大学数学系列教材

微积分学（第三版）

（上册）

华中科技大学数学系

高等教育出版社
Higher Education Press

大学数学系列教材

微积分学

（第三版）（上册）

华中科技大学数学系

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是在高等教育出版社 2002 年出版的《微积分学(修订版)》(上、下册,华中科技大学数学系编)的基础上,广泛吸取校内外教师的意见后修订而成的。本书分上、下两册出版。上册主要内容有:函数,极限与连续性,导数与微分,微分中值定理·应用,不定积分,定积分,常微分方程,书后附积分表、习题答案及人名与名词索引。

本着"通用、简明、便利、易读"的方针,本书对传统的微积分(即高等数学)课程的教学内容,采取精简、集中、类比、偏重、优化等一系列有效措施,设计成一个内容简明易懂、数学思想清晰、重点难点突出、注重应用能力的教学体系;在有限的课时内提高教学效率,使学生能更快更好地理解与掌握微积分学知识。

本书适合于一般高等院校理工科各专业学生作为微积分学教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学.上册/华中科技大学数学系.—3 版.—北京:高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023879-2

Ⅰ.微… Ⅱ.华… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 067979 号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张志奇
责任绘图 黄建英 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 姜国萍
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
		版　　次	1997 年 8 月第 1 版
开　　本	880×1230 1/32		2008 年 6 月第 3 版
印　　张	10.25	印　　次	2008 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	280 000	定　　价	16.00 元

物料号 23879-00

第三版前言

本次修改工作有以下几个方面：

(1) 调整了一些概念的说法。例如极值点概念，凹凸性概念，反常积分等。重新安排了多元函数微分学一章的目次。

(2) 优化了一些内容的处理。例如更好的解法，适当的几何或物理解释。

(3) 重写了一些不易理解的知识点，例如泰勒公式，微分方程解的结构。

本次修订工作是在微积分课程组全体教师的大力协作下进行的，他们提出的许多建议都已纳入了这一次的修订方案。参加本次修订工作的有毕志伟(负责第一，第二章)，吴洁(负责第三，第四章)，谢鹏(负责第五，第六章)，王德荣(负责第七，第十二章)，罗德斌(负责第八，第十一章)，周军(负责第九，第十章)。统稿工作由毕志伟、谢鹏负责。

编　者

2008 年 7 月

修订版前言

由原华中理工大学数学系编写，高等教育出版社出版的《高等数学》(上、下册)(1997年8月第一版)，自出版以来一直在我校本科学生中使用。几年来的教学实践表明，该教材体系设计合理，方便好用。

本次修订对原有的体系框架及风格特色保持不变；对某些证明的推导和例题的讲解补充了必要的细节以便于学生理解，增强了可读性；考虑到应用微积分知识的重要性，增加了一些较新的应用例题及习题，并改名为《微积分学》。参加本次修订工作的有毕志伟、林益、王汉蓉、陈爱兰、谢鹏、魏宏、王德荣、刘国钧、乔维佳、吴洁、罗德斌、周军。统稿工作上册由毕志伟负责，下册由谢鹏负责。图形修订由谢鹏负责。

编　者

2002年7月

第一版前言

本书是为跨入21世纪的年轻读者写的。

新的世纪已在眼前,世界的前景将会如何?各界人士都在预测与展望,众说纷纭,莫衷一是。但有一点是众所公认的,即21世纪必然是高科技的世纪。人们毫不怀疑,科学技术将以前所未有的速度发展;新观念、新理论与新技术将层出不穷;覆盖全球的信息网将进入每个家庭,运用高技术将成为人类日常生活的一部分。未来的大学生将愈来愈早地接触高科技,他们将不可避免地置身于知识产品的滚滚洪流之中!

这一切已不再是朦胧的幻影,而是轮廓已清晰可见的升起于天际的一轮红日。为这种前景所鼓舞的大学生,在他们立志投身于科学之际,将学到怎样的数学?教育界正在为此而苦苦思索,本书作者们亦已为此探索多年,而本书则正是这一探索的初步成果。

世界各国的大学都在倡言改革,数学教育改革的呼声震天动地,提出的方案与模式成百上千,但真正瓜熟蒂落的成果却寥若晨星,以至于今日大学生所学到的高等数学,与40年前相比并无重大差别。一门数学课程能如此经久不变,数学界似乎应为它的强大生命力而额手称庆。然而,这实在是危机的先兆。

如同所有科学部门一样,数学本身亦在不断更新,新理论与新方法不断涌现。经典微积分在经历了300年的辉煌发展之后,已经高度成熟。今天,它的应用依然遍及几乎所有科学领域。然而,它所占的地盘正在无可挽回地缩小。近十年之内,高等数学课程的总学时缩短了近四分之一,这只不过是人们对一种不可阻挡的历史趋势的不情愿的反应而已。任何经典学科都无法逃避被精简浓缩的命运,经典微积分学亦不例外。无论如何,不应让今天的大学生去重复历史的发展,通晓从

