(解析数论研究专著)

Barban-Davenport-Halberstam 均值和

刘弘泉 著

哈爾濱工業大學出版社

解析数论研究专著

Barban-Davenport-Halberstam 均值和

刘弘泉 著

图书在版编目(CIP)数据

Barban-Davenport-Halberstam 均值和/刘弘泉著.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.10
ISBN 978-7-5603-2784-6

Ⅰ.B… Ⅱ.刘… Ⅲ.数论-研究 Ⅳ.O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 157443 号

责任编辑 翟新烨
封面设计 张孝东
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 19.5 字数 227 千字
版　　次 2008 年 11 月第 1 版 2008 年 11 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2784-6
印　　数 1~1 000 册
定　　价 40.00 元

前　言

Barban-Davenport-Halberstam 均值和（以下简称“BDH 均值和”）是涉及大筛法应用和算术级数中素数分布的一个重要均值和，最初是由前苏联数论学家 M.B.Barban、英国数论学家 H.Davenport 及 H.Halberstam 独立地在 20 世纪 60 年代加入研究的，Davenport 在其名著《Multiplicative Number Theory》（见[D]）的 § 29 中专论此和，而英国数论学家 C.Hooley 则从 1975 年至今已在“On the Barban-Davenport-Halberstam theorem”的大标题下共发表了 17 篇论文。应用大筛法和 Siegel 定理，Barban、Davenport、Halberstam 及 Gallagher 已获得了 BDH 均值和适当的上界估计，Montgomery 与 Hooley 则分别在 1970 年和 1975 年用不同的方法得到了 BDH 均值和 $S(Q,x)$适当的渐近公式（此处“适当的”一词意指 Q 与 x 满足一由 Siegel 定理所界定的不等式）。

我在 1993 年发表了一篇关于如何获求某些“BDH 型均值和”适当下界估计的论文（见[L2]），特别地由该文结果可导出 BDH 均值和已知的适当下界估计。该文的方法是全新的，因为我没有像通常那样将 BDH 均值和加以平方展开，而是发现了 BDH 均值和同圆法（“圆法”通常用来研究加法数论的问题！）中间内在而微妙的联系，由此只需将一个显然的恒等式中的积分按圆法中的“优弧”和“劣弧”加以分部处理，再经过一些求和与积分的变化，即会使问题中的“BDH 型均值和”显现出来，从而获得一个适当的下界估计。受到陈景润和潘承洞在关于 Goldbach 数例外集工作中一引进处理方法的启发，在文[L2]中新方法的基础上，我又

在 1995 年发表了一篇关于 BDH 均值和下界估计的论文(见文[L3]),在其中我突破了由使用 Siegel 定理所带来的传统限制条件,该文的结果立即得到了国外同行高度评价(J. B. Friedlander 的评价可见《Mathematical Review》,1996(f),11125)。将圆法的思想同大筛法乃至 L - 函数零点密度估计方法相结合后产生的威力,已在[L3]的工作中得到体现。值得指出的是,虽然后来 Hooley 采用其他方法也成功地突破了由使用 Siegel 定理所带来的传统限制条件,且能改进我所获得的下界估计的系数,但他却无法突破我在[L3]中获得的一个优于素数定理余项形式的结果(较为宽泛的 Q 与 x 的限制条件(见本书附录三))。最近,在一篇即将发表的论文中(见[L6]),我在将 BDH 均值和平方展开的基础上(这又回到了 Montgomery 方法和 Hooley 方法的出发点),综合运用圆法与 L - 函数零点密度估计方法,在突破了由使用 Siegel 定理所带来的传统限制条件的情况下,经过很复杂的求和与积分的变幻,获得了 BDH 均值和的一个显含 L - 函数例外零点的“拟渐近公式”,由此立即可得两个重要推论:(i)欲获得 BDH 均值和在突破了由使用 Siegel 定理所带来的传统限制条件的情况下的标准形式的上界估计,就必须对 L - 函数可能出现的例外实零点的上界做适当假设(这实际已解决了自 Gallagher 1967 年的工作以来关于 BDH 均值和上界估计的一个长期悬而未决的问题;这是迄今为止 Hooley 等人的方法无论如何所达不到的);(ii)在关于 Q 与 x 的同类限制条件下,改进了 Hooley 在其 2000 年的文章[H7]中所获得的关于 BDH 均值和的下界估计(见附录三)。文[L6]中的结果亦是可以不依赖于 Siegel 定理的。

出版本书的目的便是向国内外数学界介绍我在文[L3]和文[L6]中所获得的处于世界前沿水平的研究成果,并在此同时向广大数论爱好者展示解析数论中一些常用的技巧和方法。第一章

