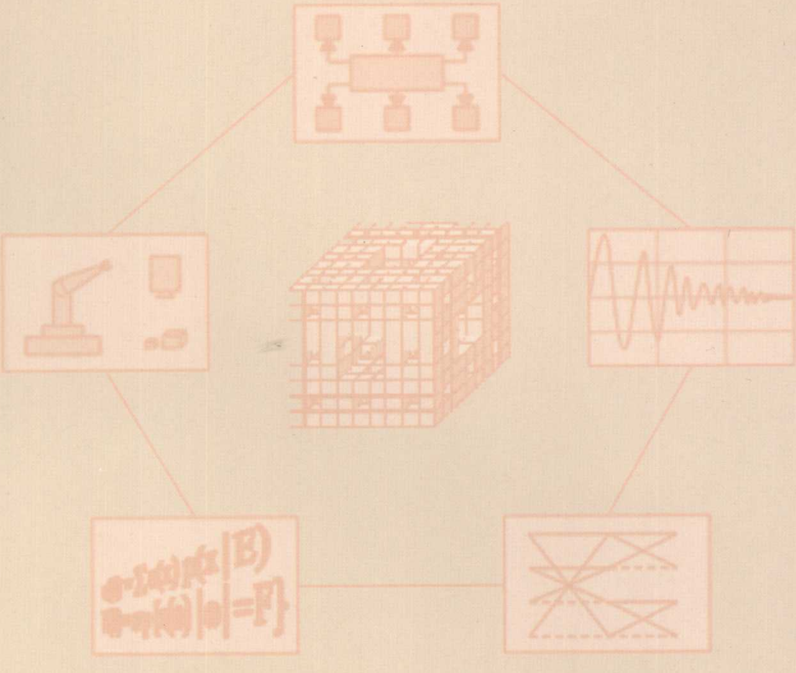
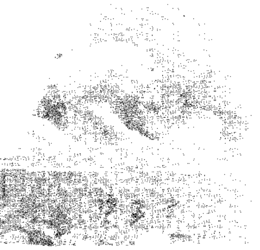
中国科学技术大学精品教材

控制理论中的代数基础

季海波 编著



中国科学技术大学出版社



中国科学技术大学精品教材

控制理论中的代数基础

KONGZHI LILUN ZHONG DE DAISHU JICHU

季海波　编著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书是以中国科学技术大学“控制理论中的代数基础”课程讲义为基础编写的，其内容包括：映射、关系、群与环等近世代数基础，线性空间与线性映射、投影算子、空间分解定理，Jordan 标准形、矩阵奇值分解、Hermite 二次型，矩阵范数、矩阵级数与矩阵函数，线性系统的稳定性、可控性与可观性，广义逆矩阵、矩阵方程、矩阵 Kronecker 积、矩阵不等式，多项式矩阵的因子与互质、Smith 标准形、Mcmillan 标准形，分式矩阵既约分解、线性系统的零极点与实现理论等. 本书可作为高等院校及科研院所自动化专业、电子与信息专业的研究生教材，也可供其他专业研究生和工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

控制理论中的代数基础/季海波编著. — 合肥：中国科学技术大学出版社，2008.9
（中国科学技术大学精品教材）
“十一五”国家重点图书
安徽省高等学校“十一五”省级规划教材
ISBN 978-7-312-02307-1

I. 控… II. 季… III. 控制论 — 高等学校 — 教材 IV. O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 140840 号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址 http://press.ustc.edu.cn
中国科学技术大学印刷厂 印刷
全国新华书店经销

开本：710 × 960 1/16 印张：17.5 插页：2 字数：300 千
2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
定价：32.00 元

编审委员会

总　序

2008 年是中国科学技术大学建校五十周年. 为了反映五十年来办学理念和特色, 集中展示学校教材建设的成果, 学校决定组织编写出版代表学校教学水平的精品教材系列. 在各方的共同努力下, 共组织选题 281 种, 经过多轮、严格的评审, 最后确定 50 种入选精品教材系列.

