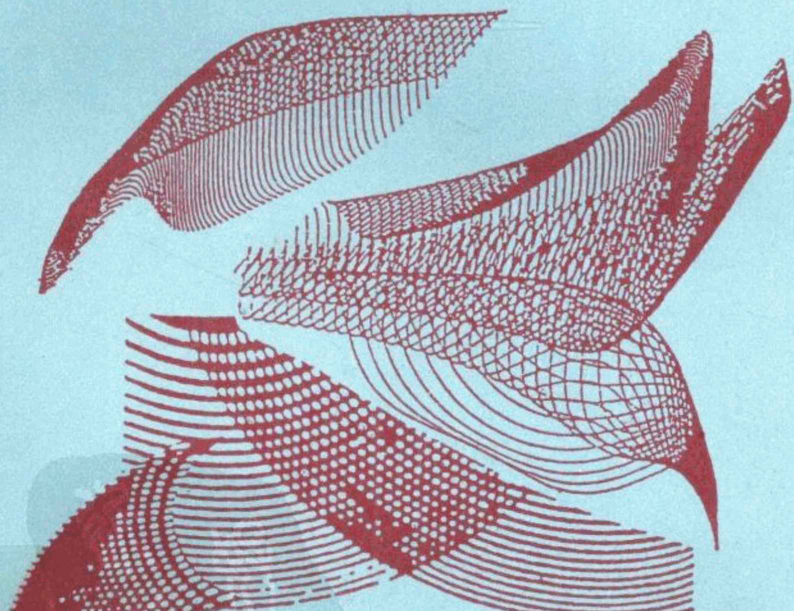
全国高考备考丛书

数学分册



中央民族大学出版社

全国高考备考丛书

数学分册

中央民族大学出版社

〔京〕 新登字 184 号

责任编辑：凌　弘

全国高考备考丛书
数学分册
高考能力考查研究编写组
*
中央民族大学出版社出版
（北京白石桥路 27 号）
（邮政编码：100081）
新华书店发行
北京东方印刷厂印刷

787×1092 毫米　32 开　9.25 印张　180 千字
1994 年 1 月第 1 版　1994 年 1 月第 1 次印刷
印数：01—10000 册

ISBN 7-81001-707-1/G・303
定价：5.95 元

目　　录

一、全国高考数学知识分类分析

李松文

高考是为高等学校选拔新生，同时对中学教学有正确的导向．数学科考试旨在测试中学数学基础知识、基本技能、基本方法，运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，以及运用所学数学知识和方法，分析问题和解决问题的能力．

高中数学分为代数、三角、立体几何、解析几何四科。在高考试题中，各科所占分数的百分比与它们在教学中所占课时的百分比大致相同，代数约占 40%，三角约占 20%，立体几何约占 20%，平面解析几何约占 20%．

从1985--1992 年，八年中数学各科都考了哪些内容？着重考了哪些知识要点?以何种方式考查?知识和能力考查的关系如何?难度的变化如何?从中探索命题规律、指导高中教学，扎实的提高中学数学质量，为高校输送的新生有坚实的知识基础和能力．为此，笔者对1985—1992 年的高考数学试题（包括会考后高考三南试题）进行分析和统计，奉献给读者，以求共勉．

（一）代　　数

按照高考说明，中学代数高考的主要内容有：集合和函数；不等式；数列、极限、数学归纳法；复数；排列、组合、二项式定理．

八年来，高考代数内容的覆盖情况，请见表一（表中的“函

表一 **1985-1992 高考代数**

知识要点	文理分科	85		86		87		88		89	
		题数	分数	题数	分数	题数	分数	题数	分数	题数	分数
集合	文	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
	理			1	10	1	3	1	3	1	3
函数的概念	文	1	4	1	3	1	3			1	3
	理	1	4	1	3			1	12	1	3
函数的性质	文	1	3			1	3			1	3
	理	1	3			1	3			1.5	6
幂、指、对函数	文					1	4	1	3	1.5	10
	理							1	11	0.5	6
反函数	文			1	3			1	3	1	4
	理			1	3					1	4
函数最值	文	1	4							1	3
	理	0.5	5								
代数方程	文	1	8	1	4	1	3	1	4		
	理	1	7	1	4			1	4		
解不等式	文	1	8	1	3	1	12	1	12	1.5	10
	理	1	7	1	12	2	15			2	17
证不等式	文										
	理	0.5	9								
数列	文	0.5	2	0.5	9	1	12	1	12	1	3
	理			1	12	0.5	9			1	3
极限	文	0.5	10	1.5	7	1	4	1	4		
	理	0.5	5	1	4	1.5	7	1	4		
数学归纳法	文	1	14							1	10
	理									1	10
复数三角式	文			1	3	1	3	2	7		
	理			1	3			2	7	1	3
复数的运算及应用	文			1	10	2	16	1	3	1	8
	理	0.5	10	1	4	1	12	1	3		
排列、组合	文	1	3	1	10	1	4	1	3	1	3
	理	1	3	1	3	1	4	1	3	1	3
二项式定理	文	1	4	1	4	1	4	1	3	1	3
	理	1	4	1	4	1	4	1	3	1	4

