银领工程

高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材

应用经济数学

冯翠莲　赵益坤　主编

高等教育出版社

Higher Education Press

银领工程
高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材

应用经济数学

冯翠莲　赵益坤　主编

高等教育出版社

内容提要

为了适应当前技能型紧缺人才培养的需要，在近年高职高专教育研究改革成果的基础上，我们召集全国部分高职院校编写了本书。本书内容包括：矩阵与线性方程组、导数与微分、导数的应用、积分及其应用、概率的基本知识及应用、数据处理等。每节后配有习题，每章后配有总习题。

本书重能力、重应用、重素质，以培养应用型人才为目标，在许多方面都具有明显的高职高专特色，适用于高职高专院校经济类、管理类学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用经济数学/冯翠莲，赵益坤主编．—北京：高等教育出版社，2004.12
ISBN 7-04-015759-4

Ⅰ．应…　Ⅱ．①冯…②赵…　Ⅲ．经济数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 117242 号

策划编辑 罗德春　**责任编辑** 崔梅萍　**封面设计** 张　志　**责任绘图** 朱　静
版式设计 王　莹　**责任校对** 张　颖　**责任印制** 孔　源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京星月印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004年12月第1版
印　　张	13	印　　次	2004年12月第1次印刷
字　　数	270 000	定　　价	15.40元

物料号：15759-00

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007 年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自 2001 年 10 月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要“以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路”，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能人才，这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是“银领”，为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变，与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。对此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了“银领工程”丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的“银领”人才这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于固化并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。同时，我们的想法和做法还得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪也专门为首批“银领工程”丛书提笔作序。

“银领工程”丛书适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社

2004 年 9 月

前　言

为了适应迅速发展的高等职业教育的需要，真正落实高等职业教育的培养目标，切实贯彻“以应用为目的、理论知识以必需、够用为度”的原则，根据高等职业教育数学教学的特点、需求及高等职业教育培养目标，我们本着重能力、重应用、重素质、求创新的总体思路，编写了这本数学教材，供高等职业院校经济类、管理类学生使用。本教材在许多方面都具有明显的高等职业教育的特色，具体反映在：

1. 尊重学科，但不恪守学科。打破传统数学教材的结构，将线性代数、微积分及概率统计基本知识有机地结合在一起，根据数学的认知规律和教学规律，组织和编排全书内容。特别是在设计教材内容方面，力求实现基础性、实用性和发展性三方面的和谐与统一。真正体现以学生为主体，以教师为主导的辩证统一。

2. 以案例驱动的方式，用现实的，特别是经济方面的实例引出概念，并用通俗简洁的语言阐明概念的内涵和实质。对基础理论和结论一般不做论证，尽量用几何图形、数表、案例说明其实际背景和应用价值，由此加深对基本理论和概念的理解。

3. 注重数学的实际应用。以培养学生用定性与定量相结合的方法解决实际问题的能力为宗旨，配备案例、练习及习题，注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，强化应用数学知识解决实际问题的能力训练，培养学生举一反三、融会贯通的能力、创新能力和职业能力。

4. 本教材精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学。

5. 本教材每章前有学习目标，每章后有内容精要，每节后配有习题，每章后配有总习题，习题中有一般能力检测的基本题和应用能力检测的综合题，答案放在高职高专教学资源网上，网址：http://hv.hep.com.cn。

本教材的主编为冯翠莲、赵益坤。第一章由王莉莉执笔，第二、三、四章由冯翠莲执笔，第五、六章由赵益坤执笔，全书由冯翠莲统稿。参加编写工作的还有薛世明、王磊、赵连盛同志。

本教材在编写过程中，得到高等教育出版社相关领导的指导和大力支持，同行专家提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢。

