TIANXING EDUCATION 天星教育

高考研究权威专家

高考复习讲义

数学(文科)

杜志建 主编

2009 课标专用

联合推荐

sina 新浪教育　搜狐教育 learning.sohu.com　人民网 people www.people.com.cn　教育频道 edu.QQ.com

天星教研中心十年奉献
北大清华状元年年首选

天星教育图书
登陆www.tesoon.com享受增值
上网登陆 增值服务

新疆青少年出版社

高考研究权威专家

高考复习讲义

数学(文科)

丛书主编：杜志建
本册主编：刘新民　孙璞刚　张传法
本册副主编：卢建状　王建宏　邵　刚

新疆青少年出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考复习讲义:课标版. 文科. 数学/杜志建主编.
乌鲁木齐:新疆青少年出版社,2008.2

ISBN 978-7-5371-5811-4

Ⅰ.高… Ⅱ.杜… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 021839 号

策　　划:杜志建
责任编辑:郑　琴
责任校对:刘　娜
封面设计:魏晋文化 WEIJINWENHUA
版式设计:侯会锋

高考复习讲义·课标版·数学(文科)

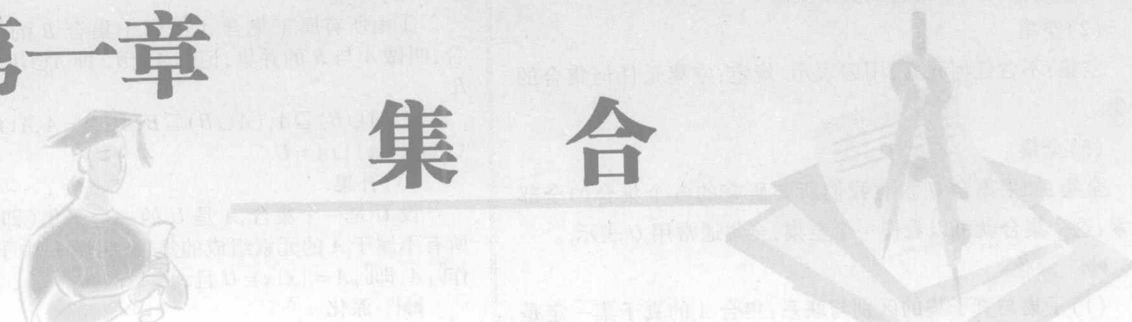
杜志建主编

出　版:新疆青少年出版社
社　址:乌鲁木齐市胜利路 100 号　　　　邮政编码:830001
电　话:0991—2301401(编辑部)　　　　2864403(发行部)
网　址:http://www.qingshao.net
发　行:新疆青少年出版社
经　销:全国各地书店
印　刷:郑州市毛庄印刷厂
开　本:890×1240　1/16　　　　版　次:2008 年 3 月第 1 版
印　张:23.0　　　　　　　　　　印　次:2008 年 3 月第 1 次印刷
印　数:20000 册
书　号:ISBN 978-7-5371-5811-4
定　价:37.00 元

目录

CONTENTS

第一章 集 合



扫描高考

集合是数学中最基本的概念，集合语言是现代数学的基本语言，因此集合是高考的必考内容. 预计 2009 年新课标高考对集合问题的考查有两种形式：一是考查集合的有关概念、集合之间的关系、集合的运算等，题型以选择题、填空题为主；二是考查集合语言、集合思想的理解与运用，题型可以是选择题、填空题，也可以是解答题.

2008 年新课标高考《考试大纲》对本部分的考查内容主要有以下几个方面：

(1)集合的含义与表示；(2)集合间的基本关系；(3)集合的基本运算.

值得特别注意的是《考试大纲》中特别指出“能使用韦恩(Venn)图表达集合的关系及运算”，将对韦恩图的要求提高到一个更高的层次，因此我们必须注意韦恩图在表达集合关系和运算中的重要作用. 另外以集合为背景的新概念问题是高考中常见的开放探究性问题，以集合概念为背景给出新的定义，使问题变得新颖巧妙，这类问题的特点是信息“新”，意义深刻，往往具有一定的实际应用背景，能够考查学生理解新概念的能力和灵活运用知识的能力. 预计 2009 年新课标高考会有所体现.

1 研习考纲重难点

考点一 集合的含义与表示

梳理

(1)集合的定义

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合.

自然数集用 **N** 表示，正整数集用 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示，整数集用 **Z** 表示，有理数集用 **Q** 表示，实数集用 **R** 表示.

(2)元素与集合的关系

集合中的元素通常用小写拉丁字母表示，如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in} A$).

(3)集合的表示方法

集合的表示方法，常用的有列举法和特征性质描述法两种.

根据元素个数，集合可分为两类：

① 有限集：含有有限个元素；

② 无限集：含有无限个元素.

深化

(1)集合是一个相对性概念，几个对象在一起就可以成为一个集合.

(2)根据元素与集合的关系，可以分析集合中元素的特征：确定性、互异性和无序性.

注意

(1)用集合的语言去表述数学问题时，要注意养成自觉使用符号的意识和能力. 如在集合表示方式的选择、集合符号语言的使用中去培养习惯，运用集合的观点分析、处理实际问题.

(2)注意集合表示的列举法与描述法在形式上的区别. 列举法一般适合于有限集，而描述法一般适合于无限集.

考点二 集合间的基本关系

梳理

(1)子集与真子集

①对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，即集合 A 是集合 B 的子集. 空集是任何集合的子集，$\varnothing\subseteq A$. 任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

②对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$ 并且 $A\neq B$，就说集合

高考数学复习必须掌握八大“诀窍”(一) 《考试说明》和《考试大纲》是每位考生必须熟悉的最权威的高考信息，通过研究应明确“考什么”、“考多难”、“怎样考”这三个问题. 纵观近年高考，我们发现命题通常注意试题背景，强调数学思想，注重数学应用；试题强调问题性、启发性，突出基础性；重视通性通法，淡化特殊技巧，凸显数学的问题思考；强化主干知识；关注知识点的衔接，考查创新意识.《考试大纲》明确指出“创新意识是理性思维的高层次表现”. 因此试题都比较新颖，活泼. 所以复习中就要加强对新题型的练习，揭示问题的本质，创造性地解决问题.

名师点拨

A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）.

空集是任何非空集合的真子集.

（2）空集

空集：不含任何元素，用 $\varnothing$ 表示. 规定：空集是任何集合的子集.

（3）全集

全集：如果集合 U 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，全集通常用 U 表示.

▶▶| 深化

（1）子集与真子集的区别与联系：集合 A 的真子集一定是其子集，而集合 A 的子集不一定是其真子集；若集合 A 有 n 个元素，则其子集个数为 2^n，真子集个数为 2^n-1.

（2）全集是一个相对概念，一个全集又可以是另一个集合的子集或真子集，是我们为研究集合关系临时选定的一个集合.

▶▶| 注意

（1）判断两个集合之间的子集、真子集关系可以比照两实数间的关系：

①$A\subsetneqq B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，类比于 $a<b\Leftrightarrow a\leqslant b$ 且 $a\neq b$；

②$A\subseteq B\Leftrightarrow A\subsetneqq B$ 或 $A=B$，类比于 $a\leqslant b\Leftrightarrow a<b$ 或 $a=b$；

③$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$，类比于 $a=b\Leftrightarrow a\leqslant b$ 且 $a\geqslant b$. 也可以用韦恩图直观地表示上述各种关系.

（2）注意集合 $\{\varnothing\}$ 与空集 $\varnothing$ 的区别与联系：$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，$\varnothing\in\{\varnothing\}$.

考点三 集合的基本运算

▶▶| 梳理

（1）交集

①由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

②$(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq B$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）并集

①由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

②$(A\cup B)\supseteq A$，$(A\cup B)\supseteq B$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$，$(\complement_U A)\cup A=U$.