和第二章是本书的基础，其中分别用细腻的笔法讲解了 L - 函数（包括 zeta 函数）的基础理论、大筛法的基本理论及其如何用于 L - 函数零点密度估计的推导。本书的特点之一是弃用了“Siegel 定理”这个不实效的结果，因为我已发现在推导该定理时存在严重逻辑错误。由著名数学家潘承洞和潘承彪所著的《解析数论基础》一书（[PP]），无论从深度和广度上都已超过了 Davenport 的书，近 20 年来的确使国内大量年轻学者受益匪浅，但其中也有的处理含糊不清，为此我在处理相关内容时进行了若干更正。其一，涉及 L - 函数的估阶，我在定理 1.3.6(i)的(b)步骤中所构造的那个函数 $f(s)$ 确为解析函数（这是应用最大模原理所必需的），而且我在那里接下去所做的技术讨论也是[PP]中所没有的。其二，涉及 L - 函数在“$\sigma = 1$”附近的“无对数因子型”零点密度估计，我在定理 2.5.1 中只能获得带有“loglog”型因子的零点密度估计，这还是将[PP]中相关错误的处理加以更正并加细讨论后才得到的，因为我发现在 Jutila 于 1977 年发表的那篇论文中，它仅仅是认为用其方法可获得“无对数因子型”零点密度估计而并未详细写出（[PP]中正是用了 Jutila 所建议的方法）。是不是其他获得 L - 函数“无对数因子型”零点密度估计的方法也经不起推敲？我经研究发现果真如此，于是 Montgomery 和 Vaughan（还有潘承洞、陈景润、刘健民、李红泽）等人关于 Goldbach 例外集的重要工作就都达不到了。值得指出的是，涉及第三章中的结果，实际上只需要 L - 函数的带有“log”较小幂次型因子的零点密度估计就足够了。本书第三章则系统地阐述了我关于 BDH 均值和的两项成果，其中的论证在本书范围内是“自给自足”的，追求新颖性（例如，我在 §3.2 中设计了一种初等的处理方法，以此避免使用要用实分析 L^2 - 理论中的 Plancherel 定理才能证明的“Gallagher 引理”），且对论文中的结果略有改进（例如，定理 3.2.1 已将文[L3]

中的系数由“1/4 改进为 1/2”，而与文[L6]的主要结果相比，在定理 3.3.1 的表述中，则添加了因不使用“Siegel 定理”所产生出来的一个额外非负求和）。本书中没有对任何推广形式的“BDH 型均值和”加以论述，有兴趣的读者可参阅我已发表的二篇论文（见[L2]，[L4]）。本书 § 3.4 中提到的那个均值和，亦是很值得研究的，对此有兴趣的年轻学者无妨深入地探讨一下。

解析数论在我国是强项，自华罗庚、闵嗣鹤、王元、陈景润、潘承洞等以来已有几代学者在从事相关一些方向的研究，目前可以说是方兴未艾，年轻人才辈出，都活跃在国际研究前沿。因此，我希望本书的出版能对同行学者具有一定的启迪意义。追求数学推理的严密性实在是数学家最重要的素质，这不仅应体现在若干带刺激性的计算或证明中，更应体现在理解一些数学中最基本但却较为乏味的东西上，对此恐怕只有那些仔细品味本书中细致推理的读者才能体会到我的良苦用心。阅读本书读者须具备初等数论、数学分析以及复变函数的大量知识。

哈工大数学系吴从炘、李容录、唐余勇三位教授，以及哈工大出版社黄菊英总编、刘培杰先生，皆对本书的出版给予支持与鼓励，我在此对他们表示衷心的感谢。本书是由哈工大校科研专著出版基金资助出版的。

刘弘泉

2008 年 10 月于哈工大

常用的一些记号

1°. Res 和 Ims 分别为复数 s 的实部与虚部，即 $s = \mathrm{Re}s + i\mathrm{Im}s$，$i = \sqrt{-1}$，见 §1.1。

2°. $\Gamma(s)$ 为 Γ－函数，当 $\mathrm{Re}s > 0$ 时，它定义为

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t。$$

见 §1.1。

3°. (n,q) 与 $[n,q]$ 分别表示全不为零的整数 n 与 q 的正的最大公因子与最小公倍数. 当 $n = 0, q \neq 0$ 时，定义 $(n,q) = |q|$，其他情形没有定义，当 $nq \neq 0$ 且 $(n,q) = 1$ 时称 n 与 q 互素。见 §1.2。