极限到微积分运算的每一细节，他们应当将有限的时间与精力花费在最必需的那部分内容上。况且，微积分早已不是大学生所应掌握的唯一数学工具。为了跟上高科技时代，今日大学生除了学习微积分学及已相当标准化的“工程数学”课程之外，还必须学习某些与算法理论密切相关的离散数学知识；学习在科学、工程与社会生活中有广泛应用的“优化数学”知识，等等。这种对新的数学知识的紧迫需要，正在促使高等数学让出愈来愈多的地盘，人们几乎别无选择。

正是基于这一认识，我们呈献给读者的这本书，作了目前条件下我们所能做到的最坚决的改进，使读者有可能在比过去少得多的时间内学到经典微积分学的主要内容，而又不降低基本的数学思维训练。我们深信已在一定程度上达到这一目的。

本书上、下两册合计不过60万字，约相当于目前同类教材的3/4，而其中包括了教育部审定的高等数学课程教学基本要求的所有内容。做到这一点当然不容易，这是采取一系列坚决改进措施的结果，其主要者如下：

1. 精简．删去后文不引用的中间结果（如Abel引理）；排除那些数学的发展证明已失去价值的内容（如关于可积性的讨论）；略去后文或后续课程中处理得更好的问题（如定积分的某些应用）。

2. 集中．如性质集中（极限性质、积分性质、级数性质等），规则集中（如微分规则、矢量运算规则等），公式集中等等。这样大大提高了表达效率，且便于理解、记忆与复习。

3. 类比．可互相对照的内容，最大限度地平行处理、互相参照，这样既有利于启发学生思维，同时又避免了许多简单重复，从而节省了篇幅。

4. 偏重．处处注意将主要篇幅用于较简单的典型情况，因而降低了难度而又无损于基本内容。例如，明确突出Maclaurin级数，而一般的Taylor级数仅需简单的交代就足够了。

5. 简化．所有关键性结论的推证都经过精心设计，以达到最大限度的简洁。过程繁琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明，则坚决予以省略。

始终萦绕本书作者们脑际的一个基本想法是：除了真正必需的内容之外，其他都是多余的。而一旦清除了不必要的内容，就为补充新的内容铺平了道路，这正是致力于改革的数学界同仁们所期待的。

至于本书的风格，需作的说明不多。数学教材很难赢得生动有趣的赞誉。在冷峻古板与轻浮媚俗这两副面孔之间，我们选择了某种折中姿态。数学教材无疑负有对学生进行逻辑训练的使命，因而永远需要一定的严谨性，本书也不例外。除此之外，我们尽了最大努力来提高本书的可读性。我们的目标是：各种类型学校的大学生都能利用本书顺利完成高等数学的学习。本书作者们在提笔之初，即明确提出“通用、简明、便利”的标准作为自我规范。本书在多大程度上合乎这一预定标准，相信读者自有评判。

本书初稿由毕志伟、林益、王汉蓉、陈爱兰、何瑞，魏宏、杨祖禧、李静瑶、刘国钧、樊孝述，曹诗珍、周怀治、汤燕斌、魏尧生、谢鹏执笔；书中插图均由谢鹏绘制。书稿上、下册分别由毕志伟与谢鹏统稿，最后由本人修改定稿。陆传务、陈祖诰、杨林锡、王德荣、王新华仔细审阅了书稿，许多章节在内容与形式上的改进都大大得益于他们的意见。无疑，书中仍然不免有疏漏与不妥之处，切望广大读者指出，以便订正。

胡适耕

1997年8月于华中理工大学

重要公式

二项展开式：$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+b^n$.

均值不等式：$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，等式在 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

柯西不等式：

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

伯努利不等式：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant1+a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>-1$，且符号相同.

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}=ay-bx$.

三阶行列式：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} y & z \\ v & w \end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix} x & z \\ u & w \end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix}$.

记号与约定

$f:X\to Y$，表示 f 是定义于集合 X 上且取值于集合 Y 中的函数（或映射）.

f^{-1}：f 的反函数.

$f(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$：$f(x)$ 在点 a 的右极限.

$f(a^-)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$：$f(x)$ 在点 a 的左极限.

$f'_+(a)$：$f(x)$ 在点 a 的右导数.

$f'_-(a)$：$f(x)$ 在点 a 的左导数.

$[x]$：不超过 x 的最大整数.

$\max\{x,y\}$：x,y 中较大的一个.

$\min\{x,y\}$：x,y 中较小的一个.

$\sup A$：实数集 A 的上确界（即最小的上界）.