内容覆盖表

90		91		92		三南				八年	
						91		92			
题数	分数	题数	分数	题数	分数	题数	分数	题数	分数	题数	分数
1	3			1	3	1	3	1	3	9	27
1	3	1	3	1	3					9	34
2	6			1	3	1	4			8	38
1	3			1	3					7	32
		1	3	1	3	0.5	7	1	3	6.5	25
		2	13	1	3					8	28
				3	9					6.5	26
0.5	5			3	9					5	31
		1	3					1	3	5	16
										3	10
1	3	1	8							4	18
1	3	1	8							2.5	16
1	3							1	12	6	34
2	15									6	42
1	10	2	15	0.5	6	1	10	1	3	11	89
		2	15	0.5	5					10.5	78
								1	12		
0.5	7									2	28
1	10	2	13	0.5	6	2	15	2	6	11.5	89
1	10	1	3	1.5	8					10	66
1	3	1	3			1	4	1	4	8	39
1	3	1	3							8	34
						0.5	7	1	12	3.5	47
										2.5	29
1	3	1	8			1	3			7	27
1	3	1	8							7	27
1	12			2	13	2	7	2	14	12	82
				2	12					9.5	62
1	3	1	3			1	3	1	3	9	35
1	3	1	3							9	28
1	3	1	3	1	3	1	3	1	4	10	34
1	3	1	3	1	3					10	35

数的概念”指的是：函数的定义、符号、定义域、值域和图象；“函数的性质”指的是函数单调性、奇偶性和周期性）.

一、集合与函数

1. 集合

有关集合的试题所考查的内容主要有三个方面：(1)集合、子集、交集、并集、补集的概念及空集和全集的概念；(2)属于、包含、相等等关系的意义；(3)有关的术语和符号的使用.试题的题型多为选择题、填空题，也有用集合语言叙述的综合题.

例 1 (1987 年)设 S、T 是两个非空集合、且 $S \not\subseteq T$，$T \not\subseteq S$，令 $x=S\cap T$，那么 $S\cup x$ 等于(　　)

(A)x　　(B)T

(C)ϕ　　(D)S

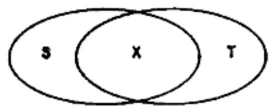


图 1-1

分析：本题考查非空集合、交集、并集等概念及符号“$\not\subseteq$”的意义.题意叙述比较抽象，考查学生的理解能力.

此题由图 1-1 所示，可得出 $S\cup X=S$，故选 D.

例 2 (1986 年)已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合$\{2,7,8\}$是(　　)

(A)$A\cap B$　　(B)$A\cup B$

(C)$\overline{A}\cap\overline{B}$　　(D)$\overline{A}\cup\overline{B}$

分析：本题考查集合之间的关系及交、并、补的意义、此题由图 1-2 所示，得

$\{2,7,8\}=\overline{A}\cap\overline{B}$. 故选 C.

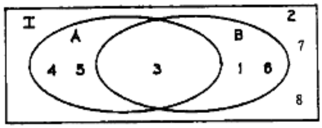


图 1-2

例 3 (1989 年)设 $I=\{a,b,c,d,e\}$, $M=\{a,c,d\}$, $N=\{b,d,e\}$,其中 I 是全集,那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于(　　)

(A)ϕ　　　　(B)$\{d\}$

(C)$\{a,c\}$　　　　(D)$\{b,c\}$

分析:本题考查全集、补集、交集、空集的概念,和例 2 类似. 可用计算或图示求出.

$\overline{M}=\{b,e\}$, $\overline{N}\{a,c\}$, $\overline{M}\cap\overline{N}=\phi$,故选 A

例 4 (1991 年三南)设全集 I 为自然数集 N, $E=\{2n|n\in N\}$, $F=\{4n|n\in N\}$,那么集合 N 可表示成(　　)

(A)$E\cap F$　　　　(B)$\overline{E}\cap F$

(C)$E\cup\overline{F}$　　　　(D)$\overline{E}\cap\overline{F}$

分析:$\because E=\{2n|n\in N\}$, $F=\{4n|n\in N\}$,

故 FCE,得 $N=E\cup\overline{F}$,故选 C.