1958 年学校成立之时, 教员大部分都来自中国科学院的各个研究所. 作为各个研究所的科研人员, 他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统. 同时, 根据"全院办校, 所系结合"的原则, 科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学, 为本科生授课, 将最新的科研成果融入到教学中. 五十年来, 外界环境和内在条件都发生了很大变化, 但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变. 正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针, 并形成了优良的传统, 才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课教学和专业基础课教学的传统, 也是她特别成功的原因之一. 当今社会, 科技发展突飞猛进、科技成果日新月异, 没有扎实的基础知识, 很难在科学技术研究中作出重大贡献. 建校之初, 华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行, 亲自为本科生讲授基础课. 他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德, 带出一批又一批杰出的年轻教员, 培养了一届又一届优秀学生. 这次入选校庆精品教材的绝大部分是本科生基础课或专业基础课的教材, 其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响, 因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校.在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材.五十年来,进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术.

这次入选的 50 种精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校五十年教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.该系列精品教材的出版,既是向学校 50 周年校庆的献礼,也是对那些在学校发展历史中留下宝贵财富的老一代科学家、教育家的最好纪念.

侯建国

2008 年 8 月

前 言

在自动控制专业中, 线性代数或矩阵论是一个重要的数学基础. 比如, 矩阵范数、矩阵函数及矩阵微分方程是线性系统理论必不可少的预备知识, 线性系统多变量频域法建立在多项式矩阵及有理分式矩阵理论基础上, 现代鲁棒控制方法可以采用线性矩阵不等式工具来实现. 即便对于非线性系统, 除了需要引入更深刻的数学工具之外, 矩阵分析方法仍是不可或缺的手段. 因此, 一些大学自动控制专业特别将矩阵分析纳入研究生课程体系, 就是要在大学本科线性代数的基础上, 进一步增加内容以符合控制相关学科的专业需求.

作者在中国科学技术大学自动化系从事"控制理论中的代数基础"教学多年, 从选择现成教材到开始自编讲义, 讲义形式从电子版到胶印版, 内容在不断扩充中. 现在讲义内容已超出 60 至 80 学时的教学量, 教师可以选择一部分讲授, 其余部分可以让学生自学或作为可随时查阅的参考书. 本书涉及范围较广, 编写中参阅了不少经典文献. 编写风格上追求叙述简洁、注重逻辑体系严谨性. 因篇幅所限及个人倾向性, 本书很少讨论相关的计算方法, 虽然算法问题也很重要. 如果作为教学用书, 教师可自行选择讲授范围并增加一些实例. 本书也可作为其它专业研究生、工程师和科研人员的参考书.

本书共分 8 章. 第 1、2 章扼要介绍抽象代数基础. 第 3、4 章讲述线性空间与线性映射, 特别是不变子空间分解定理等. 第 5 章从多项式矩阵入手, 讨论多项式矩阵 Smith 标准形和复矩阵 Jordan 标准形, 并介绍投影矩阵、正规矩阵和 Hermite 二次型等. 第 6 章介绍矩阵范数、矩阵级数和矩阵函数, 并讨论线性系统的稳定性、可控性与可观性. 第 7 章包括各类广义逆矩阵、矩阵方程及矩阵不等式. 第 8 章讨论多项式矩阵的互质、分式矩阵的既约分解, 以及线性系统的零极点与实现理论.

在本书编写过程中, 承蒙中国科学技术大学自动化系各位同仁的支持, 特别

是奚宏生教授、吴刚教授的鼓励与支持. 研究生魏波、王兴虎和陈珊杰对书稿进行了仔细校对. 作者在此一并深表感谢. 限于作者水平, 书中不妥与错误之处在所难免, 敬请读者批评指正.

作者

2008 年春

目　次

第 1 章　集合、映射与关系

在认识世界的过程中,我们常常倾向于从一些具体事件中归纳出有规律性的东西来. 比如说, 我们把数字与具体对象分离开来, 得到初等数学中数的概念, 并给予了加、减、乘、除等运算规律; 在高等数学里, 我们知道对向量、矩阵、函数等可以进行类似的计算. 在数学上, 往往重要的不是对象本身, 而是对象之间的关系, 这样就把对象抽象成集合. 一般代数 (或抽象代数) 的主要内容就是研究所谓的代数系统, 即具有运算的集合. 一般代数在数学的其它分支以及相关学科里都有重要的作用. 本书的前二章对一般代数作一个初步介绍.

