YINGYONG SHUXUE

应用数学

主　编　段彩云
副主编　刘国发　高喜花

黄河水利出版社

应用数学

主　编　段彩云

副主编　刘国发　高喜花

黄河水利出版社

·郑州·

内 容 提 要

本书是初中起点五年制高职数学教材，注重培养学生数学思维、应用意识及创新能力，内容符合高职教育的教学基本要求．主要内容包括预备知识、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分（包括常微分方程简介）、定积分及其应用、线性代数基础、概率论基础．本书将教材与辅导融为一体，一书两用．每章末设小结与复习，例题、习题丰富，重点内容滚动复习，便于自学．

本书主要适用于五年制高职工科类各专业，也可作为高职院校成人教育相关专业学生的学习用书．

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/段彩云主编. —郑州：黄河水利出版社，2008.8

ISBN 978-7-80734-481-0

Ⅰ.应… Ⅱ.段… Ⅲ.应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第123892号

组稿编辑：简群　电话：0371-66023343　E-mail：w_jq001@163.com

出 版 社：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市金水路11号　邮政编码：450003

发行单位：黄河水利出版社

发行部电话：0371-66026940、66020550、66028024、66022620（传真）

E-mail：hhslcbs@126.com

承印单位：黄河水利委员会印刷厂

开本：787 mm×1 092 mm　1/16

印张：14.25

字数：340 千字　印数：1—2 200

版次：2008年8月第1版　印次：2008年8月第1次印刷

定价：28.00元

前言

目前,五年制高等职业教育已经成为我国高等职业教育的重要形式之一,实行五年一贯制的高等职业教育,便于统筹安排教学计划,实现中等职业教育与高等职业教育的有机衔接．随着教育教学改革的不断深入,五年制高等职业教育的各专业在学习内容上、教学时数上对数学课程,特别是对《应用数学》课程有着新的教学要求．根据目前五年制高职学生的实际情况(数学基础薄弱、入学水平较低),本着为职业目标和专业课服务的原则,我们组织编写了本教材．

教材编写的指导思想如下:

(1)教材突出"以学生为本"的教育理念,努力实现职业教育的培养要求,使不同层次的学生都能得到发展,突出培养学生的数学思维、应用意识及创新能力．

(2)以近代数学教育思想方法作为指导,尽可能多地吸纳国内外职业教育数学教材编写的先进思想、方法和经验,突出职业教育的特色．

(3)根据学生的实际情况,以实用与适用为准绳．内容上强调对基础知识的掌握,同时根据专业需求加强教材的弹性,并时刻关注教师的教学方法,做到既方便教师又能够指导学生学习．

(4)把握学生的认知规律,从学生的实际知识水平出发,尽量贯彻深入浅出、由易到难、由实际到抽象、循序渐进的原则．

本教材与以往教材相比,编排体系、内容选择均有所调整,本着"以服务为宗旨,以就业为导向"的指导思想,删减"繁、难、旧"的教学内容以及与专业学习无关的教学内容,使教学内容突出基础性、经典性与专业性的结合,淡化理论证明,强化结论性与应用．同时,添加专业所需的《工程数学》的相关内容,较好地解决了专业需求与学时少的问题．具体特点如下:

(1)精选在现代社会生活和各类专业学习中必需的、应用广泛的数学知识作为必学内容．内容安排上注重循序渐进、由浅入深,充分把握好学生对知识的可接受性,同时注重渗透近代数学的思想方法,为学生的发展打好基础．

(2)从五年制高职学生的实际出发,坚持因材施教的原则．教材突出基础知识、基本方法的教学,较好地处理了初等数学与高等数学之间的过渡和衔接．教材精选一定数量的习题,每章后附有复习题、自测题,并在难易程度上做了比较好的把握,有利于学生通过课内外的训练对所学的知识充分消化和掌握．

(3)每章后的小结与复习可帮助学生掌握本章重点知识,总结重要结论和学习中容易出现的问题,有利于学生理解知识之间的内在联系、提高运算技能,并起到释疑解难的作用,便于学生课前预习和课后复习．

(4)教材内容叙述简明,语言浅显易懂,可读性强．

全书脉络清晰,便于教师讲授,更利于学生理解．

本教材由段彩云担任主编．具体分工如下:预备知识、第一章、第二章、第三章由段彩云

编写;第四章、第五章、第六章由高喜花编写;第七章、第八章由刘国发编写.