$\inf A$：实数集 A 的下确界（即最大的下界）.

$n!$：n 的阶乘，如 $3!=3\cdot 2\cdot 1, 0!=1$.

$n!!$：n 的双阶乘，如 $5!!=5\cdot 3\cdot 1, 6!!=6\cdot 4\cdot 2$.

$\mathrm{C}_n^k=n!/[k!(n-k)!]$.

$\exp x=\mathrm{e}^x$：指数函数.

$\ln x(x>0)$：自然对数函数.

$\sec x=1/\cos x$：正割函数，　$\csc x=1/\sin x$：余割函数.

$\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$：双曲正弦函数，$\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$：双曲余弦函数.

$\forall x>0$：对任何正数 x；　　$\forall x\in A$：对 A 中任何 x.

$\exists x>0$：存在一个正数 x；　　$\exists x\in A$：A 中存在一个 x.

“$\exists x\in A:x$ 满足条件 C” 的意思为“A 中存在一个 x，使得 x 满足条件 C”，命题中的冒号“:”表示“使得”或“有” 等意义.

$P \Rightarrow Q$:命题 P 推出命题 Q;$P \Leftrightarrow Q$:命题 P 与命题 Q 等价.

$N(a,r)=(a-r,a+r)$:点 a 的半径为 r 的邻域.

$\mathring{N}(a,r)=(a-r,a)\cup(a,a+r)$:点 a 的半径为 r 的空心邻域.

$u=o(v)$,表示 $\lim \dfrac{u}{v}=0$ 或 u 是较 v 高阶的无穷小.

$u=O(v)$,表示 $\lim \dfrac{u}{v}=l$,l 为非零实数,或 u,v 为同阶无穷小.

$u \sim v$,表示 $\lim \dfrac{u}{v}=1$,或 u 与 v 是等价无穷小.

$f'(\varphi(x))=\dfrac{\mathrm{d}f(\varphi(x))}{\mathrm{d}\varphi(x)}$,表示 $f(\varphi(x))$ 对 $\varphi(x)$ 的导数.

$(f(\varphi(x)))'=\dfrac{\mathrm{d}f(\varphi(x))}{\mathrm{d}x}$,表示 $f(\varphi(x))$ 对 x 的导数.

$f(x)\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$,$f'(x)\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)$.

$F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

D_f:函数 f 的定义域.

W_f:函数 f 的值域.

$x\in A$:x 是集合 A 中元素.

$A\subset B$:集合 A 是集合 B 的子集,即 $x\in A \Rightarrow x\in B$.

$A\cup B$:集合 A 与集合 B 的并集.

$A\cap B$:集合 A 与集合 B 的交集.

$+\infty$:正无穷大,在表示区间时常省写作 ∞.

$-\infty$:负无穷大.

∞:无穷大,当变量绝对值趋于 $+\infty$ 时,称变量趋于 ∞.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$,不致误解时,简写成 $\sum a_n$.

§1.2(3) 表示第一章第二节中的式(3).

□:定理证毕.

$\equiv$:恒等于.例如 $x_n\equiv C$ 表示常数列,$f(x)\equiv C$ 表示常数函数.

目　　录

第一章

函　数

本课程以变量为主要研究对象，基本的研究方法是通过不同变量之间的依赖关系来揭示变量的变化规律，而函数就是变量之间的一种依赖关系. 因此，函数是微积分学的基本研究对象. 自然，函数概念将贯穿于本书各章节. 本章介绍变量与函数的概念、函数的初等性质以及函数的运算等，这些内容构成学习微积分学最必需的预备知识.

§1.1　变量与函数

1.1.1　集合与实数

集合是现代数学中最为基本的概念，研究任何对象都不可避免地要用到集合. 例如，所有自然数的集合；一个方程的根的集合；某三角形内所有点的集合，等等. 一般地，具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**或**集**，其中的对象称为集合的**元素**. 通常以大写字母 A,B,M 等表示集合，而以小写字母 a,b,x 等表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$(读作 a 属于 A)；否则记作 $a\overline{\in} A$(读作 a 不属于 A).

表示集合的方式通常有两种. 一种是列举式，例如，方程 $x^2-1=0$ 的根的集合表示为 $\{1,-1\}$. 另一种是命题式，例如，整数集可表示为 $\{x|\sin \pi x=0\}$. 集合 A 的较一般的表示方法为

$$A=\{x\mid x\text{满足}P\},\tag{1}$$

其中 P 是关于 x 的某个命题. 式(1)的意义是：$x\in A$ 的充要条件(即充分必要条件)是 x 满足命题 P.

给定集合 A,B，若当 $x\in A$ 时必有 $x\in B$，则称 A 为 B 的**子集**，记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)，或 $B\supset A$(读作 B 包含 A). 若 $A\subset B$ 且 B