限于水平，加之数学改革中的一些问题还有待探索，不足之处，恳请批评指正。

编者

2004 年 9 月

目　　录

第一章

矩阵与线性方程组

【目标】 理解矩阵概念，掌握矩阵运算，会用矩阵的初等行变换求线性方程组的解；掌握矩阵、线性方程组在经济活动中的实际应用．

本章介绍矩阵概念及运算，讲述用矩阵的初等行变换求解线性方程组的方法．

§1.1 矩阵概念

1.1.1 矩阵定义

案例 商品销售矩阵

3 个煤矿，向 4 个城市销售煤，其销售情况如表 1.1(单位：10^4 t)

表 1.1

	城市Ⅰ	城市Ⅱ	城市Ⅲ	城市Ⅳ
甲煤矿	320	540	760	290
乙煤矿	450	100	660	370
丙煤矿	200	280	140	570

在此统计表中，去掉表头，将表中的数字写成一个 3 行 4 列的矩形数表，用方括号或圆括号括起来，有

$$\begin{pmatrix}320 & 540 & 760 & 290\\450 & 100 & 660 & 370\\200 & 280 & 140 & 570\end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

由这 3×4 个数构成的数表,每个位置上的数都具有实际意义,如第 2 行第 3 列上的数 660 表示乙煤矿向城市Ⅲ销售了 660 万吨煤. 这种数表在数学上称为矩阵.

定义 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的矩形数表,称为一个 $\boldsymbol{m\times n}$ **矩阵**,记作

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

其中的每一个数称为矩阵的**元**. 矩阵的元 a_{ij} 的第一个下标"i"表示该元所在的行,第二个下标"j"表示该元所在的列,a_{ij} 是位于矩阵第 i 行第 j 列的元.

通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\cdots$ 表示矩阵,也可以用 (a_{ij})、(b_{ij})、(c_{ij}) 等表示矩阵. 有时,为了明确矩阵的行数和列数,还在这些记号的右下角标明,例如 $m\times n$ 矩阵,则记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$.

2×4 矩阵可记作 $\boldsymbol{A}_{2\times 4}$ 或 $(a_{ij})_{2\times 4}$,例如

$$\boldsymbol{A}_{2\times 4}=(a_{ij})_{2\times 4}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3 & 6\\2 & 3 & -6 & 0\end{pmatrix}.$$

按矩阵的定义,数表(1.1)是 3×4 矩阵,可记作 $\boldsymbol{A}_{3\times 4}$ 或 $(a_{ij})_{3\times 4}$,其中的 $a_{23}=660$,$a_{34}=570$.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数相等且为 n 时,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**,记作 $\boldsymbol{A}_n$. 即

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

在 n 阶方阵中,从左上角到右下角的 n 个元 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为 n 阶方阵的**主对角线元**. 若主对角线元都是数 1,其余元都是数 0,则称为 n 阶单位阵,记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$. 即

$$\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

所有元全为数 0 的矩阵称为**零矩阵**．记作 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$．例如 2×3 零矩阵为

$$\boldsymbol{O}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

只有一行元的矩阵 $\boldsymbol{A}_{1\times n}=(a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1n})$，称为**行矩阵**．

只有一列元的矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times 1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$，称为**列矩阵**．

1.1.2 阶梯形矩阵

这里介绍我们下面要用到的阶梯形矩阵和简化阶梯形矩阵．

1. 阶梯形矩阵

对于非零矩阵，若满足

(1) 矩阵若有零行(元素全为数 0 的行)，零行一定在矩阵的最下方；

(2) 矩阵各非零行第一个非零元所在列中，该元下方的元都为 0，则称该矩阵为**阶梯形矩阵**.

例如，下列矩阵均为阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&5\\0&2&3&-2\\0&0&4&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&4&6&7\\0&0&2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

我们在矩阵中所画的虚线，形象地显示出矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为“阶梯形”.