尽管我们在《应用数学》的特色建设方面做出了许多努力,但由于水平有限,书中仍难免有不妥之处,希望各教学单位和读者在使用本教材的过程中给予关注,并将意见及时反馈给我们,以便修订时改进.

编 者

2008 年 5 月

目 录

预备知识:初等数学公式小结

毫无疑问,高等数学是以初等数学为基础的,但是,高等数学中所用的初等数学知识不是全部,而仅仅是其中一部分. 在这一部分初等数学知识中,有一些是必须熟练掌握的,有一些只要了解就可以了. 学习高等数学必须熟练掌握下列初等数学公式:

(1)两项和、差的平方与立方:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2)因式分解:

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　$x^2+(m+n)x+mn=(x+m)(x+n)$

例 1　$x^2-1=(x+1)(x-1)$.

例 2　$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$.

(3)阶乘:

$n!=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$　(n 为正整数)

规定:$0!=1$

例 3　$1!=1$,$2!=2$,$3!=6$.

例 4　$(n+1)!=(n+1)n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

(4)指数:

$a^n=aaa\cdots a$　(n 为正整数)　　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$　(n 为正整数)

$a^0=1$　　$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$　(m,n 皆为正整数,且 $m>1$)

$a^{n_1}a^{n_2}=a^{n_1+n_2}$　　$\dfrac{a^{n_1}}{a^{n_2}}=a^{n_1-n_2}$

$(a^{n_1})^{n_2}=a^{n_1n_2}$　　$(ab)^n=a^nb^n$

$(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

(5)对数:

$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$　($a>0,a\neq 1$)

$\log_a(\dfrac{x_1}{x_2})=\log_a x_1-\log_a x_2$　($a>0,a\neq 1$)

$\log_a x^b=b\log_a x$　($a>0,a\neq 1$)

$\log_a a=1$　($a>0,a\neq 1$)

$\log_a 1=0$　($a>0,a\neq 1$)

(6)三角函数恒等关系式:

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$　　$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\tan x \cot x = 1$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$

$\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$

第一章 函数

函数概念是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，也是高等数学研究的主要对象. 本章介绍了绝对值与区间的概念，回顾了函数的定义与性质，对基本初等函数的图形和性质进行了总结，并引入了复合函数和初等函数的概念.

第一节 绝对值 区间

一、绝对值

定义 1 对于任意一个实数 x，它的绝对值为 $|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

例如，$|-5|=|5|=5$；$|-1.4|=1.4$；$|0|=0$.

绝对值的几何意义：实数 x 的绝对值 $|x|$ 等于数轴上的点 x 到原点的距离.

绝对值有如下性质：设 a,b 为任意实数，则有

(1) $|a|=\sqrt{a^2}$；　　　　(2) $|a|\geqslant 0$，仅当 $a=0$ 时，$|a|=0$；

(3) $|-a|=|a|$；　　　　(4) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(5) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；　　　　(6) $|a-b|\geqslant |a|-|b|$；

(7) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$；　　　　(8) $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}\quad(a\neq 0)$.

上述性质 1 到性质 4 可以由绝对值的定义直接得到，现对性质 5 和性质 6 给予证明，其余留给读者考虑.

性质 5 证明 由绝对值的定义得

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$

将上述两个不等式相加得 $\quad -(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$，

于是有 $\quad |a+b|\leqslant |a|+|b|$.

性质 6 证明 因为 $\quad |a|=|a-b+b|\leqslant |a-b|+|b|$，

所以 $\quad |a-b|\geqslant |a|-|b|$.

绝对值不等式的解法：一般地，$|x|<a$ 的解集是 $\{x|-a<x<a\}$，$|x|>a$ 的解集是 $\{x|x<-a$ 或 $x>a\}$.

例 1 解下列不等式：

(1) $|x-3|>5$；　　　　(2) $|2x+5|<7$.

解 (1) 由不等式 $|x-3|>5$ 得

$$x-3<-5 \quad 或\ x-3>5,$$

即

$$x<-2 \quad 或\ x>8,$$

所以原不等式的解集为 $\{x|x<-2$ 或 $x>8\}$.