（3）补集

设 U 是一个集合，A 是 U 的一个子集（即 $A\subseteq U$），由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 U 中子集 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

▶▶| 深化

（1）两个结论

①若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$，反之也成立；

②若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$，反之也成立. 应用这两个结论时一定要注意不要忘记集合 $A=\varnothing$ 这一个特例.

（2）可以借助韦恩图或数轴来辅助理解两个集合的交集与并集的特征并用来解题.

▶▶| 注意

（1）对于交集概念的把握要注意以下三方面：

①交集仍是一个集合；

②交集中的元素都是两个集合的"公共元素"，即若 $x\in A\cap B$，一定有 $x\in A$ 且 $x\in B$；

③交集中包括了两集合的全体公共元素，即若 $x\in A$ 且 $x\in B$，一定有 $x\in A\cap B$.

（2）对于并集的理解应注意：

若 $x\in A\cup B$，则有三种可能：

①$x\in A$ 但 $x\notin B$；②$x\in B$ 但 $x\notin A$；③$x\in A$ 且 $x\in B$.

（3）子集、全集、补集等概念实质上即是生活中的"部分"、"全体"、"剩余"等概念在数学中的抽象与反映，当 $A\subseteq U$ 时，$\complement_U A$ 的含义是：从集合 U 中去掉集合 A 的元素后，由所有剩余的元素组成的新集合. 集合 A 的元素补上 $\complement_U A$ 的元素后可合成集合 U.

（4）补集 $\complement_U A$ 与集合 A 的区别：两者没有相同的元素；两者的所有元素合在一起，就是全集.

2 探究解题新思路

题型一 集合的基本概念

典例1 2008年第29届奥运会将在北京召开，现有三个实数的集合，既可以表示为 $\{a,\frac{b}{a},1\}$，也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2008}+b^{2008}=$ ________.

解析 根据集合中元素的确定性，我们不难得到两集合的元素是相同的，这样需要列方程组分类讨论，显然复杂又繁琐. 这时若能发现0这个特殊元素和 $\frac{b}{a}$ 中的 a 不为0的隐含信息，就能得到如下解法.

由已知得 $\frac{b}{a}=0$，及 $a\neq0$，所以 $b=0$，于是 $a^2=1$，即 $a=1$ 或 $a=-1$，又根据集合中元素的互异性 $a=1$ 应舍去，因而 $a=-1$，故 $a^{2008}+b^{2008}=(-1)^{2008}=1$.

☞领悟整合 （1）利用集合中元素的特点，列出方程组求解，但仍然要检验，看所得结果是否符合集合元素的互异性的特征.

（2）此类问题还可以根据两集合中元素的和相等，元素的积相等，列出方程组求解，但仍然要检验.

变式·拓展

1.（2008·江苏镇江月考）给出以下集合：①$M=\{x|x^2+2x+a=0,a\in\mathbf{R}\}$；②$N=\{x|-x^2+x-2>0\}$；③$P=\{x|y=\lg(-x)\}\cap\{y|y=\lg(-x)\}$；④$Q=\{y|y=x^2\}\cap\{y|y=x-4\}$，其中一定是空集的有

A.0个　　B.1个　　C.2个　　D.3个

题型二 集合之间的关系

典例2 设 $A=\{(x,y)|x^2+(y-1)^2=1\}$，$B=\{(x,y)|x$

名师点拨

高考数学复习必须掌握八大"诀窍"（二） 多维审视知识结构. 高考数学试题一直注重对思维方法的考查，数学思维和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括. 知识是思维能力的载体，因此同学们要建立各部分内容的知识网络；全面、准确地把握概念，在理解的基础上加强记忆；加强对易错、易混知识的梳理；要多角度、多方位地去理解问题的实质；体会数学思想和解题的方法.

$+y+m\geqslant 0\}$，若 $A\cap B=A$，求实数 m 的取值范围.

解析 集合 A 是一个圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上的点的集合，集合 B 是一个不等式 $x+y+m\geqslant 0$ 表示的平面区域内的点的集合，由 $A\cap B=A$ 得 $A\subseteq B$，要使 $A\subseteq B$，则应使圆被平面区域所包含（如图 1－1），即直线 $x+y+m=0$ 应与圆相切或相离（在下方），而当直线与圆相切时有 $\frac{|m+1|}{\sqrt{2}}=1$，

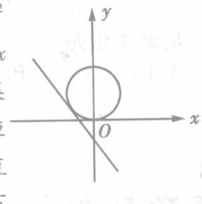


图 1－1

$\therefore m=\sqrt{2}-1$，故 m 的取值范围是 $m\geqslant\sqrt{2}-1$.

领悟整合 解决集合与集合之间的关系问题，常用的方法有：特征分析法，元素分析法，图示法，其中图示法就是利用 Venn 图或数轴或平面图形把两个集合表示出来，再判断它们之间的关系，一般地，元素分析法和图示法能使集合具体化、形象化，从而降低思维难度，简化解题过程，例如本例的解答.

变式·拓展

2.（2008·泰安月考）若集合 $A=\{$直线$\}$，$B=\{$圆$\}$，则集合 $A\cap B$ 的子集的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 1 或 2 或 4

题型三 集合的基本运算

典例 3 设全集是实数集 $\mathbf{R}$，$A=\{x|2x^2-7x+3\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2+a<0\}$.（1）当 $a=-4$ 时，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$；

（2）若 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

解析 （1）$\because A=\{x|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3\}$，当 $a=-4$ 时，$B=\{x|-2<x<2\}$，$\therefore A\cap B=\{x|\frac{1}{2}\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x|-2<x\leqslant 3\}$.

（2）$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<\frac{1}{2}$ 或 $x>3\}$，当 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=B$ 时，$B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$，①当 $B=\varnothing$，即 $a\geqslant 0$ 时，满足 $B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$；②当 $B\neq\varnothing$，即 $a<0$ 时，$B=\{x|-\sqrt{-a}<x<\sqrt{-a}\}$，要使 $B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$，需 $\sqrt{-a}\leqslant\frac{1}{2}$，解得 $-\frac{1}{4}\leqslant a<0$. 综上可得，实数 a 的取值范围是 $a\geqslant-\frac{1}{4}$.

评价探究 高考对集合运算的考查是一个热点，经常考查具体集合的运算，多数情况下会与求函数定义域、值域，解不等式、求范围等问题联系在一起，解答这类问题时要注意弄清楚集合中的元素是什么，然后对集合进行化简，并注意将集合之间的间接关系转化为直接关系进行求解，同时，一定要善于运用数轴等工具帮助分析和运算.

变式·拓展

3. 若集合 $A=\{x|\frac{1}{x}>2,x\in\mathbf{R}\}$，非空集合 B 满足 $A\cup B\subseteq A\cap B$，则有 $\complement_{\mathbf{R}}B=$

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(-\infty,0]\cup[\frac{1}{2},+\infty)$

C. $(-\infty,\frac{1}{2})$　　D. $[\frac{1}{2},+\infty)$

题型四 韦恩图及其应用

典例 4 设全集 U 是实数集 $\mathbf{R}$，$M=\{x|x^2>4\}$，$N=\{x|1<x<3\}$，则图 1－2 中阴影部分所表示的集合是

A. $\{x|-2\leqslant x<1\}$

B. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|1<x\leqslant 2\}$

D. $\{x|x<2\}$

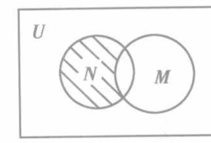


图 1－2

解析 依题意，该图形中阴影部分表示的集合应该是 $N\cap(\complement_{\mathbf{R}}M)$，而 $M=\{x|x^2>4\}=\{x|x>2$ 或 $x<-2\}$，于是 $\complement_{\mathbf{R}}M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，因此 $N\cap(\complement_{\mathbf{R}}M)=\{x|1<x\leqslant 2\}$. 选 C.

评价探究 新课标特别指出“能使用维恩（Venn）图表达集合的关系及运算”，将对韦恩图的要求提高到一个更高的层次，因此我们必须注意韦恩图在表达集合关系和运算中的重要作用. 应结合交集、并集、补集等的定义进行理解.