2. 简化阶梯形矩阵

对于阶梯形矩阵，若它还满足

(1) 各非零行的第一个非零元都为 1；

(2) 各非零行的第一个非零元所在列的其余元都为 0，

则称该阶梯形矩阵为**简化阶梯形矩阵**．

例如，下列矩阵均为简化阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&4&0&7\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

习题 1.1

1. 某车间生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四种产品，需要消耗甲、乙、丙三种原料，单位消耗(单位：kg/t)如下表．试将该车间四种产品对三种原料的单位消耗情况用矩阵表示．

单位消耗 产品 / 原料	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
甲	200	100	150	100
乙	150	200	250	150
丙	100	200	350	120

2. 某三个企业都生产甲、乙、丙、丁四种产品，2003 年底甲、乙、丙、丁四种产品的库存量(单位：kg)如下表．试将下表用矩阵表示．

库存量 企业 / 产品	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
甲	150	75	110
乙	250	160	70
丙	100	120	200
丁	90	180	80

3. 指出下列矩阵哪些是阶梯形矩阵，哪些是简化阶梯形矩阵．

(1) $A=\begin{pmatrix}3&-1&0&2\\0&1&3&-2\\0&0&5&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；　　(2) $A=\begin{pmatrix}2&-1&5&3\\0&1&2&-3\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$; (4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&1&0&5\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$; (6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&5\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

§1.2 矩阵运算

在介绍矩阵运算前,我们首先给出同型矩阵及两个矩阵相等的概念.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times t$ 矩阵,当 $m=s,n=t$ 时,称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵.即行数相同,列数也相同的矩阵称为**同型矩阵**.

若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵,且它们的对应元相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2.1 矩阵的加法

案例 1 某种物资(单位:t)从三个产地运往四个城市销售,2004 年第一、二两个季度的供应方案分别由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 给定

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}200&100&150&100\\150&200&250&150\\100&200&350&120\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}150&75&100&150\\200&150&75&50\\100&120&200&80\end{pmatrix},$$

问这两个季度三个产地运往四个城市的各供应量是多少?

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵,若分别以 a_{ij} 和 b_{ij} 记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的元,则 $a_{23}=250$ 和 $b_{23}=75$ 分别表示第一季度和第二季度由第二个产地运往第 3 个城市的供应量.显然

$$a_{23}+b_{23}\quad 即\quad 250+75$$

便是两个季度第二个产地运往第 3 个城市的供应量.由此,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应位置的元相加,即用矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}200+150&100+75&150+100&100+150\\150+200&200+150&250+75&150+50\\100+100&200+120&350+200&120+80\end{pmatrix}$$

便可表示三个产地第一季度和第二季度运往四个城市的各供应量．我们由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 得到了矩阵 $\boldsymbol{C}$,这是矩阵的一种运算．这样一种运算就是矩阵的加法．

定义 设有两个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

将它们的对应元相加所得到的 $m\times n$ 矩阵,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和,记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

或简记作

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

练习 1 已知两个 2×3 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3+2 & -1+4 & 4+(-6) \\ 2+(-3) & 5+1 & 6+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

由矩阵加法定义可知,只有同型矩阵才能相加．

设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{O}$ 是同型矩阵,由于两个矩阵相加就是矩阵的对应元相加,而由数字相加所具有的性质可直接验证矩阵加法具有下述性质:

(1) 交换律:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

若把矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的各元变号,则得到矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,记作 $-\boldsymbol{A}$,即若

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则
$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{bmatrix}.$$

由矩阵加法和负矩阵可定义**矩阵减法**.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的负矩阵相加定义为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 减去矩阵 $\boldsymbol{B}$**,记作 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij})_{m\times n}+(-b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

显然有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

练习 2 设甲、乙两个蔬菜基地分别给Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个城市供应蔬菜(单位:t),若全年的供应情况用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示,前三个季度的供应情况用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示,即

$$\begin{array}{c} \quad \text{Ⅰ} \quad\; \text{Ⅱ} \quad\; \text{Ⅲ} \\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}200 & 400 & 350\\ 300 & 600 & 500\end{pmatrix}\begin{matrix}甲\\乙\end{matrix}\end{array}\qquad \begin{array}{c} \quad \text{Ⅰ} \quad\; \text{Ⅱ} \quad\; \text{Ⅲ} \\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}140 & 290 & 250\\ 220 & 430 & 400\end{pmatrix}\begin{matrix}甲\\乙\end{matrix}\end{array}$$

求第四个季度的供应情况.