（2）由不等式$|2x+5|<7$得

$$-7<2x+5<7,$$

即

$$-12<2x<2,$$

于是

$$-6<x<1,$$

所以原不等式的解集为$\{x|-6<x<1\}$.

二、区间

区间是用的较多的一类实数集合.

设a,b都是实数，且$a<b$，集合$\{x|a<x<b\}$称为**开区间**，记作(a,b). 它在数轴上表示点a与b之间的线段，但不包括端点a和端点b(见图1-1).

集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**，记作$[a,b]$. 它在数轴上表示点$a$与$b$之间的线段，包括其端点$a$和端点$b$(见图1-2).

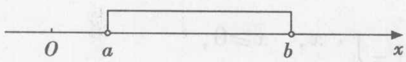


图1-1

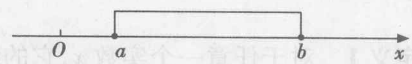


图1-2

还有其他类型的区间：

$\{x|a<x\leqslant b\}$记作$(a,b]$，称为**半开区间**.

$\{x|a\leqslant x<b\}$记作$[a,b)$，称为**半开区间**.

$\{x|x>a\}$或$\{x|x<a\}$记作$(a,+\infty)$或$(-\infty,a)$，称为**半无穷区间**.

$\{x|x\in R\}$记作$(-\infty,+\infty)$，称为**无穷区间**.

开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为点x_0的δ**邻域**.

从数轴上看，点x_0的δ邻域表示：以点x_0为中心，长度为2δ的开区间(见图1-3).

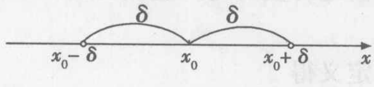


图1-3

例如，以1为中心的$\frac{1}{2}$邻域为开区间$\left(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}\right)$，即$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

习　题 1-1

1. 单项选择题：

（1）集合$\{x|0<|x-5|<1\}$用区间表示为(　　).

A. $[4,6]$　　B. $(4,6)$　　C. $(4,5)\cup(5,6)$　　D. $[4,6)$

（2）不等式$-|x-5|>-15$的解集是(　　).

A. $\{x|x<20\}$　B. $\{x|-10<x<20\}$　C. $\{x|x>-10\}$　D. $\{x|x<-10$或$x>20\}$

2. 用区间表示适合下列不等式的x的变化范围：

（1）$2<x\leqslant 6$；　　（2）$|x|<3$；　　（3）$|x-3|<5$；

(4) $|x|>100$;　　　(5) $|2x+1|<3$;　　　(6) $|2-3x|>2$.

3. 设集合 $A=\{x \mid |x-2|\leqslant 3\}$, $B=\{x \mid |x+1|<2\}$,把 $A\cap B$ 用区间表示.

4. 把点 2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域用区间表示.

第二节　函数的概念

在自然现象和工程技术中,往往同时遇到几个变量,这些变量通常不是孤立的,而是按照一定规律相互依赖,这种规律反映在数学上就是变量间的函数关系. 关于函数的有关知识,前面我们已经学过,本章仅就其中的一部分作简要的复习,并作必要的补充.

一、函数的定义

设有两个变量 x 与 y,如果对于 x 在某一变化范围内的每一个值,按照一定的规律 y 有唯一确定的值与之对应,那么 y 叫做 x 的**函数**.

其中,x 的取值范围叫做函数的**定义域**,和 x 对应的 y 值叫做**函数值**,函数值的集合叫做函数的**值域**.

有时函数的符号也可以用其他字母来表示. 如 $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$ 等.

由定义可以看出,确定函数有两个要素:定义域和对应法则. 因此,对于两个函数来说,只有当它们的定义域和对应法则都分别相同时它们才表示同一函数,否则,就是不同的函数.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的,若不考虑函数的实际意义,函数的定义域是使函数式子有意义的 x 的全体.

通常求函数的定义域应注意以下几点:

(1)当函数是多项式时,定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2)分式函数的分母不能为 0;

(3)偶次根式的被开方式必须大于或等于 0;

(4)对数函数的真数必须大于 0;

(5)反正弦函数和反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$;

(6)如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

例 1　判断下列函数是否是相同的函数:

(1) $y=1$ 与 $y=\frac{x}{x}$;　　　(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;

(3) $y=\ln 2x$ 与 $y=\ln 2\cdot\ln x$.

