青年数学小丛书

对　称

段学复

北京市数学会编

中国青年出版社

青年数学小丛书

对　　称

段学复

北京市数学会编

中国青年出版社
1963年·北京

內 容 提 要

对称，照字面来說，就是两个东西相对又相称，因此把这两个东西对换一下，好像沒有动过一样．本书主要介紹有关对称的数学，先講代数对称，再講几何对称，最后引出了“群”的概念．“群”的概念在近代数学中是最重要的概念之一，它不只对于代数学和几何学，也对于数学分析以至于理論物理学都有重大的应用．通过这些內容，作者还企图帮助讀者了解：数学理論是由具体实际中抽象出来的，而又有具体实际的应用．

对 称

段 学 复

*

中 国 青 年 出 版 社 出 版

（北京东四12条老君堂11号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第036号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

787×1092 1/32 1 1/4印張 1插頁 17,000字

1962年11月北京新1版 1965年3月北京第2次印刷

印数28,001—58,000 定价(7)0.16元

編 者 的 話

数学課外讀物对提高学生的学习兴趣，学好数学，以及扩大他們的数学知識領域，具有重要的意义。近年来，越来越多的中学教师和中学生，都迫切希望出版更多的适合青年人閱讀的通俗数学讀物。在一些关心青年数学教育的数学家的热情敦促下，我們約請了一些数学工作者，編写这一套“青年数学小丛書”，准备陆續分批分册出版，想来适应这样一个要求。

考虑到这套小丛書是中学生的課外讀物，在編写时，我們希望做到：不脫离学生現有的知識水平，又必須在已有基础上逐步加深和提高，以培养学生深入鑽研的精神；要介紹一些課外的饒有趣味的富有启发性的数学知識，但又不完全脫离当前教学內容，或把高等数学中的內容簡单的搬过来。

这是我們的初步想法和尝試。热切地希望数学工作者和讀者对我們的工作提出宝貴的意見和建議，更希望数学工作者为青年人写出更多更好的数学課外讀物。

北京市数学会

1962 年四月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　次

写在前面

对称，照字面来講，就是两个东西相对而又相称（或者說相仿，相等）。因此，把这两个东西对换一下，好像沒有动过一样。

对称的概念，可以說和近世代数学中"群"的概念是分不开的。当然，群的一般抽象定义一直到上世紀末才完全确立，就是比較具体而特殊的"排列群"的定义，也只不过早有了几十年光景；而对称的概念，尤其是几何方面对称的概念，却是老早就有了的。实际上，在建筑設計方面，在衣物装飾方面，对称的概念一直起着重要的作用。自然界中，矿物結晶体显示出对称。人的身体的外形，也是左右对称的。

这本小册子，主要是向大家介紹有关对称的数学：先講代数对称；再講几何对称，包括对于装飾和結晶体的应用；最后引出群的定义。通过这些内容，还希望能够帮助大家了解：数学理論是由具体实际中抽象出来的，而又有具体实际的应用。一方面，数学理論有高度的抽象性，它往往把一些表面上看来好像沒有什么关系的东西从量的側面很紧密地联系和統一起来。另一方面，数学理論有广泛的实际应用，它往往可以应用到极其广泛而不同的方面去。

一　代数对称——对称多項式和推广

1. 一元二次方程的根的对称多項式

假設 a, b, c 都是实数，而且 $a\neq 0$，又假設 x 是未知数(变数或文字)，那末 x 的二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

和

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

依照判別式 $b^2-4ac\gtreqless 0$ 三种不同情况，两根 x_1, x_2 或是不相等的两个实数，或是相等的两个实数，或是共軛的两个复数。

更一般些，假設 $a(\neq 0), b, c$ 是任何复数，x_1, x_2 仍是方程(1)的两个根(因为把它們代进 ax^2+bx+c 就得0)，而且也是复数，这是因为任何复数(如 b^2-4ac)的平方根还是复数.

事实上，假設 $a+bi$ 是个复数，这里 a 和 b 是实数．我們也可以写：

$$a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

$$\rho=+\sqrt{a^2+b^2},\qquad \theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}. \tag{3}$$

根据棣美弗(De Moivre)公式，有：

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

和

$$\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{4}$$

其中$\sqrt{\rho}$取非負的值.

我們也可以換一个方法来做. 假設

$$\sqrt{a+bi}=c+di, \tag{5}$$

其中 c 和 d 都是实数,那末

$$a+bi=(c+di)^2=(c^2-d^2)+2cdi, \tag{6}$$

所以
$$c^2-d^2=a, \quad 2cd=b. \tag{7}$$

由此
$$\begin{aligned} c^2+d^2&=\sqrt{(c^2+d^2)^2} \\ &=\sqrt{(c^2-d^2)^2+(2cd)^2}=\sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

所以
$$\begin{aligned} c^2&=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0, \\ d^2&=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0. \end{aligned} \tag{9}$$

c 有两值, d 有两值,但 c 定后 d 也决定了, 因为 $2cd=b$, (可設$b\neq 0$). 这样决定了的两个 $c+di$ 平方起来确实是 $a+bi$,因此就是 $a+bi$ 的两个平方根.