1.1　集　　合

集合的概念大家以前在不同场合会遇到过, 这里我们来回顾一下有关的定义及常用记号.

若干个 (有限或无限) 确定的事物的全体叫做一个**集合**, 组成一个集合的事物叫做这个集合的**元素**. 一个没有元素的集合称为空集. 通常我们用大写字母 $A, B, C, \ldots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, c, \ldots$ 表示集合的元素, 用 $\varnothing$ 表示空集.

下面的二种方式都可以表示一个集合:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$$
$$A = \{x : P(x)\}$$

其中第一种方式可用来表示有限或可列集合, 第二种方式可读为满足条件 $P(x)$ 的所有 x 组成的集合.

若 a 是集合 A 的一个元素，就说 a 属于 A 或 A 包含 a，用符号 $a \in A$ 或 $A \ni a$ 来表示；反之若 a 不是集 A 的元，就说 a 不属于 A 或 A 不包含 a，用符号 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$ 来表示.

若集合 B 的每一个元素都属于集合 A，就说 B 是 A 的**子集**，用符号 $B \subset A$ 或 $A \supset B$ 表示；否则就说 B 不是 A 的子集，用符号 $B \not\subset A$ 或 $A \not\supset B$ 表示. 任一集合 A 总可以把空集 $\varnothing$ 和其自身 A 作为该集合的子集，这两个子集称为**平凡子集**.

由一个集合 A 的所有子集作为元素而构成的集合，称为集 A 的**幂集**. 不难证明，如果集 A 是有限集，并具有 n 个元素，则 A 的幂集将有 2^n 个元素. 在这个意义上我们常将 A 的幂集记为 2^A.

若集合 A 和集合 B 所包含的元素完全相同，那么 A 与 B 实际上表示同一个集合，这时称 A 等于 B，即 $A = B$. 显然有

$$A = B \iff A \subset B, A \supset B$$

式中双向蕴含号“$\iff$”表示其左右两边互为(充分必要的)等价命题.

下面对二个集合 A,B 定义一些常见的运算：

$$\begin{aligned}
&\text{并集} \quad A \cup B = \{x:\ x \in A \text{ 或 } x \in B\} \\
&\text{交集} \quad A \cap B = \{x:\ x \in A \text{ 且 } x \in B\} \\
&\text{差集} \quad A \setminus B = \{x:\ x \in A \text{ 且 } x \notin B\} \\
&\text{直积} \quad A \times B = \{(x,y):\ x \in A, y \in B\}
\end{aligned}$$

集合的并和交都满足结合律与交换律，并且并与交之间还符合分配律，即对任意三个集合 A,B,C 有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

在很多情况下，我们的研究对象是限制在一定的范围内，形成一个基本集合(全集)，我们感兴趣的是基本集合里的子集之间的关系. 现设有基本集合 E，以及其中的集合 A $(A \subset E)$，称差集 $E \setminus A$ 为集 A 的补集(余集)，记 $\overline{A} = E \setminus A$.

作为直积的一个例子，两个实数集 $\mathbb{R}$ 的直积为平面点集 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

多个集合之直积可以类似地定义为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n):\ x_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

式中 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 n 元有序组.

1.2 映　　射

我们知道, 函数概念反映了数与数之间的对应关系, 现在我们把函数意义推广一下, 考查一般集合里的元素之间的对应关系.

定义 1.2.1 (映射) 对于两个集合 A 和 B, 如果能够建立某种规则 f, 使得对任给 $a\in A$, 存在唯一的元 $b\in B$ 与之对应, 记为 $f: a\mapsto b$ 或 $f(a)=b$, 那么就称 f 是由集 A 到集 B 的一个映射, 记作 $f: A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$, 其中 a 和 b 可分别叫做映射 f 的原象与象.

在这个定义中, 我们要作以下几点说明：

(1) 映射 f 对集 A 中任意元都有象, 如借用函数的说法, 就是说映射 f 的定义域总是为集 A 全体;

(2) 集 A 中的每个元素在映射 f 下的象总是存在唯一的 (一意性), 并且所有的映象都是集 B 中的元素. 如没有特别说明, 我们考查的映射都是单值的, 集值 (多值) 映射的情形在此不予讨论;

(3) 当 $B=A$, 即 f 是由 A 到其自身的映射时, 可称映射 f 是集 A 上的变换.