例 5 (1992 年三南)设 $I=R$,集合 $M=\{x|\sqrt{x^2}>2\}$, $N=\{x|\log_x{}^7>\log_3{}^7\}$,那么 $M\cap\overline{N}=$(　　)

(A)$\{x|x<-2\}$, (B)$\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant3\}$;

(C)$\{x|x\geqslant3\}$;　　(D)$\{x|-2\leqslant x<3\}$.

分析:通过计算,可知 $M=\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$, $N=\{x|1<x<3\}$. 则 $\overline{N}=\{x|x\geqslant3$ 或 $x\leqslant1\}\cup\{x|x>0$ 且 $x\neq1$, $\therefore M\cap\overline{N}=\{x|x\geqslant3\}$. 故选 C.

此题和对数 $\log_x{}^7$ 联系在一起,要注意底数 x 本身的限制是 $x>0$ 且 $x\neq1$.

例 6 (1990 年)设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$. $M=\{(x,$

$y) \mid \dfrac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y) \mid y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}$等于（　）

(A)ϕ　　(B)$\{(2,3)\}$

(C)$(2,3)$　　(D)$\{(x,y) \mid y=x+1\}$

分析：M 是直线 $y=x+1$ 上除$(2,3)$点外的所有点，N 是不是直线 $y=x+1$ 上的所有点. 故 $M\cup N$ 为平面上不含$(2,3)$点的所有点，$\therefore \overline{M\cup N}=\{(2,3)\}$. 故选 B.

例 7　(1985 年)设 a,b 是两个实数，$A=\{(x,y) \mid x=n,y=na+b,n$ 是整数$\}$，$B=\{(x,y) \mid x=m,y=3m^2+15,m$ 是整数$\}$，$C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 $x\cdot y$ 内的点集合、讨论是否存在 a 和 b 使得

(1)$A\cap B\neq\phi$(ϕ 表示空集)，(2)$(a,b)\in C$ 同时成立.

分析：此题是用集合语言表示条件的综合性题目，涉及面广，解法灵活，是要求较高的分析问题的能力. 本题的实质是讨论是否存在满足 $a^2+b^2\leqslant 144$ 的实数 a、b，使得

方程组$\begin{cases} n=m \\ na+b=3m^2+15 \end{cases}$或方程 $na+b=3n^2+15$

至少有一组整数解.

说明：高考试题中有关集合的题目都是考查基础知识和基本技能. 将与集合有关的区域、不等式，轨迹等用集合进行描述，和其它内容有机地的联系起来，理解集合在中学数学的地位和作用.

2. 函数

函数是中学数学中的重要内容，始终是高考中考察的重点，主要考察内容有：(1)函数的定义域，值域和图象及函数的符号 $f(x)$；(2)函数的性质：主要是单调性，奇偶性和周期性；(3)幂函数，指数函数和对数函数，以及二次函数的性质及应

用;(4)求函数的反函数;(5)求函数的最值;(6)解有关指数方程,对数方程等代数方程.对上述诸内容既考查基础知识,基本技能、基本方法,又重考查能力.而且经常和不等式、复数,数列等进行综合考查.

例 1 (1985 年)在下面给出的函数中,哪一个既是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数,又是以 π 为周期的偶函数( )

(A)$y=x^2(x\in R)$ (B)$y=|\sin x|\ (x\in R)$

(C)$y=\cos 2x(x\in R)$ (D)$y=e^{\sin x}(x\in R)$

分析:$y=1\sin x1$ 是以 π 为周期的偶函数,且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数,故选 B.

考查了函数的单调性和周期性.

例 2 (1989 年)已知 $f(x)=8+2x-x^2$,如果 $g(x)=f(2-x^2)$,那么 $g(x)$( )

(A)在区间$(-1,0)$上是减函数

(B)在区间$(0,1)$上是减函数

(C)在区间$(-2,0)$上是增函数

(D)在区间$(0,2)$上是增函数

分析:此题是具有相当难度的题目,涉及复合函数的单调性问题,若利用函数的变形及其图象就比较好确定.

$$\because g(x)=f(2-x^2)=8+2(2-x^2)-(2-x^2)^2$$
$$=-x^4+2x^2+7=-(x^2-1)^2+7$$

该函数 $g(x)$ 为偶函数,图象关于 y 轴对称,

当 $x=1$ 及 $x=-1$ 分别取得最大值 7,当 $x=0$ 时,有 $g(o)=6$,故 $g(-1)>g(0)$,

画出草图,如图 1-3,

故在区间$(-1,0)$是减函数，其它选项都是错误的. 故选 A.