4°. $a \equiv b \pmod q$ 或 $q \mid (a-b)$ 表示 $q \neq 0$ 且 $(a-b)$ 为 q 的整数倍，见 §1.2。

5°. p 表示素数，即仅以 1 和它自身为因子的正整数。规定 1 不是素数。见 §1.2。

6°. $\varphi(q)$ 为 Euler 函数，即不超过 q 且与 q 互素的正整数个数，

$$\varphi(q) = q\prod_{p\mid q}\left(1 - \frac{1}{p}\right)。$$

见 §1.2。

7°. χ 或 $\chi(n)$ 为特征函数，它是完全积性的周期函数。设 q 为正整数，则模 q 的特征 $\chi(n)$ 的周期为 q。当 $(n,q) > 1$ 时 $\chi(n) = 0$，当 $(n,q) = 1$ 时，$|\chi(n)| = 1$，并规定 $\chi(0) = 0$。见 §1.2。

8°. $e(\xi)=\exp(2\pi i\xi)=e^{2\pi i\xi}=\cos(2\pi\xi)+i\sin(2\pi\xi)$, π 为圆周率, $i=\sqrt{-1}$。见 §1.2。

9°. $\tau(\chi)=\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant q}\chi(n)e(n/q)$ 为 Gauss 和,其中 χ 为模 q 的特征,见 §1.2。

10°. χ_q^0(或 χ_0, 若不致引起混淆) 为模 q 的主特征, 即当 $(n,q)=1$ 且 $n\neq 0$ 时值恒为 1 的特征。见 §1.2。

11°. $c_q(n)=\tau(\chi_q^0)=\sum\limits_{\substack{1\leqslant n\leqslant q\\(n,q)=1}}e\left(\frac{n}{q}\right)$ 为 Ramanujan 和,其值为 $\frac{\varphi(q)\mu(q/(n,q))}{\varphi(q/(n,q))}$,见 §1.2。

12°. $\sum\limits_{\chi \bmod q}$ 表示求和通过模 q 所有的特征,见 §1.2。

13°. $\mu(q)$ 为 Möbius 函数, $\mu(1)=1$, 当 q 为 r 个不同素数之积时, $\mu(q)=(-1)^r$,对其他情形 $\mu(q)=0$。见 §1.2。

14°. $L(s,\chi)$ 为 L - 函数, χ 为模 q 的任一特征, s 为复数。当 $\mathrm{Re}s>1$ 时,它定义为

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

见 §1.3。

15°. $\xi(s,\chi)$ 为一个整函数,见 §1.3。

16°. $\zeta(s)$ 为 ζ - 函数, s 为复数。当 $\mathrm{Re}s>1$ 时,它定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s},$$

见 §1.3。

17°. $\xi(s)$ 为一个整函数,见 §1.3。

18°. $A=O(B)$ 或 $A\ll B$ 表示 $B\geqslant 0$ 且 $|A|\leqslant CB$,其中 C 是一个相对而言可以忽略不计的正常数,见 §1.3。

19°. $\tau(n)$ 为除数函数,即正整数 n 的不同的因子的个数,见

§1.4。

20°. $\Lambda(n)$ 为 von Mangoldt 函数，当 n 为素数 p 的正整数次幂时，$\Lambda(n) = \log p$，否则 $\Lambda(n) = 0$。见 §1.4。

21°. $N(T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 的满足条件 $|t| \leqslant T$ 的非平凡零点 $s = \sigma + it$ 的数目，其中零点是几阶的就重复计数几次，见 §1.5。

22°. $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足条件 $|t| \leqslant T$ 的非平零点 $s = \sigma + it$ 的数目，其中零点是几阶的就重复计数几次，见 §1.5。

23°. $\pi(x;q,a)$ 表示算术级数 $\{a + nq \mid n = 0,1,2\cdots\}$ 中不超过 x 的不同素数的个数，见 §1.6。

24°. $\psi(x;q,a) = \sum\limits_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv a(\mathrm{mod}\ q)}} \Lambda(n)$，见 §1.6。

25°. $\psi(x,\chi) = \sum\limits_{n \leqslant x} \chi(n)\Lambda(n)$，其中 χ 为一特征，见 §1.6。

26°. $\psi(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} \Lambda(n)$，见 §1.6。