解　(1)函数 $y=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,而 $y=\frac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,所以不是同一函数.

(2)两个函数的定义域与对应法则都相同,所以是同一函数.

(3)函数 $y=\ln 2x$ 与 $y=\ln 2\cdot\ln x$ 的定义域都是 $(0,+\infty)$,但对应法则不同,所以不是同一函数.

例 2　求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x-3}$； (2) $y=\sqrt{x-2}$； (3) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$.

解 (1)要使$\dfrac{1}{x-3}$有意义,必须使分母 $x-3\neq 0$,即 $x\neq 3$,所以函数 $y=\dfrac{1}{x-3}$的定义域为$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

(2)要使 $\sqrt{x-2}$有意义,必须使被开方式 $x-2\geqslant 0$,即 $x\geqslant 2$,所以函数 $y=\sqrt{x-2}$的定义域为$[2,+\infty)$.

(3)要使$\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$有意义,必须使 $x\geqslant 2$ 与 $x\neq 3$ 同时成立,所以函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$的定义域为$[2,3)\cup(3,+\infty)$.

二、函数的表示方法

函数可以用至少三种不同的方法来表示:解析法、图像法和表格法. 本书不作详述.

三、函数的几种特性

(一)函数的单调性

定义1 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1\leqslant x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内是**单调增加的**;当 $x_1\leqslant x_2$ 时,有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内是**单调减少的**.

单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**. 如图 1-4 所示.

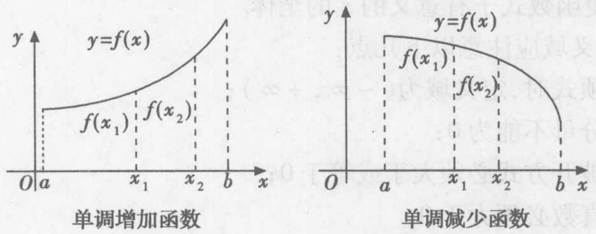


图 1-4

例如,$y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的,而在$(-\infty,0)$内是单调减少的. 又如,函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内是单调增加的.

但要注意的是:若函数在其定义域的一部分区间内是单调增加的,而在另一部分区间内是单调减少的,这时函数在整个定义域内不是单调的. 如 $y=x^2$ 在定义区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

(二)函数的奇偶性

定义2 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于任一 $x\in(a,b)$,有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内是**奇函数**. 如果对于任一 $x\in(a,b)$,有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**偶函数**.

奇函数的图像是关于原点对称的,偶函数的图像是关于 y 轴对称的. 如图 1-5 所示.

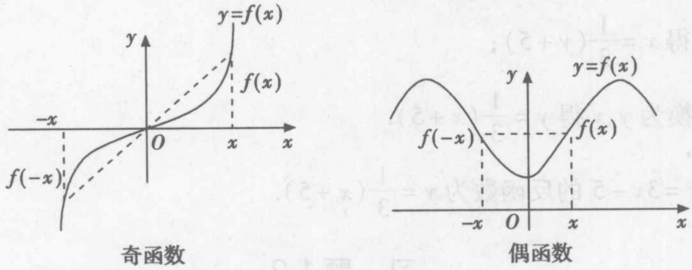


图 1-5

(三) 函数的周期性

定义 3 对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个常数 $T(T\neq 0)$,使得对于在定义域内的所有 x,有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 是**周期函数**,而称 T 为函数的**周期**. 通常,我们把周期函数的最小正周期简称为周期.

例如,函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

(四) 函数的有界性

定义 4 对于定义在 (a,b) 内的函数 $y=f(x)$,如果存在一个正数 M,使得对于 (a,b) 内的所有 x,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是**有界**的. 如果这样的正数 M 不存在,则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是**无界**的.

例如,因为对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是无界的,因为不存在这样的正数 M,使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,+\infty)$ 内的所有 x 都成立.

(五) 反函数

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 (a,b),值域是 (c,d),若对于 (c,d) 中的任一 y 值,都有唯一的 $x\in(a,b)$,使得

$$f(x)=y,$$

这时 x 也是 y 的函数,称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$.