变式·拓展

4. 设全集为 U，集合 A,B,C 的关系如图 1－3 所示，则下列结论中错误的是

A. $\complement_U B\subseteq\complement_U A$

B. $A\cap C=\varnothing$

C. $A\cup B\subseteq B\cup C$

D. $B\cap C\subseteq A$

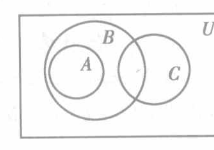


图 1－3

题型五 集合与其他知识的交汇

典例 5 （2007·兴宁月考）设数集 $M=\{x|m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\}$，$N=\{x|n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\}$，且 M、N 都是集合 $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的子集，如果把 $b-a$ 叫做集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 的“长度”，那么集合 $M\cap N$ 的“长度”的最小值是

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

解析 用区间的长度来刻画集合，使“长度”的概念有了更深层次的内涵.

由已知可得 $\begin{cases}m\geqslant 0\\ m+\frac{3}{4}\leqslant 1\end{cases}$，即 $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{4}$；$\begin{cases}n-\frac{1}{3}\geqslant 0\\ n\leqslant 1\end{cases}$，即 $\frac{1}{3}\leqslant n\leqslant 1$. 取字母 m 的最小值 0，字母 n 的最大值 1，可得 $M=[0,\frac{3}{4}]$，$N=[\frac{2}{3},1]$.

$\therefore M\cap N=[0,\frac{3}{4}]\cap[\frac{2}{3},1]=[\frac{2}{3},\frac{3}{4}]$，此时得集合 $M\cap N$ 的“长度”为 $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$，故应选 C.

评价探究 以集合为背景将其他的“长度”等概念交汇于命题之中，是高考集合命题的一大特色，探究解题时紧扣定义及其相互间的联系，巧妙应用特殊化思想可以使解题的思路更为简捷.

高考数学复习必须掌握八大“诀窍”（三） 把答案盖住看例题. 参考书上的例题不能看一下就过去了，因为看时往往觉得什么都懂，其实自己并没有理解透彻. 所以，在看例题时，把解答盖住，自己去做，做完或做不出时再去看，这时要想一想，自己做的哪里与解答不同，哪里没想到，该注意什么，哪一种方法更好，还有没有另外的解法. 经过上面的训练，自己的思维空间扩展了，看问题也全面了.

名师点拨

变式·拓展

5.(2007·湖南)设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$,$S_1,S_2,\cdots,S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集,且满足:对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$,$S_j=(a_j,b_j)(i\neq j,i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\})$,都有 $\min\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\}\neq\min\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\}$($\min\{x,y\}$ 表示两个数 x,y 中的较小者),则 k 的最大值是

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

3 展望命题新动向

动向　命题探源——集合的新运算法则问题

样题　(2007·广东)设 S 是至少含有两个元素的集合.在 S 上定义了一个二元运算“$*$”(即对任意的 $a,b\in S$,对于有序元素对(a,b),在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应).若对任意的 $a,b\in S$,有 $a*(b*a)=b$,则对任意的 $a,b\in S$,下列等式中不恒成立的是

A. $(a*b)*a=a$

B. $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

C. $b*(b*b)=b$

D. $(a*b)*[b*(a*b)]=b$

解析　在 B 选项中,$[a*(b*a)]*(a*b)=b*(a*b)=a$,故 B 正确;在 C 选项中,将 $a*(b*a)=b$ 中的 a 换成 b,即得 $b*(b*b)=b$ 成立,故 C 正确;在 D 选项中,令 $a*b=c$,则 $c*(b*c)=b$ 成立,故 D 正确.只有 A 选项不能恒成立.故选 A.

高考探究　新运算问题已经成为新课标高考的热点,在给出新的运算法则的前提下,考查学生的运算求解能力.集合命题中与运算法则相关的问题,是映射构建下的集合与集合、元素与元素间的运算相关性及封闭性的研究.此类考题多为竞赛题背景下的高观点命题,也是集合命题的一个新动向.

前瞻·预测

1.设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$,在 S 上定义运算为:$A_i\oplus A_j=A_k$,其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数,i、$j=0,1,2,3$.满足关系式$(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$的个数为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

4 优化考题新演练

基础能力检测

1.(2008·广东六校联考)已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x\geqslant1\}$,$N=\{x|\frac{x+1}{x-2}\geqslant0\}$,则$\complement_U(M\cap N)=$

A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|x\leqslant2\}$

C. $\{x|-1<x\leqslant2\}$　　D. $\{x|-1\leqslant x<2\}$

2.(2008·广东省高三第一次联考)设集合 $A=\{x|y=\ln(1-x)\}$,集合 $B=\{y|y=x^2\}$,则 $A\cap B=$

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $(-\infty,1)$

3.(2008·扬州市月考)已知集合 $A=\{x|x^2+\sqrt{m}x+1=0\}$,若 $A\cap\mathbf{R}=\varnothing$,则实数 m 的取值范围是

A. $m<4$　　B. $m>4$　　C. $0\leqslant m<4$　　D. $0\leqslant m\leqslant4$

4.设集合 $M=\{x|x^2-2x<0,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{x||x|<2,x\in\mathbf{R}\}$,则

A. $M\cup N=M$　　B. $(\complement_{\mathbf{R}}N)\cap M=\mathbf{R}$

C. $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=\varnothing$　　D. $M\cap N=M$

5.已知集合 A 中有 10 个元素,B 中有 6 个元素,全集 U 中有 18 个元素,$A\cap B\neq\varnothing$.设集合$\complement_U(A\cup B)$中有 x 个元素,则 x 的取值范围是

A. $3\leqslant x\leqslant8$,且 $x\in\mathbf{N}$　　B. $2\leqslant x\leqslant8$,且 $x\in\mathbf{N}$

C. $8\leqslant x\leqslant12$,且 $x\in\mathbf{N}$　　D. $10\leqslant x\leqslant15$,且 $x\in\mathbf{N}$

6.设 $A\cap B=\varnothing$,$M=\{P|P\subseteq A\}$,$N=\{Q|Q\subseteq B\}$,$\varnothing$为空集,则

A. $M\cap N=\varnothing$　　B. $M\cap N=\{\varnothing\}$

C. $M\cap N=A\cap B$　　D. $(M\cap N)\subsetneqq(A\cap B)$

7.已知集合 $A=\{x|x^2+\frac{5}{2}x+1=0\}$,$B=\{y|y=x^2+a,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则 a 的取值范围为________.

8.已知集合 $A=\{x|x^2-1=0\}$,$B=\{x|x^2-2ax+b=0\}$,若 $B\neq\varnothing$,且 $A\cup B=A$,则实数 a,b 的值一共有________组.

9.(2008·济宁月考)设全集 $U=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$,集合 $M=\{(x,y)|\frac{y+2}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)|y\neq x-4\}$,那么$(\complement_UM)\cap(\complement_UN)=$________.

10.已知集合 $A=\{x|x^2+x-2\leqslant0\}$,$B=\{x|2<x+1\leqslant4\}$,设集合 $C=\{x|x^2+bx+c>0\}$,且满足$(A\cup B)\cap C=\varnothing$,$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,求 b,c 的值.

11.设 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$.

名师点拨

高考数学复习必须掌握八大“诀窍”(四)　研究每题都考什么.数学能力的提高离不开做题,“熟能生巧”这个简单的道理大家都懂.但做题不是搞题海战术,要通过一题联想到很多题.要着重研究解题的思维过程,弄清基本数学知识和基本数学思想在解题中的意义和作用,研究运用不同的思维方法解决同一数学问题的多条途径,在分析解决问题的过程中既构建知识的横向联系又养成多角度思考问题的习惯.

(1)$A\cap B=A\cup B$,求 a 的值;

(2)$\varnothing\subsetneqq A\cap B$,且 $A\cap C=\varnothing$,求 a 的值;

(3)$A\cap B=A\cap C\neq\varnothing$,求 a 的值.