例 1.2.1 一个集合 A 上的**恒等 (同) 映射** i_A定义如下：

$$i_A: a\mapsto a,\quad \forall a\in A$$

即恒等映射对每个元来说其象均与原象相同.

如有二个同为由 A 至 B 的映射 f,g, 说这二个映射相等, 是指所有对应的象相等, 即

$$f=g \iff f(x)=g(x),\quad \forall x\in A.$$

定义 1.2.2 对于一个映射 $f: A\to B$

(1) 称 f 是**单射**, 系指不同的原象对应不同的象

$$\forall a_1,a_2\in A,\ a_1\neq a_2 \implies f(a_1)\neq f(a_2);$$

(2) 称 f 是**满射**, 系指 B 的每一个元至少是 A 中某一个元的象, 亦即

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} \{f(a) : a \in A\} = B,$$

式中 $f(A)$ 定义了映射象集;

(3) 称 f 是**双射** (1–1 **映射**) , 系指 f 既是单射又是满射.

不难证明, 上面的定义可以换一种等价的方式, 通过考查方程 $f(x) = b$ ($\forall b \in B$) 的解来表达: f 为单射, 乃指若方程有解则必唯一; f 为满射, 是指方程总有解; f 为双射, 就指方程总是存在唯一解.

例 1.2.2 一个 $m \times n$ 实矩阵 $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 可以看作 n 维实空间到 m 维实空间的映射 (按矩阵乘法) 如下

$$M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$M : x \mapsto Mx$$

设矩阵秩为 $r = \text{rank}M$, 则当 $r = m$ 时, M 为满射; 当 $r = n$ 时, M 为单射; 当 $r = m = n$ 时, M 是 1–1 映射.

将复合函数提法一般化, 就是映射的复合或映射的乘积.

定义 1.2.3 设有三个集合 A, B, C 以及它们之间的二个映射

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

则由 f, g 确定的由 A 到 C 的映射

$$h : a \mapsto g(f(a)), \quad \forall a \in A$$

称为映射 f, g 的**复合映射**, 记作 $h = g \circ f$, 映射复合过程可用右边的映射图表示.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h=g\circ f"] & & C \end{tikzcd}$$

映射的复合 (乘积) 一般不符合交换律, 但结合律成立, 即当

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

就有等式

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

事实上, 首先等式两端都是由 A 到 D 的映射, 又对 $\forall x\in A$, 有

$$
\begin{aligned}
(h\circ(g\circ f))(x)&=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))\\
&=(h\circ g)(f(x))=((h\circ g)\circ f)(x)
\end{aligned}
$$

所以结合律都是成立.

进一步可以证明对多个映射乘积来说, 也可以任意结合. 实际上我们只须保持其相乘次序, 而不需加任何优先括号.

下面的等式, 读者运用映射复合关系不难证明

$$i_B\circ f=f,\quad f\circ i_A=f$$

式中 $f: A\to B$, i_A 和 i_B 分别是 A,B 上的恒等映射.

现在我们来讨论映射的可逆性.

定理 1.2.4 映射 $f: A\to B$ 是双射当且仅当存在映射 $g: B\to A$ 使得

$$g\circ f=i_A,\quad f\circ g=i_B. \tag{1.2.1}$$

证明 当式 (1.2.1) 成立时, 若 $f(a_1)=f(a_2)$ 就有

$$
\begin{aligned}
a_1&=i_A(a_1)=(g\circ f)(a_1)=g(f(a_1))\\
&=g(f(a_2))=(g\circ f)(a_2)=i_A(a_2)=a_2
\end{aligned}
$$

这表明 f 是单射; 又对 $\forall b\in B$, 有

$$b=i_B(b)=(f\circ g)(b)=f(g(b))$$

这说明 b 对映射 f 有原象 $g(b)$, 故 f 是满射.

另一方面, 当 f 是双射时, 对 $\forall b\in B$, 由 f 可确定唯一的 $a\in A$, 使 $f(a)=b$, 由此就可定义从 B 至 A 的映射

$$g: b\mapsto a$$

并且对 $\forall b\in B$, 有

$$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(a)=b$$

于是 $f\circ g=i_B$, 类似可证 $g\circ f=i_A$. ∎