} = \{(-1)^n n\}$.

3．设 $u_1 = 0.9$，$u_2 = 0.99$，$u_3 = 0.999$，$\cdots$，$u_n = \underbrace{0.99\cdots9}_{n\text{个}}$，问

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ?$

(2) n 为何值时，才能使 u_n 与其极限之差的绝对值小于 0.0001？

4．极限思想的萌芽在我国古代很早就有记载，公元前三百年左右，就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”之说，试把一尺长的木棍“日取其半”，每日剩余部分写成数列，并考察这个数列的极限.

5．对于数列$\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$(n=1, 2, 3, \cdots)$，给定(1)$\varepsilon=0.1$，(2)$\varepsilon=0.01$，(3)$\varepsilon=0.001$时，分别取怎样的$N$，才能使当$n>N$时，不等式$|x_n-1|<\varepsilon$成立，并利用极限的定义证明此数列的极限为1.

6．利用数列极限的“ε-N”分析定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)=1$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n!}{n}=0$.

§1.2　函数的极限

1.2.1　当$x\to x_0$时函数的极限

1．定义

考察当$x\to 1$时函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$的变化情况. 因为当$x=1$时，函数没有定义.

而当$x\neq 1$时，$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$. 所以$f(x)$的图形（如图1-4所示）.不难看出，当$x\to 1(x\neq 1)$时，函数$f(x)$的值无限趋近于2.我们称当$x\to 1$时，$f(x)$以2为极限.一般地有：

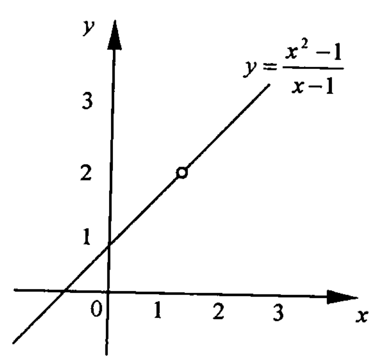


图 1-4

定义1　设函数$f(x)$在点x_0某空心邻域内有定义，如果当x趋近于$x_0(x\neq x_0)$时，函数$f(x)$的值无限趋近于一个确定的常数A，则称函数$f(x)$在x趋近于x_0时以A为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{，或 }f(x)\to A(x\to x_0).$$

2．函数极限的“$\varepsilon-\delta$”分析定义

设ε是任意给定的无论多么小的正数. 用“总存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时”来刻画“当x趋近于$x_0(x\neq x_0)$时”，用“$|f(x)-A|<\varepsilon$”来刻画“函数$f(x)$的值无限趋近于一个确定的常数A”，就得到函数极限的“$\varepsilon-\delta$”分析定义：

定义2　设函数$f(x)$在点x_0的某空心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，总

存在一个正数$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$在$x\to x_0$时以A为极限.记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{，或}f(x)\to A(x\to x_0).$$

定义 2 可简记为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\ni$当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

3．$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的几何意义：

如图 1-5 所示当x进入开区间$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时，函数$y=f(x)$的图形就要进入以二直线$y=A\pm\varepsilon$为边的带形区域.

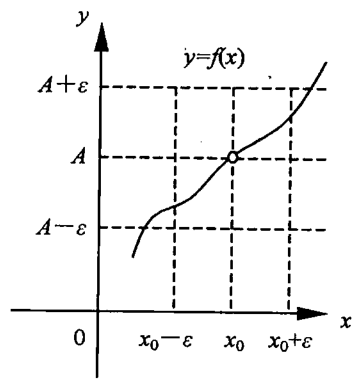


图 1-5

4．用定义证明函数极限的方法：

从要证明的不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$出发，去寻找使不等式成立的δ应当满足条件$0<|x-x_0|<\delta$，再根据这个条件取出δ，说明δ的存在性，从而证明函数满足定义的条件：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\ni$当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

例 1　求证：$\lim\limits_{x\to-3}(\frac{1}{3}x+2)=1$.