12. 设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$ 为二次函数. 若 $f(x)>0$ 的解集为 A,$B=\{x|1<x<3\}$,$A\cap B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

13. (2007·南头月考)设 n 为正整数,规定:$f_n(x)=\underbrace{f\{f(\cdots f(x)\cdots)\}}_{n个f}$,已知 $f(x)=\begin{cases}2(1-x)\ (0\leqslant x\leqslant 1)\\ x-1\quad (1<x\leqslant 2)\end{cases}$.

(1)解不等式:$f(x)\leqslant x$;

(2)设集合 $A=\{0,1,2\}$,对任意 $x\in A$,证明:$f_3(x)=x$;

(3)求 $f_{2\,007}\left(\frac{8}{9}\right)$ 的值;

(4)若集合 $B=\{x|f_{12}(x)=x,x\in[0,2]\}$,证明:$B$ 中至少包含有 8 个元素.

高考真题回顾

14. (2007·宁夏、海南)设集合 $A=\{x|x>-1\}$,$B=\{x|-2<x<2\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x|x>-2\}$　　B. $\{x|x>-1\}$

C. $\{x|-2<x<-1\}$　　D. $\{x|-1<x<2\}$

15. (2007·广东)已知集合 $M=\{x|1+x>0\}$,$N=\{x|\frac{1}{1-x}>0\}$,则 $M\cap N=$

A. $\{x|-1\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|x>1\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. $\{x|x\geqslant -1\}$

16. (2007·湖北)设 P 和 Q 是两个集合,定义集合 $P-Q=\{x|x\in P$,且 $x\notin Q\}$,如果 $P=\{x|\log_2 x<1\}$,$Q=\{x||x-2|<1\}$,那么 $P-Q=$

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|2\leqslant x<3\}$

17. (2007·湖南)设集合 $A=\{(x,y)|y\geqslant\frac{1}{2}|x-2|\}$,$B=\{(x,y)|y\leqslant -|x|+b\}$,$A\cap B\neq\varnothing$. (1)$b$ 的取值范围是________;(2)若 $(x,y)\in A\cap B$,且 $x+2y$ 的最大值为 9,则 b 的值是________.

高考数学复习必须掌握八大"诀窍"(五) 答题少费时多办事. 解题上要抓好三个字:数,式,形;阅读、审题和表述上要实现数学的三种语言(文字语言、符号语言、图形语言)自如转化. 要重视和加强选择题的训练和研究. 不能仅仅满足于答案正确,还要学会优化解题过程,追求解题质量,少费时,多办事. 在做解答题时,书写要简明、扼要、规范,不要"小题大做",只要写出"得分点"即可.

名师点拨

第二章 函数概念与基本初等函数Ⅰ

扫描高考

函数是高中数学最重要的内容，是贯穿整个中学数学的一条主线，因而一直是高考的必考内容和热点内容.

2008 年新课标高考《考试大纲》对本部分的考查内容主要有以下几个方面：

(1)函数；(2)指数函数；(3)对数函数；(4)幂函数；(5)函数与方程；(6)函数模型及其应用.

由于分段函数自身所具有的特殊性，比其他函数形式具有更重要的功能，更能全面地考查学生的素质和能力，所以在 2009 年新课标高考试题中，分段函数应该是函数命题的热点内容，一般会以选择题和填空题的形式考查，如果出现在解答题中，会和方程、不等式的知识联系起来，综合考查学生的各种能力.

指数函数、对数函数、幂函数是中学数学的重要函数模型，也是函数内容的主体部分，因此是高考重点考查的对象. 预计在 2009 年高考试题中会重点考查这几种函数模型，题型和难度会多样化. 同时将对这部分内容的考查与其他知识融合在一起，体现知识点的交汇也是一个命题点.

新课标高考《考试大纲》中特别指出“对应用意识的考查主要采用解决应用问题的形式”，所以函数的应用应该是 2009 年高考的热点内容，必考内容. 预计在 2009 年高考试题中，考查函数的应用主要有两种形式，一是以选择题、填空题的形式考查几种常见函数模型在实际问题中的应用以及函数零点、函数与方程的关系等，一般为容易题或中档题；二是以解答题的形式考查实际问题以及函数与其他知识，如与方程、不等式、数列、解析几何等的综合，综合性强，难度较大.

第1讲 函数及其表示

1 研习考纲重难点

考点一 函数的概念

梳理

(1)函数的定义

一般地，设 A、B 是两个非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $f(x)$，$x\in A$. 其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域.

(2)函数的构成

函数是由定义域、对应法则、值域这三个要素构成的.

例如：在 A 到 B 的函数 $y=f(x)$ 中，其中 $x\in A$，$y\in B$，原象的集合 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域，象的集合 $C(C\subseteq B)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域. 函数符号 $y=f(x)$ 表示“y 是 x 的函数”，有时简记作函数 $f(x)$，其中 f 表示对应法则.

深化

(1)函数是一种特殊的映射，$f: A\to B$ 必须满足 A、B 都是非空数集，其象的集合是 B 的子集.

(2)构成函数的三要素是：定义域、值域和对应法则，而值域由定义域和对应法则可以确定. 分析判断两函数是否为同一函数时，就从这三个方面进行分析，只有三者完全相同时才为同一个函数.

(3)不同的函数会有不同的对应法则，如 $y=f(x)=\sin x$，其对应法则为“取正弦”.

注意

(1)函数关系的判断要注意“每一个”、“都有”、“唯一”等关键词.

名师点拨

高考数学复习必须掌握八大“诀窍”(六) 错一次反思一次. 平时注意把错题记下来，做错题笔记包括三个方面：(1)记下错误是什么，最好用红笔划出. (2)错误原因是什么，从审题、题目归类、重现知识和找出答案四个环节来分析. (3)错误纠正方法及注意事项. 根据错误原因的分析提出纠正方法并提醒自己下次碰到类似的情况应注意些什么.

(2)注意$f(x)$与$f(a)$的区别,$f(a)$表示当$x=a$时的函数值,是一个常量;而$f(x)$是关于x的函数,一般情况下是一个变量,$f(a)$是$f(x)$的一个特殊值.

考点二 函数的表示法和区间

梳理

(1)函数的表示法

①解析法:就是把两个变量的函数关系用一个等式来表示,这个等式叫做函数的解析表达式,简称解析式.

用解析式表示函数关系的优点是:函数关系清楚,容易根据自变量的值求出对应的函数值,便于用解析式来研究函数的性质.

②列表法:就是列出表格来表示两个变量的函数关系.

用列表法表示函数关系的优点是:不必通过计算就知道自变量取某些值时函数的对应值.

③图象法:就是用函数图象表示两个变量之间的关系.

用图象法表示函数关系的优点是:能直观形象地表示出函数值的变化情况.

(2)区间的定义:设a,b是两个实数,而且$a<b$,我们规定:

①满足不等式$a\leq x\leq b$的实数x的集合叫做闭区间,表示为$[a,b]$;

②满足不等式$a<x<b$的实数x的集合叫做开区间,表示为(a,b);

③满足不等式$a\leq x<b$或$a<x\leq b$的实数x的集合叫做半开半闭区间,分别表示为$[a,b)$,$(a,b]$.

这里实数a与b都叫做相应区间的端点.

深化

(1)平时表示函数常用的表示法是解析法,建立有实际意义的函数解析式,首先要选定自变量,然后寻找等量关系式,求得函数解析式,其中确定其定义域是关键.

(2)若函数在其定义域的不同子集上,因对应法则不同而分别用几个不同的式子来表示,这种函数称为分段函数.

(3)并不是所有的函数都能写出解析式,有时只能用图象法或列表法来表示.

注意

函数表示要注意以下三点:

(1)给出函数解析式,此时的函数定义域是使解析式有意义的自变量的取值范围.

(2)实际问题或几何问题,除了使函数解析式有意义外,还需注意实际问题的隐含限制条件.

(3)不给出函数的具体解析式而给出抽象函数的定义域,可借助中间变量的取值范围,求得函数的定义域.