韦达(Viète)定理告訴我們,一元二次方程的两个根有如下的关系:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{10}$$

x_1+x_2 和 x_1x_2 都有这样性質:把 x_1 和 x_2 对換,結果仍然不变,因为

$$x_1+x_2=x_2+x_1, \quad x_1x_2=x_2x_1. \tag{11}$$

凡是有这样性質的 x_1 和 x_2 的多項式叫做**对称多項式**,例如 $x_1^2+x_2^2$, $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ 等也都是,但是 x_1-x_2 不是. x_1+x_2 和 x_1x_2 叫做**初等对称多項式**. 可以証明,凡是 x_1 和 x_2 的对称多項式都可以用这两个初等对称多項式表出来. 例如(这不是証明!):

$$
\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\left(\therefore=\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)\\
x_1^2x_2+x_1x_2^2&=x_1x_2(x_1+x_2)\left(\therefore=-\frac{bc}{a^2}\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

2. 一元 n 次方程的根的对称多項式

我們現在来看看一般情况. 假設 n 是一个正整数,又假設 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是复数,且 $a_0\neq 0$, 現在有一元 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{13}$$

著名的代数基本定理告訴我們,这样的方程有 n 个根,都是复数,假設就是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 其中可以有相同的. 根据因子定理,应有

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \tag{14}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.c

$n=3$ 和 4 的情形，求根有一般的公式①. 当 $n\geqslant 5$ 的时候，求根沒有像二次那样一般的公式. 求出实数根的近似值(即和正确值相接近的值)的一般方法，尤其是当 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是实数的情形，是我国南宋数学家秦九韶在 1247 年首先作出的，比英国霍納(Horner)的发現(1819 年)要早得多. 对于复数根的情形，是俄国大数学家罗巴切夫斯基 (Лобочевский) 作出的(1834 年)②.

和二次的情形相仿，韦达公式給出：

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+\cdots+x_n &= -\frac{a_1}{a_0},\\
x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n &= \frac{a_2}{a_0}, \quad (15)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.
\end{aligned}
$$

像 $x_1+x_2+\cdots+x_n$，$x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n$，$\cdots$，$x_1x_2\cdots x_n$ 等这样多項式，不論我們把哪两个根 x_i 和 x_j $(i\neq j)$ 对換一下，因之也就是不論我們对于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 作怎样的排列，(因为任何的排列都可以用两个根 x_i 和 x_j 对換的办法經过几次对換得来，) 都不变动，所以就叫做 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多項式. 它們也叫做初等对称多項式，因为根的任一个对称多項式都可以用这些初等对称多項式的

① 关于三次、四次方程根的公式，参看庫洛什著《高等代数教程》，中譯本第 311-319 頁，或奧庫涅夫著《高等代数》，中譯本下册第 211-226 頁.

② 关于根的近似計算，参看庫洛什著《高等代数教程》，中譯本第 349-356 頁，或奧庫涅夫著《高等代数》，中譯本下册第 92-100 頁和 191-195 頁.

多項式表示出来. 这就是所謂对称多項式的基本定理,我們在这里不去証明,只提一下,有一种証明是利用所謂字典排列法,那就是說,假定有两个項 $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 和 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$,依次比較它們所含的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的指数,如果第一个不是0的差 $l_i - m_i$ 是正数,我們就說第一項是在第二項的前面. 例如 $x_1^6x_2^3$ 就在 $x_1^6x_2^2x_3x_4$ 的前面,因为 x_1 的指数差是 $6-6=0$,而 x_2 的指数差是 $3-2=1$①.

我們現在証明一个比較簡单的情形,就是牛頓(Newton)公式,也就是来証明,

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \ (k \geqslant 1 \text{ 整数}) \tag{16}$$

都可以用这些初等对称多項式的多項式表出来. 这里符号 s_k 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 k 次方幂的和.

我們先看一看 $n=2$ 的情形. 为了簡单起見,可以假設 $a=1$,那样就有

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2). \tag{17}$$

我們已有 $$s_1 = x_1 + x_2 = -b, \quad x_1x_2 = c. \tag{18}$$

因为 $$x_1^2 + bx_1 + c = 0, \quad x_2^2 + bx_2 + c = 0, \tag{19}$$

相加,得:

$$s_2 + bs_1 + 2c = 0,$$

① 关于对称多项式的基本定理的詳細証明,可以参看庫洛仟著《高等代数教程》,中譯本第263-271頁,或奥庫涅夫著《高等代数》,中譯本下册第162-174頁。

或

$$s_2 = -bs_1 - 2c = b^2 - 2c. \tag{20}$$

因为 $\quad x_1^3 + bx_1^2 + cx_1 = 0, \quad x_2^3 + bx_2^2 + cx_2 = 0, \quad$ (21)