解 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵,可以进行减法运算.第四个季度的供应情况应是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 减去矩阵 $\boldsymbol{B}$,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}&=\begin{pmatrix}200 & 400 & 350\\ 300 & 600 & 500\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}140 & 290 & 250\\ 220 & 430 & 400\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}200-140 & 400-290 & 350-250\\ 300-220 & 600-430 & 500-400\end{pmatrix}\\ &\begin{array}{c}\quad \text{Ⅰ} \quad\; \text{Ⅱ} \quad\; \text{Ⅲ} \\ =\begin{pmatrix}60 & 110 & 100\\ 80 & 170 & 100\end{pmatrix}\begin{matrix}甲\\乙\end{matrix}\end{array}\end{aligned}$$

1.2.2 数乘矩阵

案例 2 某产品从甲、乙两个产地运往Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个销地,如果每吨产品每千米的运费为 50 元,运输里程表为表 1.2,试用矩阵表示从两个产地运往三个地区的运费为每吨多少元?

表 1.2

销地 / 里程/km / 产地	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
甲	500	300	450
乙	350	280	600

解 运输里程(km)用矩阵可表示为

$$A=\begin{pmatrix}500 & 300 & 450\\350 & 280 & 600\end{pmatrix},$$

其中,$a_{12}=300$ 表示从甲地到第Ⅱ个销地的里程.由于每吨产品每千米运费为 50 元,所以,从甲地到第Ⅱ个销地的运费(元/t)为

$$50\times 300,\quad 即\quad 50a_{12}.$$

由上式知,从两个产地到三个销地的运费,若用矩阵表示,可写成下述形式

$$\begin{pmatrix}50\times 500 & 50\times 300 & 50\times 450\\50\times 350 & 50\times 280 & 50\times 600\end{pmatrix},$$

为简便,可记作

$$50A=50\begin{pmatrix}500 & 300 & 450\\350 & 280 & 600\end{pmatrix}.$$

这种运算是用数乘矩阵的每一个元,这就是我们要讲的数与矩阵相乘.

定义 用数 k 乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的每一个元所得到的矩阵,称为**数 k 与矩阵 A 的乘积**.记作 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$,即

$$kA=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}.$$

例如,已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 4 & -2\\-3 & 5 & 1\end{bmatrix}$,则数 3 与矩阵 A 的乘积,记作 $3A$,为

$$3\boldsymbol{A}=3\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&4&-2\\-3&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1&3\times2&3\times3\\3\times(-1)&3\times4&3\times(-2)\\3\times(-3)&3\times5&3\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&6&9\\-3&12&-6\\-9&15&3\end{pmatrix}.$$

设 k 和 l 为数，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，根据数乘矩阵的定义，可以直接验证数与矩阵相乘有下述性质：

(1) 分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律：$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(3) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

1.2.3 矩阵的乘法

案例 3 某公司采购员到三个装修超市去买红、黄两种颜料．三个超市颜料的价格(百元/桶)可用矩阵表示为

$$\begin{array}{cc}& \begin{array}{cc}\text{红} & \text{黄}\end{array} & \\ \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times2}= & \begin{pmatrix}10&15\\12&13\\8&14\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{超市一}\\\text{超市二}\\\text{超市三}\end{array}\end{array}$$

在每个超市购买两种颜料的数量(桶)可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times1}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{红}\\\text{黄}\end{array}$$

求在各个超市购买红、黄两种颜料所消费的金额．

解 依题设，所求金额为

超市一　$10\times6+15\times8=180$(百元)，

超市二　$12\times6+13\times8=176$(百元)，

超市三　$8\times6+14\times8=160$(百元)．

上述消费金额若用矩阵表示，并记作 $\boldsymbol{C}$，有