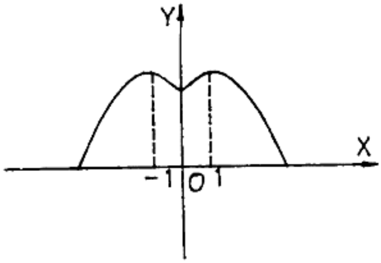


图 1-3

例 3　(1)(1986 年)函数 $y=(0,2)^{-x}+1$ 的反函数是(　　)

(A)$y=\log_5 x+1$

(B)$y=\log_x 5+1$

(C)$y=\log_5 (x-1)$

(D)$y=\log_5 x-1$

(2)(1992 年)函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数(　　)

(A)是奇函数,它在$(0,+\infty)$上是减函数

(B)是偶函数,它在$(0,+\infty)$上是减函数

(C)是奇函数,它在$(0,+\infty)$上是增函数

(D)是偶函数,它在$(0,+\infty)$上是增函数

分析:其中(1)考查如何求给定函数的反函数,利用求反函数的方法,得 $y=\log_5 (x-1)$. 选 C.

其中(2)是判断给定函数的反函数的性质,当然可先求出它的反函数,再判断它的性质. 但是若两个函数互为反函数的性质来判定反函数的性质就比较灵活、简便. 先否定(B),(D),再利用特殊值法,很容易得出,选 C.

例 4　(1992 年)如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$,那么(　　)

(A)$f(2)<f(1)<f(4)$　　(B)$f(1)<f(2)<f(4)$

(C)$f(2)<f(4)<f(1)$　　(D)$f(4)<f(2)<f(1)$.

分析:此题关键是对 $f(2+t)=f(2-t)$ 怎么理解. 由此得出直线 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴. 又因 x^2 的系数大于 0,就可判定出为 C.

说明:从例 1—4 看出,对函数性质的考查不是单纯的记忆,而重在理解其本质,并能正确应用. 不少考生对例 3 和例 4 中 1992 年的函数题,做的不好,其原因还是对函数性质意义的理解不深,灵活应用的能力较差.

对函数的考查上,经常有综合性题目,涉及函数与其它方面的知识.

例 5 (1988 年)给定实数 a,$a\neq 0$ 且 $a\neq 1$,设函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in R,x\neq\dfrac{1}{a}\right)$,证明:

(1)经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴.

(2)这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

分析:本题考查函数与反函数的概念、性质及图象,是一道综合题,侧重于考查灵活运用有关代数、解析几何知识进行推理论证的能力. 其中(1)只要证明图象上任意两个不同点的连线,所得直线的斜率不为 0 即可;(2)只要求出它的反函数仍是 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$ 即可.

例 6 (1990 年)设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n}$,其中 a 是任意实数,n 是任意给定的自然数,且 $n\geqslant 2$.

(1)如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义,求 a 的取值范围;

(2)如果 $a\in(0,1]$,证明 $2f(x)<f(2x)$ 当 $x\neq 0$ 时成立.

分析:本题考查指数函数,对数函数,数学归纳法、不等式的知识以及综合运用有关知识解决问题的能力.

本题是近八年高考中最难的一道题,学生的得分率很低,满分 12 分,平均得分不到 1 分.基本上等于虚设,绝大多数考生得 0 分.作为高考,此题太难,区分度太低,同样也失去选拔的意义.

例 7 (1992 三南)已知关于 x 的方程 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 有一个根是 2,求 a 的值和方程其余的根.

分析:本题考查方程的根的概念和解指数方程的方程.

将 2 代入已知方程,得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=3$.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,求解得 $x=2,x=1+\log_{\frac{1}{2}}{}^{3}$.

当 $a=3$ 时,求解得 $x=2,x=1-\log_{3}{}^{2}$.

例 8 (1989 年)(1)已知 $a>0,a\neq1$,试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围.

(2)设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数,对 $k\in 2$,用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1)$、已知当 $x\in I_0$ 时,$f(x)=x^2$.

(i)求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析表达式;

(ii)对自然数 k,求集合 $M=\{a\mid$使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$.