考点三 映射

梳理

一般地,设A、B是两个非空集合,如果按照某一个确定的对应关系f,使对于集合A中的任意一个元素x,在集合B中都有唯一确定的元素y与之对应,那么就称对应$f:A\rightarrow B$为从集合A到集合B的一个映射.

深化

(1)映射$f:A\rightarrow B$中,A中元素无剩余、一对一或多对一.函数是"非空数集上的映射",其中"值域是映射中象集B的子集".

(2)映射是一种特殊的对应,判断对应是否为映射,关键有两点:一是A中元素必须都有象且唯一,二是B中元素不一定有原象,且A中不同的元素在B中可以有相同的象.

(3)若集合A中有m个元素,集合B中有n个元素,则可构成的映射$f:A\rightarrow B$有n^m个,映射$f:B\rightarrow A$有m^n个.

注意

注意映射的特点:

(1)存在性.映射中集合A的任一个元素在集合B中都有它的象.(研究对象为A)

(2)唯一性.映射中集合A的任一元素在集合B中的象是唯一的.(研究对象为A)

(3)封闭性.A中元素的象必在集合B中.

(4)有序性."A到B"的映射是有方向的,A到B的映射与B到A的映射往往不是同一个映射.

(5)整体性.映射不是只有集合A或者集合B,而是集合A、B以及对应法则f的整体,是一个系统,记作$f:A\rightarrow B$.有时,在映射$f:A\rightarrow B$中,集合A中的元素a对应集合B中的元素b,也可表示为$f:a\rightarrow b=f(a)$或者直接写成$b=f(a)$.

2 探究解题新思路

题型一 函数的概念

典例1 (2008·苏北地区联考)设函数$f(x)$ $(x\in\mathbf{N})$表示x除以2的余数,函数$g(x)$ $(x\in\mathbf{N})$表示x除以3的余数,则对任意的$x\in\mathbf{N}$,给出以下式子:①$f(x)\neq g(x)$;②$g(2x)=2g(x)$;③$f(2x)=0$;④$f(x)+f(x+3)=1$,其中正确的个数是

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析 当x是6的倍数时,可知$f(x)=g(x)=0$,所以①不正确;容易得到当$x=2$时,$g(2x)=g(4)=1$,而$2g(x)=2g(2)=4$,所以$g(2x)\neq 2g(x)$,故②错误;当$x\in\mathbf{N}$时,$2x$一定是偶数,所以$f(2x)=0$正确;当$x\in\mathbf{N}$时,x和$x+3$中必有一个奇数、一个偶数,所以$f(x)$和$f(x+3)$中有一个为0、一个为1,所以$f(x)+f(x+3)=1$正确,故正确的式子有2个,选C.

方法探究 解决这类函数问题的关键是正确理解所给函数的定义,结合定义进行判断.本题中所给出的两个函数都是与自然数被2或3除所得的余数有关,因此应注意联系自然数的性质、奇数和偶数的性质等知识加以解决.

题型二 函数的表示法

典例2 已知$f(x)$是一次函数,且满足$3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$,求$f(x)$的解析式.

解析 求函数解析式的方法有很多种,其中待定系数法是一种常用的方法.

设$f(x)=ax+b(a\neq 0)$,

则$3f(x+1)-2f(x-1)=3ax+3a+3b-2ax+2a-2b=ax+b+5a=2x+17$,

$\therefore a=2,b=7,\therefore f(x)=2x+7$.

评价探究 待定系数法的关键在于列出方程组求解系数,但有很多求解析式的问题不一定会给出是哪一种类型的函数,特别地,在分段函数的解析式的求解过程中,书写一些

名师点拨

高考数学复习必须掌握八大"诀窍"(七) 分析试卷总结经验.将试卷中出现的错误进行分类.(1)遗憾之错.就是分明会做,反而做错了的题;(2)似非之错.记忆得不准确,理解得不够透彻,应用得不够自如,回答不严密、不完整等等;(3)无为之错.由于不会答错了或猜的,或者根本没有答,这是无思路、不理解,更谈不上应用的问题.原因找到后就消除遗憾、弄懂是非、力争有为.

分段函数的解析式的结论时，有些同学的错误写法为：$f(x)=\begin{cases}2x+1\\-2x-3\end{cases}$，$\begin{cases}f(x)=2x+1\\f(x)=-2x-3\end{cases}$，他们错在哪里呢？

变式·拓展

1. 已知$f(1+\frac{1}{x})=\frac{2}{x}-1$，则$f(x)=$______.

题型三 函数的定义域

典例3 （2008·广东澄海区月考）函数$f(x)=\frac{1}{\lg(6-x^2)}$的定义域是______.

解析 要使函数有意义，应有$\begin{cases}6-x^2>0\\\lg(6-x^2)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6-x^2>0\\6-x^2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}\\x\neq\pm\sqrt{5}\end{cases}$，所以函数的定义域是$\{x|-\sqrt{6}<x<-\sqrt{5}$或$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$或$\sqrt{5}<x<\sqrt{6}\}$.

领悟整合 求函数定义域的过程实质就是解不等式或不等式组的过程，应根据函数解析式中各个部分的要求，列出自变量应满足的不等式或不等式组，然后解这个不等式或不等式组，解题中一定要注意考虑全面，同时注意函数定义域的表达形式，必须写成集合或区间的形式.

变式·拓展

2. 若函数$f(x)$的定义域是$[2,+\infty)$，则函数$y=\frac{f(2x)}{x-2}$的定义域是______.

题型四 简单函数的值域

典例4 求下列函数的值域：(1) $y=\frac{x-2}{x+1}$；(2) $y=\frac{1}{2+x-x^2}$.

解析 (1)原式等价于$y=1-\frac{3}{x+1}$，显然$\frac{3}{x+1}\neq 0$，

$\therefore y\neq 1$.

$\therefore$ 函数的值域为：$y\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $\because 2+x-x^2=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}\leqslant\frac{9}{4}$，

此时有三种情况，若$-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}<0$，则$y<0$；

若$-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}=0$，则$y$无意义；若$0<-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}\leqslant\frac{9}{4}$，则$y=\frac{1}{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}\geqslant\frac{4}{9}$.

$\therefore$ 函数的值域为$y\in(-\infty,0)\cup[\frac{4}{9},+\infty)$.

方法探究 对于分子和分母都是一次式的分式函数，求值域的常用方法就是分离常数法，而对于二次函数、含有二次函数的函数、可化为二次函数的函数，都可以借助配方法进行求解. 但不论是用哪种方法，都必须首先研究函数的定义域，在函数定义域的前提下进行求解.

变式·拓展

3. 下表表示y是x的函数，则函数的值域是

x	$0<x<5$	$5\leqslant x<10$	$10\leqslant x<15$	$15\leqslant x\leqslant 20$
y	2	3	4	5

A. $[2,5]$ B. $\{2,3,4,5\}$ C. $(0,20]$ D. $\mathbf{N}$

题型五 分段函数

典例5 （2008·青岛模拟）某出版公司为一本畅销书定价如下：$C(n)=\begin{cases}12n(1\leqslant n\leqslant 24,n\in\mathbf{N}^*)\\11n(25\leqslant n\leqslant 48,n\in\mathbf{N}^*)\\10n(n\geqslant 49,n\in\mathbf{N}^*)\end{cases}$. 这里$n$表示定购书的数量，$C(n)$是定购$n$本书所付的钱数(单位：元).

(1)有多少个n会出现买多于n本书比恰好买n本书所花钱少？

(2)若一本书的成本价是5元，现有两人来买书，每人至少买1本，两人共买60本，问出版公司至少能赚多少钱？最多能赚多少钱？

解析 (1)由于$C(n)$在各段上都是单调增函数，因此在每一段上不存在买多于n本书比恰好买n本书所花钱少的问题，一定是在各段分界点附近因单价的差别造成买多于n本书比恰好买n本书所花钱少的现象.