证　$\because$　$\left|\left(\frac{1}{3}x+2\right)-1\right|=\left|\frac{1}{3}x+1\right|=\frac{1}{3}|x+3|$

$\therefore$对于$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\left(\frac{1}{3}x+2\right)-1\right|<\varepsilon$$

只要$\frac{1}{3}|x+3|<\varepsilon$即$|x+3|<3\varepsilon$.取$\delta=3\varepsilon$，则当$0<|x+3|<\delta$时，恒有

$$\left|\left(\frac{1}{3}x+2\right)-1\right|<\varepsilon$$

由定义知：

$$\lim_{x\to-3}(\frac{1}{3}x+2)=1$$

例 2 证明：$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$.

证　按定义，对任何$\varepsilon>0$，我们的目的是找到$\delta>0$，使当$0<|x-1|<\delta$时，恒有

$$|(2x-1)-1|=2|x-1|<\varepsilon.$$

为此，可取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当$0<|x-1|<\delta$时，就有

$$|(2x-1)-1|=2|x-1|<2\cdot\delta=2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

例 3　证明：$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2(x+1)}=-1$

证　对于任意给定的正数ε，因为$\left|\dfrac{x^2-1}{2(x+1)}-(-1)\right|=\dfrac{1}{2}|x-1+2|=\dfrac{1}{2}|x+1|$

为了使

$$\left|\frac{x^2-1}{2(x+1)}-(-1)\right|=\frac{1}{2}|x+1|<\varepsilon$$

只要$|x+1|<2\varepsilon$，故可取$\delta=2\varepsilon$，则

当$0<|x-(-1)|<\delta$时，恒有

$$\left|\frac{x^2-1}{2(x+1)}-(-1)\right|<\varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{2(x+1)}=-1$$

例 4　证明：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证　因为$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，故对任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\varepsilon$$

只要$|x|<\varepsilon$，可取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x-0|<\delta$时，恒有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

成立，所以

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

1.2.2 单侧极限

在上述函数极限的讨论中，x 是以任意方式趋近于 x_0 的， 即 x 可以从 x_0 的左侧逐渐增大而趋近于 x_0(记作 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0-0$)，也可以从 x_0 的右侧逐渐减少而趋近于 x_0(记作 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0+0$)，甚至按任意方式沿 x 轴趋近于 x_0. 如果我们只能或只需考虑 x 从其一侧趋近于 x_0，则有单侧极限的概念，其分析定义为：

定义 3 如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A \text{ 或 } \lim_{x\to x_0-0}f(x)=A$$

简记为：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A \Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\ni$ 当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定义 4 如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A \text{ 或 } \lim_{x\to x_0+0}f(x)=A$$

简记为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\ni$ 当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

左极限和右极限统称为单侧极限.

定理 1 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左、右极限都存在而且相等.即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

例 5 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0\text{时}, \\ 0, & x=0\text{时}, \\ x-1, & x>0\text{时}. \end{cases}$$

求 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的单侧极限，并讨论当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是否存在极限.

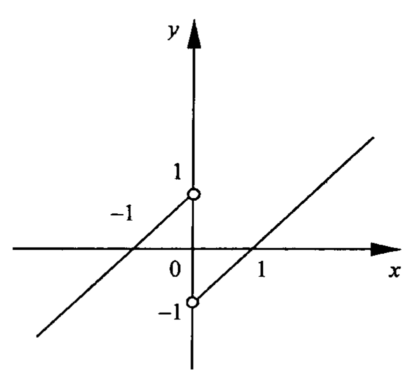


图 1-6

解 作函数的图形(图 1-6)，由图示容易看出：

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$$

故当 $x\to 0$ 时，$f(x)$的左极限为 1，右极限为－1，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$的极限不存在.