27°. $\pi(x)$ 表示不超过 x 的不同素数的个数，见 §1.6。

28°. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，见 §1.6。

29°. $\|x\|$，当 x 为 N 维向量 $(x_1,\cdots,x_N)$ 时 ($x_1,\cdots,x_N$ 为复数)，表示向量的范数，即

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_N|^2},$$

见 §2.1。

30°. $\|x\|$，当 x 为实数时，表示 x 到距之最近的整数之间的距离，即

$$\|x\| = \min_{n \in Z} |x - n|,$$

其中 Z 表示全体整数的集合，见 §2.1。

31°. R^1 表示实直线 $(-\infty,\infty)$，见 §2.2。

32°. $\hat{f}$ 为函数 f 的 Fourier 变换。当 f 在 R^1 上绝对可积时，

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e(ux)\mathrm{d}u。$$

见 §2.2。

33°. $\tau_a(r)=\prod_{p\mid r}(1-p^a)^{-1}$，其中 $a=-\frac{1}{3}$，见 §2.3。

34°. $k(n)=n\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$，见 §2.4。

35°. γ 为 Euler 常数，$\gamma=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{n}-\log N\right)$，见 §2.3。

36°. $N(\alpha,T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 的满足 $\rho=\beta+it$，$|t|\leqslant T$，$\alpha\leqslant\beta\leqslant 1$ 的零点 ρ 的个数，其中一个零点是几阶的就重复计数几次，见 §2.4。

37°. $\sum_{\chi \bmod q}^{*}$ 表示求和通过模 q 的所有原特征 χ，见 §2.4。

38°. $N(\alpha,T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho=\beta+it$，$|t|\leqslant T$，$\alpha\leqslant\beta\leqslant 1$ 的零点 ρ 的个数，其中一个零点是几阶的就重复计数几次，见 §2.5。

39°. $S(Q,x)=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\left(\psi(x;q,a)-\frac{1}{\varphi(q)}\psi(x,\chi_q^0)\right)^2$ 为 BDH 均值和，其中 $x\geqslant Q\geqslant 3$，见 §3.1。

40°.
$$T(Q,x)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{q}\sum_{\substack{(a,q)=1\\1\leqslant a\leqslant q}}\left|\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)\mathrm{e}\left(\frac{na}{q}\right)-\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,q)=1}}\Lambda(n)\right|^2,$$
见 §3.4。

41°. $\tau_Q(r)=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant Q\\n\mid r}}1$，见 §3.5.

目　录

第一章

L 函数

特征及 L 函数是为了研究算术级数中素数的分布而引入的。

§1.1　Γ 函数

我们用 $\mathrm{Re}s$ 代表复数 s 的实部。对任意正实数 t，t^{s-1} 定义为

$$\exp((s-1)\log t),$$

这里 $\log z$ 取对数的主分支，即可把 z 取值于整个复 z 平面上去掉了原点及负实轴后得到的开连通集 Ω，且 $\log 1=0$（这时 $\log z$ 为 Ω 上的解析函数）。$t>0$，t 固定时，t^{s-1} 则为全 s 平面上处处解析的函数，即整函数。当 $\mathrm{Re}s>0$ 时，Γ 函数 $\Gamma(s)$ 定义为

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t,$$

这里积分的收敛应理解为两个极限

$$\int_0^1 e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t=\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t \text{ 与} \int_1^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\int_1^x e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$$

同时存在，而有限区间上复值函数的积分则应定义为先将被积函数的实部与虚部分别积分，然后将实部积分的值加上虚部积分的值乘 i。为研究 $\Gamma(s)$ 的性质，我们需要证明几个引理。

引理 1.1.1　设 s 为一个复变数，$f(t,s)$ 当 $0<t\leqslant 1$ 时为关于 s 的在 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数，当 $1\leqslant t<\infty$ 时为关于 s 的整函数。而且，对于任意给定的正数 δ 及 D，$|s|\leqslant D$，设 $f(t,s)$ 关

于 t 在包含于区间$[\delta,\infty)$的任何有限的闭区间上对 s 一致连续。我们有

(i) 若对任取 $d>0$，当 $0<t\leqslant 1, d\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant 3d$ 时，$f(t,s)=O(G(t))$，且

$$\int_0^1 G(t)\mathrm{d}t=\lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 G(t)\mathrm{d}t$$

存在，那么当 $\mathrm{Re}s>0$ 时，极限

$$F_1(s)=\lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}t$$

存在，且表示 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数。

(ii) 若设对任取 $d>0$，当 $1\leqslant t<\infty$，$-d\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant d$ 时，就有$f(t,s)=O(K(t))$，且

$$\int_1^\infty K(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\int_1^x K(t)\mathrm{d}t$$

存在，那么对任意复数 s，极限

$$F_2(s)=\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t,s)\mathrm{d}t=\int_1^\infty f(t,s)\mathrm{d}t$$