由定义可知,反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域是函数 $y=f(x)$ 的值域,而反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域是函数 $y=f(x)$ 的定义域.

习惯上,常用 x 表示自变量,y 表示函数,因此经常把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$.

求反函数的步骤一般是这样的:

(1)从 $y=f(x)$ 中解出 x 得 $x=\varphi(y)$；

(2)将 x、y 分别换为 y、x 得 $y=\varphi(x)$，即 $y=f^{-1}(x)$.

例3 求函数 $y=3x-5$ 的反函数.

解 解出 x 得 $x=\frac{1}{3}(y+5)$；

将 x、y 分别换为 y、x 得 $y=\frac{1}{3}(x+5)$.

所以，函数 $y=3x-5$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}(x+5)$.

习 题1-2

1. 单项选择题：

(1) $y=10^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为（　　）.

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

(2)函数 $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ 的定义域是（　　）.

A. $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

(3)设函数 $y=\begin{cases} x, & x>0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 那么 $f(0)$（　　）.

A. 等于 -1　　B. 等于0　　C. 等于1　　D. 无意义

(4)下列函数在其定义域内不为单调函数的是（　　）.

A. $y=x^2+1$　　B. $y=6^x$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=\cot x$

(5)函数 $y=3^x+2$ 的反函数是（　　）.

A. $y=\log_3 x-2$　　B. $y=\log_3(x-2)$

C. $y=\log_3 x+2$　　D. $y=\log_3(x+2)$

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2}{3x+5}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+5}$；

(3) $y=\log_2(x-1)$；　　(4) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$；

(5) $y=\sqrt{x-1}+\ln(x-2)$；　　(6) $y=\arcsin(x-3)$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x<1, \\ 0, & x=1, \\ 1-x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 求此函数的定义域，作出其图像，并求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{5}{4}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2x-1$；　　(2) $y=2^{x-1}$.

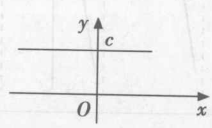
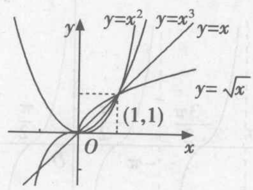
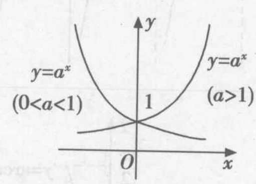
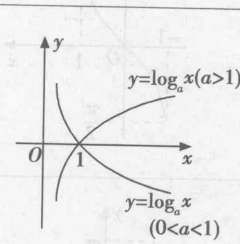
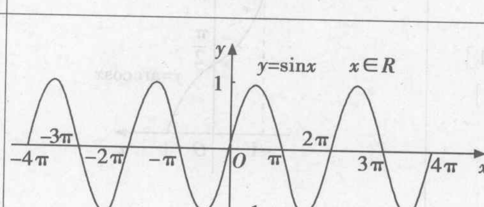
第三节　初等函数

一、基本初等函数

在实际问题中，我们遇到的函数是各种各样的，有简单的，也有复杂的，人们经过长期的社会实践总结出一类最基本的函数，它们是：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数，这六种函数统称为**基本初等函数**. 我们经常遇到的函数往往都是由这些函数构成的，因此熟悉这些函数的图形和性质是十分重要的.

现归纳、总结这些基本初等函数及其性质，见表 1-1，以便复习和比较.

表 1-1

函数	定义域和值域	图像	性质
常函数 $y=c$ （c 为常数）	$x\in(-\infty,+\infty)$		$y=c$ 的图形为平行于 x 轴截距为 c 的直线，无论 x 取何值，它的函数值都是常数 c
幂函数 $y=x^{\mu}$	随 μ 取值不同而变化		当 $\mu>0$ 时，函数在第一象限单调增加；当 $\mu<0$时，函数在第一象限单调减少
指数函数 $y=a^x$ （$a>0,a\neq1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点（0，1），当 $a>1$ 时，单调增加；当$0<a<1$ 时，单调减少
对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0,a\neq1$）	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点（1，0），当 $a>1$ 时，单调增加；当$0<a<1$ 时，单调减少
正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		函数是有界函数，图形介于 $y=\pm1$ 两条平行线之间；正弦函数是以 2π 为周期的奇函数