$\because C(25)=11\times 25=275, C(23)=12\times 23=276$，

$\therefore C(25)<C(23)$，

又$\because C(24)=12\times 24=288$，$\therefore C(25)<C(24)$.

$\because C(49)=49\times 10=490, C(48)=11\times 48=528$，

$\therefore C(49)<C(48)$.

又$\because C(47)=11\times 47=517$，$\therefore C(49)<C(47)$.

又$\because C(46)=11\times 46=506$，$\therefore C(49)<C(46)$.

又$\because C(45)=11\times 45=495$，$\therefore C(49)<C(45)$.

$\therefore$ 这样的n有23，24，45，46，47，48共6个.

(2)设甲买n本书，则乙买$(60-n)$本，且$n\leqslant 30$，$n\in\mathbf{N}^*$(不妨设甲买的书少于或等于乙买的书). ①当$1\leqslant n\leqslant 11$时，$49\leqslant 60-n\leqslant 59$，出版公司赚的钱数$f(n)=12n+10(60-n)-5\times 60=2n+300$；②当$12\leqslant n\leqslant 24$时，$36\leqslant 60-n\leqslant 48$，出版公司赚的钱数$f(n)=12n+11(60-n)-5\times 60=n+360$；③当$25\leqslant n\leqslant 30$时，$30\leqslant 60-n\leqslant 35$，出版公司赚的钱数$f(n)=11\times 60-5\times 60=360$，$\therefore f(n)=\begin{cases}2n+300,1\leqslant n\leqslant 11,n\in\mathbf{N}^*\\n+360,12\leqslant n\leqslant 24,n\in\mathbf{N}^*\\360,25\leqslant n\leqslant 30,n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，$\therefore$ 当$1\leqslant n\leqslant 11$时，$302\leqslant f(n)\leqslant 322$；当$12\leqslant n\leqslant 24$时，$372\leqslant f(n)\leqslant 384$；当$25\leqslant n\leqslant 30$时，$f(n)=360$，故出版公司最少能赚302元，最多能赚384元.

热点点拨 新课标《考试说明》中明确地提出“了解简单的分段函数，并能简单应用”，因此我们要对分段函数给予足够的重视，在解决分段函数问题时基本原则是分段进行. 对于实际应用问题，应根据题意，确定好分段点，在每一段上分析得出其解析式. 对于分段函数的最值问题，一般是将每一段上的最值分别求出，其中的最大者就是整个函数的最大值，其中的最小者就是整个函数的最小值.

题型六 映射的概念

典例6 已知映射$f:A\to B$，其中，集合$B=\{-2,0,4,10\}$，集合B中的元素都是A中元素在映射f下的象，且对任意的$a\in A$，在B中和它对应的元素是$(a+1)(a-2)$，那么集合A

名师点拨

高考数学复习必须掌握八大“诀窍”（八） 优秀是一种习惯. 柏拉图说：“优秀是一种习惯.”好的习惯终生受益，不好的习惯终生后悔、吃亏. 如“审题之错”是否出在急于求成？可采取“一慢一快”战术，即审题要慢，要看清楚，步骤要到位，动作要快，步步为营，稳中求快，立足于一次成功，不要养成唯恐做不完，匆匆忙忙抢着做，寄希望于检查的坏习惯.

中元素的个数最多可能是

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

解析　当$(a+1)(a-2)=10$时,得$a=4,-3$;当$(a+1)(a-2)=4$时,得$a=3,-2$;当$(a+1)(a-2)=0$时,得$a=2,-1$;当$(a+1)(a-2)=-2$时,得$a=0,1$,所以根据映射的定义知集合A中元素的个数最多可能有$4,-3,3,-2,2,-1,0,1$,一共有8个,故选C.

方法探究　根据映射的定义,对于从A到B的映射f:$A\to B$,A中的元素必须有象,但B中的元素可以没有原象,因此当B中的每一个元素都有原象时,A中的元素个数达到最多,因此只需将B中的每一个元素按照给出的对应法则,求出它在A中的原象即可.

变式·拓展

4.(2007·日照周测)设f,g都是由A到A的映射(其中$A=\{1,2,3\}$),其对应法则如下表:

x	1	2	3
f	1	1	2
g	3	2	1

则$f[g(3)]=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 不存在

3 展望命题新动向

动向　课标新题——函数的定义及其表示法问题

样题　(2008·惠州市调研)一张正方形纸片,剪去两个一样的小矩形得到一个"E"图案,如图2-1-1所示,设小矩形的长、宽分别为x、y,剪去部分的面积为20,若$2\leqslant x\leqslant 10$,记$y=f(x)$,则$y=f(x)$的图象是

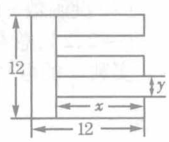
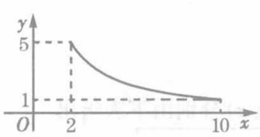
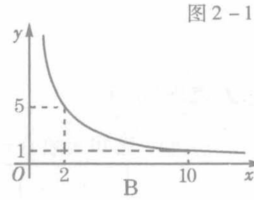


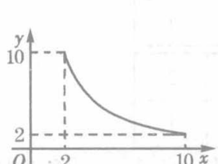
图2-1-1



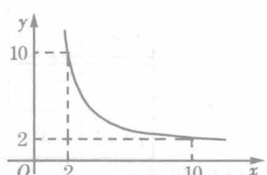
A



B



C



D

解析　由题意知,剪去部分的面积是两个小矩形的面积之和,所以$2xy=20$,即$xy=10$,所以得$y=\frac{10}{x}(2\leqslant x\leqslant 10)$.它的图象是曲线$y=\frac{10}{x}$上位于区间$[2,10]$上的一段,故应选A.

热点点拨　《考试说明》要求我们能够在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数,因此我们应理解函数的几种表示方法,其中最常见、常用的是解析法和图象法,尤其是图象法,在表达函数关系时具有直观、形象的特点,在画函数图象时,应首先根据题意得到函数解析式,同时注意其定义域,结合定义域确定其图象是整条曲线还是曲线的一部分.

前瞻·预测

1.(2008·广东六校联考)设$f(x)=\sqrt{ax^2+bx}$,求满足下列条件的实数a的值:至少有一个正实数b,使函数$f(x)$的定义域和值域相同.

4 优化考题新演练

基础能力检测

1.(2008·扬州新华中学月考)函数$f(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$的定义域是

A. $(-\frac{1}{3},+\infty)$　　B. $(-\frac{1}{3},1)$

C. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D. $(-\infty,-\frac{1}{3})$

2.(2007·佛山模拟)若$f(\tan x)=\cos 2x$,则$f(-\tan\frac{\pi}{3})$的值是

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.已知f:$x\to -\sin x$是集合$A(A\subseteq[0,2\pi])$到集合$B=\{0,\frac{1}{2}\}$的一个映射,则集合A中的元素个数最多有

A. 4个　　B. 5个　　C. 6个　　D. 7个

4.(2008·东北育才中学月考)已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x\ (x<0)\\ \sqrt{3}\ (0\leqslant x\leqslant 1)\\ \log_{\frac{1}{3}}x\ (x>1)\end{cases}$,则当$a<0$时,$f(f(f(a)))$的值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

5.(2007·广东模拟)定义两种运算:$a\oplus b=\sqrt{a^2-b^2}$,$a\otimes b=\sqrt{(a-b)^2}$,则函数$f(x)=\frac{2\oplus x}{(x\otimes 2)-2}$

A. 是奇函数　　B. 是偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 是非奇非偶函数

6.下表显示出函数值y随自变量x变化的一组数据,由此判断它最可能的函数模型是

知识拓展

德摩根公式　$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$,$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

包含关系:$A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow\complement_U B\subseteq\complement_U A\Leftrightarrow A\cap\complement_U B=\varnothing\Leftrightarrow\complement_U A\cup B=\mathbf{R}$.