存在，且代表一个整函数。

因此，若(i) 与(ii) 中的假设条件都成立，当 $\mathrm{Re}s>0$ 时定义

$$F(s)=\int_0^\infty f(t,s)\mathrm{d}t=F_1(s)+F_2(s),$$

则函数 $F(s)$ 为 $\mathrm{Re}s>0$ 上的解析函数。

证明：(i) 设 s_0 为任一个满足 $\mathrm{Re}s_0>0$ 的复数。令 $d=\frac{1}{2}\mathrm{Re}s_0$。用 C 代表圆周$\{z\mid |z-s_0|=d\}$。当$|s-s_0|\leqslant d$ 时，我们有 $d\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant 3d$。设 M 为一个充分大的自然数。当$|s-s_0|<\frac{d}{2}$ 时，令

$$f_M(t,s)=\sum_{n=0}^{M} a_n(t,s_0)(s-s_0)^n,$$

$$a_n(t,s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,z)}{(z-s_0)^{n+1}}\mathrm{d}z。$$

则由假设的条件可得

$$\begin{aligned} f_M(t,s) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,z)}{z-s_0}\left(\sum_{n=0}^{M}\left(\frac{s-s_0}{z-s_0}\right)^n\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,z)}{z-s}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,z)}{z-s}\left(\frac{s-s_0}{z-s_0}\right)^{M+1}\mathrm{d}z \\ &= f(t,s) + O(2^{-M}G(t))。\end{aligned}$$

对任意的 $\delta > 0$, $a_n(t,s_0)$ 为 $[\delta,1]$ 上的连续函数。所以

$$\begin{aligned} \int_\delta^1 f_M(t,s)\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{M}(s-s_0)^n\int_\delta^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t \\ &= \int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t + O(2^{-M}\int_\delta^1 G(t)\mathrm{d}t)。\end{aligned}$$

令 $M \to \infty$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_0)^n\int_\delta^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t = \int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t。\tag{1}$$

由假设可得估计

$$|a_n(t,s_0)| = O(d^{-n}G(t)),\tag{2}$$

及

$$\int_0^1 G(t)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 G(t)\mathrm{d}t < \infty,$$

故可知

$$\int_0^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t$$

存在,且

$$\int_\delta^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t = \int_0^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t + O\left(\int_0^\delta d^{-n}G(t)\mathrm{d}t\right)。$$

所以由(1)可得

$$\int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(s-s_0)^n\left(\int_0^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t\right) + O\left(\int_0^\delta G(t)\mathrm{d}t\right)。$$

令 $\delta \to 0$,可得

$$\int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(s-s_0)^n\left(\int_0^1 a_n(t,s_0)\mathrm{d}t\right)。$$

由(2),这个等式就说明$\int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}t$ 是$|s-s_0| < d$ 上的解析函数。所以

$$F_1(s) = \int_0^1 f(t,s)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 f(t,s)\mathrm{d}t$$

存在且代表$|s-s_0| < d$ 中的解析函数。由于 s_0 是任意的,$\mathrm{Re}s_0 > 0$,所以(i) 成立。类似地可证明(ii)。**证毕**。

引理 1.1.2 (i) 当 $0 \leqslant x < 1$ 时,$\log(1-x) \leqslant -x$。

(ii) 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 时,$x + \log(1-x) + x^2 \geqslant 0$。

证明:(i) 令 $f_1(x) = \log(1-x) + x, 0 \leqslant x \leqslant x_1 < 1$。则

$$f'_1(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leqslant 0。$$

所以 $f_1(x)$ 为下降函数。由于 $f_1(0) = 0$,可知对每个 $x \in [0,x_1]$ 成立着$f_1(x) \leqslant 0$。

(ii) 令 $f_2(x) = x + \log(1-x) + x^2, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$,则

$$f'_2(x) = 1 - \frac{1}{1-x} + 2x = x\left(2 - \frac{1}{1-x}\right) \geqslant 0,$$

所以 $f_2(x)$ 为上升函数。由于 $f_2(0) = 0$,可知对每个 $x \in [0,\frac{1}{2}]$ 成立有$f_2(x) \geqslant 0$。**证毕**。

引理 1.1.3(分部求和) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有连续一阶导函数 $f'(x)$,C_m 为任意复数,

$$C(x) = \sum_{a<m\leqslant x} C_m, a \leqslant x \leqslant b,$$

则

$$\sum_{a<n\leqslant b} C_n f(n) = -\int_a^b C(x)f'(x)\mathrm{d}x + C(b)f(b)。$$