分析:(1)本题考查对数函数的性质和解不等式的能力;(2)本题考查周期函数的概念、一元二次方程在给定区间上有两个不等实根的充要条件、以及解不等式的能力.

上面两题,都是由函数的性质、概念,转化为解不等式组.综合运用知识的能力、运算能力、全面思考问题的能力要求

高，学生能动手去做，但不一定考虑周全，因此区分度较好. 同时注重培养学生阅读数学语言、认真审题、理解题意，是一个好题.

二、不等式

不等式是中学数学的重要内容，在历年的高考试题中都有与不等式有关的题目. 有的是不等式本身的基础题，有的是与其它知识相联系的综合题，试题大致分为两类，一类是解各类不等式，一类是不等式的证明及应用. 主要考查运用不等式的性质、定理解各类不等式的能力和证明不等式的常用方法及证明不等式的能力.

1. 解各类不等式

例 1 解不等式的基础题：

(1)（1985 年）、解不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$；

(2)（1986 年）、当 $\sin 2x>0$ 时，求不等式

$\log_{0.5}(x^2-2x-15)>\log_{0.5}(x+13)$ 的解集；

(3)（1987 年）、求函数 $y=\log_2(1+2x-3x^2)$ 的定义域；

(4)（1988 年）、解不等式 $\lg\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$；

(5)（1989 年）、不等式 $|x^2-3x|>4$ 的解集是______.

已知 $0<a<1, 0<b<1$，如果 $a^{\log_b(x-3)}<1$，那么 x 的取值范围是________.

(6)（1990 年）、已知 $a>0, a\neq 1$，解不等式

$\log_a(4+3x-x^2)-\log_a(2x-1)>\log_a 2$.

(7)（1991 年）不等式 $\lg(x^2+2x+2)<1$ 的解集是____.

(8)（1991 年三南）、解不等式 $\sqrt{5-4x-x^2}\geqslant x$.

说明:从上面看出,对于解各类不等式都进行了考查、考查解不等式的基本技能和方法,提高解不等式的能力.

例 2 关于涉及解不等式的综合题

(1)1987 年、对所有实数 x,不等式 $x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$ 恒成立,求 a 的取值范围.

(2)1991 年,实数 $a>1$,解关于x的不等式 $\log_a x-4\log_{a^2}x+12\log_{a^3}x+\cdots+n(-2)^{n-1}\log_{a^n}x$

$$>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$$

分析:(1)本题是考查一元二次不等式、二次函数、对数的一道综合题,要求考生有较强的运算能力和变形技巧,利用换元思想进行转化的能力.

由题意知 $\log_2\frac{4(a+1)}{a}\neq0$,故不等式恒成立的条件是

$$\begin{cases}\log_2\dfrac{4(a+1)}{a}>0\\ \left(2\log_2\dfrac{2a}{a+1}\right)^2-4\log_2\dfrac{4(a+1)}{a}\cdot\log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}<0.\end{cases}$$

以下设 $z=\log_2\frac{2a}{a+1}$,变形求解.

(2)本题考查对数换底公式、对数概念、数列的求和公式、解不等式等基础知识,并综合利用上述知识进行解答此题,渗透分类讨论的思想,考查分析问题的能力.

首先利用换底公式和数列求和,将原不等式化为

$$\frac{1}{3}[1-(-2)^n]\log_a x>\frac{1}{3}[(1-(-2)^n]\log_a(x^2-a) \quad ①$$

当 n 是奇数时,$1-(-2)^n>0$,不等式①等价于

$$\log_a x > \log_a (x^2 - a) \qquad ②$$

当 n 是偶数时，$1-(-2)^n<0$，不等式①等价于

$$\log_a x < \log_a (x^2 - a) \qquad ③$$

分别解②，③得原不等式的解集.

2. 证明不等式

在高考试题中，涉及证明不等式的题目并不多，在所考查的证明题中，一般用数学归纳法就可以解决.

例 1 (1985 年)设 $a_n=\sqrt{1.2}+\sqrt{2.3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：不等式 $\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$

例 2 (1992 年三南)证明不等式

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n} \quad (n\in N)$$

说明：上面例 1、例 2 若用放缩法来证也可以，一般技巧性比较大.

例 2 用放缩法证明如下：

先证：$\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\ (k\in N)$

$$\because \sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}, \text{又} \sqrt{k-1}<\sqrt{k}$$

$$\therefore \sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}>\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{k}}$$

即 $\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$.

对 $k=1,2,\cdots,n(n\in N)$，有