容斥原理:$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}\ A+\mathrm{card}\ B-\mathrm{card}(A\cap B)$;

$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}\ A+\mathrm{card}\ B+\mathrm{card}\ C-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(C\cap A)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

x	4	5	6	7	8	9	10
y	15	17	19	21	23	25	27

A. 一次函数模型　　B. 二次函数模型

C. 指数函数模型　　D. 对数函数模型

7.（2008 · 烟台期中）已知两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域和值域都是集合 $\{1,2,3\}$，其定义如下表：

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则方程 $g[f(x)]=x$ 的解集为

A. $\{1\}$　　B. $\{2\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\varnothing$

8.（2008 · 湖南师大附中测试）设两质点 P 和 Q 同时从同一地点沿同一方向做直线运动，其运动速度分别为 $v=v_1(t)$ 和 $v=v_2(t)$，如图 2－1－2 所示，用 $d=d(t)$ 表示在 t 时刻两质点的距离. 则 $d=d(t)$ 的图象大致为

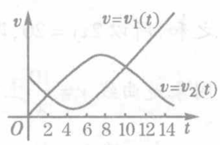
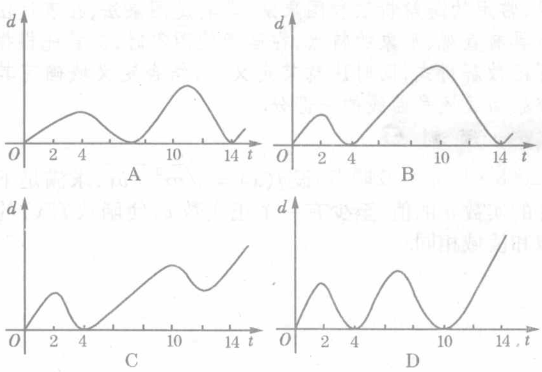


图 2－1－2



9. 如果存在直线 $y=k$，使得函数 $y=x^2+x+\frac{a}{2}$ 的图象与函数 $y=ax^2-x-1$ 的图象分别位于直线 $y=k$ 的上方和下方，则实数 a 的取值范围是________.

10. 若函数 $f(x)=\sqrt{x}+2^x+\log_2 x$ 的值域是 $\{3,\frac{3}{2}\sqrt{2}-1,5+\sqrt{2},20\}$，则其定义域是________.

11. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$，则 $f[f(5)]=$________.

12.（2008 · 东北育才中学模拟）设函数 $f(x)=\begin{cases}1, 1\leqslant x\leqslant 2\\ x-1, 2<x\leqslant 3\end{cases}$，$g(x)=f(x)-ax, x\in[1,3]$，其中 $a\in\mathbf{R}$，记函数 $g(x)$ 的最大值与最小值的差为 $h(a)$.

（1）求函数 $h(a)$ 的解析式；

（2）画出函数 $y=h(a)$ 的图象并指出 $h(a)$ 的最小值.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}, x\in[-2,-1)\\ -2, x\in[-1,\frac{1}{2})\\ x-\frac{1}{x}, x\in[\frac{1}{2},2]\end{cases}$，

（1）求 $f(x)$ 的值域；

（2）设函数 $g(x)=ax-2, x\in[-2,2]$，若对于任意 $x_1\in[-2,2]$，总存在 $x_0\in[-2,2]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

高考真题回顾

14.（2007 · 北京）已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出：

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为________；满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是________.

15.（2007 · 山东）给出下列三个等式：$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是

A. $f(x)=3^x$　　B. $f(x)=\sin x$

C. $f(x)=\log_2 x$　　D. $f(x)=\tan x$

16.（2007 · 浙江）函数 $y=\frac{x^2}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$ 的值域是________.

第 2 讲　函数的基本性质

1 研习考纲重难点

考点一　函数的单调性

梳理

函数的单调性：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I：

如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 D 上是增函数；

如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 D 上是减函数；

知识拓展

解连不等式 $N<f(x)<M$ 常有以下转化形式

$N<f(x)<M\Leftrightarrow[f(x)-M][f(x)-N]<0\Leftrightarrow|f(x)-\frac{M+N}{2}|<\frac{M-N}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)-N}{M-f(x)}>0\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)-N}>\frac{1}{M-N}$

如果函数$f(x)$在区间D上是增函数或减函数,那么就说$y=f(x)$在这个区间上具有(严格的)单调性,区间D叫做$y=f(x)$的单调区间.

深化

(1)利用定义证明函数的单调性的步骤:①任取$x_1,x_2\in D$,且$x_1<x_2$;②作差$f(x_1)-f(x_2)$(有时也可以作商);③变形(通常是因式分解、配方、分子有理化或分母有理化等);④定号(即判断差$f(x_1)-f(x_2)$的正负);⑤判断(即指出函数$f(x)$在给定的区间D上的单调性).

(2)复合函数单调性的判断."同增异减法"即

$y=f(u)$	增	增	减	减
$u=g(x)$	增	减	增	减
$y=f[g(x)]$	增	减	减	增

注意

(1)判断或证明函数的单调性应熟悉已学习过的一次函数、二次函数及反比例函数的单调性,善于运用复合函数的单调性对复杂的函数的单调性加以判断,从而求得其单调区间.

(2)判断函数单调性或求单调区间时也可以采用导数法.

考点二 最大(小)值及其几何意义

梳理

(1)一般地,设函数$y=f(x)$的定义域为I,如果存在实数M满足:

①对于任意的$x\in I$,都有$f(x)\leq M$;

②存在$x_0\in I$,使得$f(x_0)=M$.

那么,我们称M是函数$y=f(x)$的最大值.

(2)一般地,设函数$y=f(x)$的定义域为I,如果存在实数N满足:

①对于任意的$x\in I$,都有$f(x)\geq N$;

②存在$x_0\in I$,使得$f(x_0)=N$.

那么,我们称N是函数$y=f(x)$的最小值.

深化

(1)函数的最值与函数的值域从概念上看是不同的,函数值域的一些边界值并非是函数的最值.

(2)函数最值的几何意义是对应函数图象上点的纵坐标的最大值或最小值,亦即函数图象的最高点或最低点,故有时可结合函数图象分析函数的最值.

注意

(1)求一个函数的最值时,应首先考虑函数的定义域.

(2)函数的最值是函数值域中的一个取值,是自变量x取了某个值时的对应值,故函数取得最值时,一定有相应的x的值.

考点三 函数的奇偶性

梳理

(1)偶函数:一般地,如果对于函数$f(x)$定义域内的任意一个x,都有$f(-x)=f(x)$,那么函数$f(x)$就叫做偶函数.

(2)奇函数:一般地,如果对于函数$f(x)$定义域内的任意一个x,都有$f(-x)=-f(x)$,那么函数$f(x)$就叫做奇函数.

(3)奇偶性:①如果函数$f(x)$是奇函数或偶函数,那么我们就说函数$f(x)$具有奇偶性.

②如果函数$f(x)$满足$f(-x)=f(x)$且$f(-x)=-f(x)$,则称函数$f(x)$既是奇函数又是偶函数.

③若函数$f(x)$有$f(-x)\neq f(x)$且$f(-x)\neq -f(x)$,则称函数$f(x)$为非奇非偶函数.

深化

函数的奇偶性与单调性:

(1)定义域含零的奇函数有$f(0)=0$(可用于求参数);若所给函数的解析式较为复杂,应先化简,再判断其奇偶性.

(2)奇函数在对称的两个单调区间内有相同的单调性;偶函数在对称的两个单调区间内有相反的单调性.

(3)确定函数的单调性或单调区间,在解答题中常用定义法、导数法,在选择题、填空题中还常用数形结合法、特殊值法等等.

注意

(1)判断函数奇偶性之前务必先考查定义域是否关于原点对称,即:若函数$f(x)$具有奇偶性,则$f(x)$定义域关于原点对称.反之,函数定义域不关于原点对称,该函数无奇偶性.确定奇偶性的常用方法有:定义法、图象法等.

(2)存在既是奇函数又是偶函数的函数,它们的特点是定义域关于原点对称,且解析式化简后等于零.