1.2.3　当 $x\to\infty$时函数的极限

考查函数

$$y=1+\frac{1}{x}(x\neq 0)$$

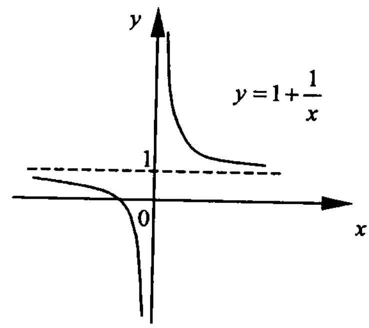


图 1-7

如图 1-7 当$|x|$无限增大时，y 无限地趋近于 1. 我们就称 $x\to\infty$时 $y=1+\frac{1}{x}$ 以 1 为极限.

一般地，如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A，则称 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时以常数 A 为极限.其分析定义为：

定义 5(ε - M定义)　如果对于任意给定的正数ε，总存在一个正数M，使得当$|x|>M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时以常数 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

简记为：

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ \ni \text{ 当}|x|>M\text{ 时，恒有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的几何意义:

如图 1-8 当 x 进入开区间$(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$时，函数的图形就要进入以二直线 $y=A\pm\varepsilon$ 为边的带形区域.

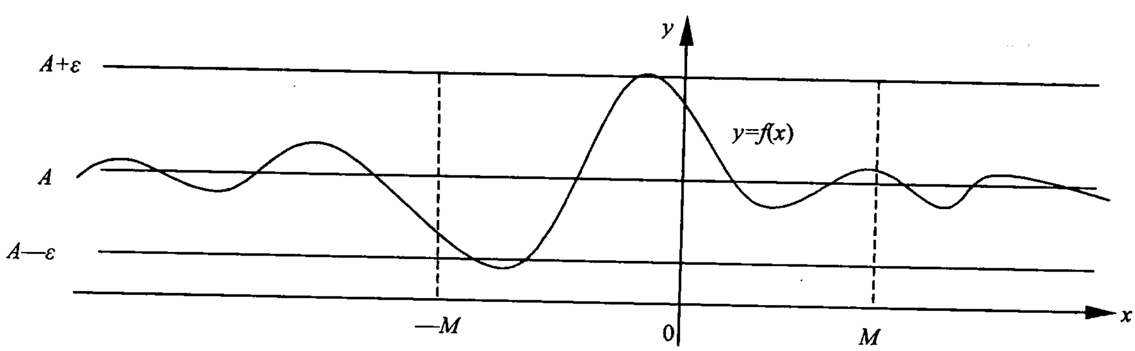


图1-8

例 6 试求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}$

解 由于当 x 的绝对值无限增大时，$1+x^2$ 也无限增大，此时 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 无限趋近于 0，因而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$$

图 1-9 给出了函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的变化情况.

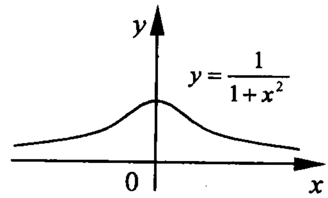


图 1-9

在上述极限的讨论中，$|x|$无限增大.可以是 x 保持正值无限增大，也可以是 x 保持负值无限增大.如果我们只能或只需考虑 x 保持正值或保持负值无限增大，则有如下分析定义：

定义 6（$\varepsilon-M$定义） 如果对于意给定的正数ε，总存在一个正数 M，使得当 $x<-M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时以常数 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

简记为：

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\ni \text{ 当 } x<-M \text{ 时，恒有} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

定义 7（ε-M定义） 如果对于任意给定的正数ε，总存在一个正数 M，使得当 $x>M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$时以常数 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

简记为：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\ni \text{ 当 } x>M \text{ 时，恒有} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

例如 $f(x)=\arctan x$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，但当 $x\to\infty$时，函数 $\arctan x$ 不趋向于一个确定的常数，故 $x\to\infty$时，$\arctan x$ 的极限不存在.

1.2.4 极限的性质

性质 1（唯一性） 如果函数有极限，则极限值是唯一确定.