相加，得：

$$s_3 + bs_2 + cs_1 = 0,$$

或

$$s_3 = -bs_2 - cs_1 = -b^3 + 3bc, \tag{22}$$

同样

$$s_4 + bs_3 + cs_2 = 0,$$

或

$$s_4 = b^4 - 4b^2c + 2c^2, \tag{23}$$

$$s_5 + bs_4 + cs_3 = 0,$$

或

$$s_5 = -b^5 + 5b^3c - 5bc^2. \tag{24}$$

……………………………………

对于任意 n 的情形，我們也可以同样进行． 下面我們引进符号 $\sum$，例如用 $\sum x_1^{k-1}x_2$ 表

$$x_1^{k-1}x_2 + \cdots + x_1^{k-1}x_n + x_2^{k-1}x_1 + \cdots$$

$$+ x_2^{k-1}x_n + \cdots + x_n^{k-1}x_1 + \cdots + x_n^{k-1}x_{n-1}.$$

若 $k \leqslant n$，就有

$$s_{k-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = s_k + \sum x_1^{k-1}x_2,$$

$$s_{k-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) = \sum x_1^{k-1}x_2 + \sum x_1^{k-2}x_2x_3, \tag{25}$$

……………………………

$$s_{k-i}(x_1x_2 \cdots x_i + \cdots) = \sum x_1^{k-i+1}x_2 \cdots x_i + \sum x_1^{k-i}x_2 \cdots x_{i+1},$$

....

$$s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)=\sum x_1^2x_2\cdots x_{k-1}+k\sum x_1x_2\cdots x_k.$$

以 $-1, +1, -1, \cdots$ 依次乘各式，然后加起来，就得到：

$$-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)$$
$$=-s_k+(-1)^{k-1}k\sum x_1x_2\cdots x_k,$$

或

$$s_k-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)$$
$$+(-1)^k k(x_1x_2\cdots x_k+\cdots)=0,$$

或
$$a_0s_k+a_1s_{k-1}+a_2s_{k-2}+\cdots+ka_k=0. \qquad (26)$$

若 $k>n$，那末(25)中最后一式应是

$$s_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n)=\sum x_1^{k-n+1}x_2\cdots x_n, \qquad (27)$$

从而得到

$$s_k-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^n s_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n)=0,$$

或
$$a_0s_k+a_1s_{k-1}+a_2s_{k-2}+\cdots+a_ns_{k-n}=0. \qquad (28)$$

对 $k>n$，也可簡单利用下面式子

$$0=x_i^{k-n}(a_0x_i^n+a_1x_i^{n-1}+\cdots+a_n)$$

$$=a_0x_i^k+a_1x_i^{k-1}+\cdots+a_nx_i^{k-n} \qquad (29)$$

而得到(28)。利用(26)和(28)等公式，由 $k=1$ 开始，可以依次把 s_k 表为 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的多項式。

我們还可以作一些推广.

設 $n=3$，那末 $x_1+x_2+x_3, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 等都是对称多項式，可是 x_1+x_2，x_1-x_2，$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ 等都不是. 我們可以更仔細地区别一下：

x_1-x_2 只有当 x_1，x_2，x_3 都不变时才不变，也就是說，只对排列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ 才不变.

x_1+x_2 对排列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$ 不变.

$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ 对排列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ 不变.

这一些事实启发我們去考慮 n 个文字的某些排列的集合，它們之中任意两个接連实施的結果仍然是原来那些排列中的一个(这叫做**群**)，并且考慮对于这些排列来講是不变的或者对称的多項式. 这种想法最初是由法国天才数学家伽罗华(Galois, 1811-1832) 搞清楚的，并引导着他彻底解决了五次和五次以上的一般方程不能用根式来解的問題. 他不但証明了，不存在求根的一般公式，按照这个公式从一般方程的系数出发只經过加，减，乘，除以及开方(根式)等代数运算就能得到根(挪威天才数学家阿倍尔(Abel, 1802-1829) 也解决了这一部分)；而且也証明了，存在着不能用代数运算来解的具

方程，还說明了方程能不能用代数运算来解的理由。

我們再举一个例子讓讀者去作練习：$n=4$。$x_1x_2+x_3x_4$ 对于下列八个排列的群不变：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

而 $x_1x_2-x_3x_4$ 只对前面四个排列的群不变。

二　几何对称

1．平面上的对称

在平面上，我們可以考虑对于一直綫的对称（或反射）以及对于一点的对称。

首先，如图 1，点 A 和点 A' 叫做对于直綫 l 是对称的，或以 l 为**对称軸**，如果：

$$AA' \perp l \text{ 于 } O \text{ 点},$$

$$\text{且 } AO=OA'.$$

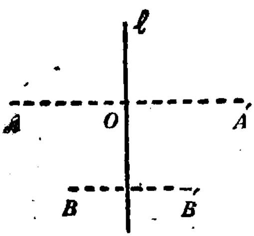

图 1.

由 A 到 A' 的作用也可以看成平面在空間中繞 l 作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋轉（或翻轉）。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com