考点四 奇偶函数的图象特征

梳理

(1)奇函数的图象关于原点对称,反过来,如果一个函数的图象关于原点对称,那么这个函数是奇函数.

(2)偶函数的图象关于y轴对称,反过来,如果一个函数的图象关于y轴对称,那么这个函数是偶函数.

深化

(1)奇函数的图象关于原点成中心对称图形,偶函数的图象关于y轴成轴对称图形,反之也成立.所以可以根据函数图象的对称性去判断函数的奇偶性.

(2)如果函数$f(x)$是偶函数,那么有$f(x)=f(-x)=f(|x|)$;反之也成立.这在解决与偶函数有关的问题时经常用到.

注意

通过函数图象判断函数的奇偶性时,同样要判断该图象是否符合奇偶函数的定义.

2 探究解题新思路

题型一 函数单调性的判断

典例1 判断函数$f(x)=e^x+e^{-x}$在区间$(0,+\infty)$上的单调性.

解析 可以利用定义法和导数法来判断函数的单调性.

方法一(定义法) 设$0<x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1}+e^{-x_1}-e^{x_2}-e^{-x_2}=(e^{x_2}-e^{x_1})(\frac{1}{e^{x_1+x_2}}-1)$,

又$0<x_1<x_2$,$\therefore e^{x_2}-e^{x_1}>0$,且$e>1$,$x_1+x_2>0$,

知识拓展

方程$f(x)=0$在(k_1,k_2)上有且只有一个实根,与$f(k_1)f(k_2)<0$不等价,前者是后者的一个必要而不充分条件,特别地,方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有且只有一个实根在(k_1,k_2)内,等价于$f(k_1)f(k_2)<0$,或$f(k_1)=0$且$k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2}$,或$f(k_2)=0$且$\frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2$.

$\therefore e^{x_1+x_2}>1$,故$\frac{1}{e^{x_1+x_2}}-1<0$,

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$,由单调函数的定义知函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上为增函数.

方法二(导数法) 由$f(x)=e^x+e^{-x}$求导得:$f'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)$,

当$x\in(0,+\infty)$时,有$e^{-x}>0$,$e^{2x}-1>0$,此时$f'(x)>0$,

$\therefore$函数$f(x)=e^x+e^{-x}$在区间$(0,+\infty)$上为增函数.

领悟整合 判断函数的单调性或求函数的单调区间的一般方法有:(1)定义法;(2)图象观察法;(3)利用已知函数的单调性;(4)利用复合函数的单调性法则;(5)利用导数法.利用定义法的关键是对$f(x_1)-f(x_2)$的整理、化简、变形和符号的判断,其中变形的策略有因式分解、配方、分子(分母)有理化等.

变式·拓展

1.(2008·江苏江阴期中)若函数$f(x)=|\log_a x|(0<a<1)$在区间$(a,3a-1)$上单调递减,则实数a的取值范围是__________.

题型二 函数单调区间的求解

典例2 已知函数$f(x)=\frac{x}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$,求$f(x)$的单调区间,并加以证明.

解析 由函数的单调区间(增区间,减区间)的定义入手分析,取$x_1<x_2$,分析$f(x_1)-f(x_2)$的符号,由此求出单调增区间与单调减区间.

$\because f(x)=\frac{x}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$是奇函数,

$\therefore$只需研究$(0,+\infty)$上$f(x)$的单调区间即可.

任取$x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且$x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$.

$\because x_1^2+1>0,x_2^2+1>0,x_2-x_1>0$,

而$x_1,x_2\in(0,1)$时,$x_1x_2-1<0$;

$x_1,x_2\in[1,+\infty)$时,$x_1x_2-1>0$,

$\therefore$当$x_1,x_2\in(0,1)$时,$f(x_1)-f(x_2)<0$,函数$y=f(x)$是增函数;

当$x_1,x_2\in[1,+\infty)$时,$f(x_1)-f(x_2)>0$,函数$y=f(x)$是减函数.

又$f(x)$是奇函数,$\therefore f(x)$在$(-1,0)$上是增函数,在$(-\infty,-1]$上是减函数;

又$x\in[0,1)$,$u\in(-1,0]$时,恒有$f(x)\geqslant f(u)$,等号只在$x=u=0$时取得,故$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

综上可知,函数$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数,在$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$上是减函数.

领悟整合 本题中利用定义法求解时,区间边界值的求解可以近似取$x_1=x_2$时,使$f(x_1)-f(x_2)=0$的根作为单调区间的分界(在该点附近处可以判断其因式的正负).如果函数解析式中含有参数(字母)往往需要考虑分类讨论的思想方法.

题型三 函数单调性的应用

典例3 已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)=\frac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$是奇函数.

(1)求a,b的值;

(2)若对任意的$t\in\mathbf{R}$,不等式$f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$恒成立,求k的取值范围.

解析 (1)因为$f(x)$是奇函数,所以$f(0)=0$,即$\frac{b-1}{a+2}=0\Rightarrow b=1$,所以$f(x)=\frac{1-2^x}{a+2^{x+1}}$.

又由$f(1)=-f(-1)$,知$\frac{1-2}{a+4}=-\frac{1-\frac{1}{2}}{a+1}\Rightarrow a=2$.

(2)由(1)知$f(x)=\frac{1-2^x}{2+2^{x+1}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$,

易知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数.又因为$f(x)$是奇函数,从而不等式$f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$等价于$f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)=f(k-2t^2)$,因$f(x)$为减函数,由上式推得:

$t^2-2t>k-2t^2$.即对一切$t\in\mathbf{R}$有:$3t^2-2t-k>0$,

从而判别式$\Delta=4+12k<0\Rightarrow k<-\frac{1}{3}$.

方法探究 已知函数是奇函数,除了利用奇函数的定义建立关于参数的关系式,求出参数值的方法外,还可以采用特殊值法,尤其是当函数在原点处有定义时,可以利用$f(0)=0$求出参数的值.另外在解决与函数有关的不等式问题时,一般要借助函数的单调性求解不等式,这时往往要把函数的奇偶性和单调性结合起来,通过对所给不等式进行恰当地转化,最终利用单调性解决问题.

变式·拓展

2.(2008·江苏如皋、海安期中)函数$f(x)$的定义域为$D=\{x|x>0\}$,且满足:对于任意$m,n\in D$,都有$f(m\cdot n)=f(m)+f(n)$.

(1)求$f(1)$的值;

(2)如果$f(2)=1$,$f(3x+1)+f(2x-6)\leqslant 2$,且$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,求$x$的取值范围.

题型四 函数的最值

典例4 函数$y=x^2-2x$在区间$[-1,m]$上的最大值点与最小值点之间的距离是$2\sqrt{5}$,则实数m的取值范围是__________.

解析 由于当$x=-1$时,$f(-1)=3$,当$m=1$时,函数$y=x^2-2x$在区间$[-1,m]$上的最大值点$(-1,3)$与最小值点$(1,-1)$之间的距离恰好是$2\sqrt{5}$,因此当$m<1$时,函数$y=x^2-2x$在区间$[-1,m]$上的最大值点$(-1,3)$与最小值点(m,m^2-2m)之间的距离一定小于$2\sqrt{5}$;而当$1<m\leqslant 3$时,函数$y=x^2-2x$在区间$[-1,m]$上的最大值点都是$(-1,3)$,最小值点都是$(1,-1)$,符合题意;当$m>3$时,函数$y=x^2-2x$在区间$[-1,m]$上的最大值点不再是$(-1,3)$,而是(m,m^2-2m),与最小值点$(1,-1)$之间的距离大于$2\sqrt{5}$,不符合题意,故m的取值范围是$1\leqslant m\leqslant 3$.

方法探究 二次函数在闭区间上的最值问题是一种非常重要的题型,分类讨论是解决这类问题的常用办法.因此在解决含有参数的二次函数最值问题时,应注意分类讨论.

知识拓展

函数的单调性 设$x_1,x_2\in[a,b]$,$x_1\neq x_2$,那么

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增函数;

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数.