首席教师

专题小课本

●小方法大**智慧** ●小技巧大**成效**

●小单元大**提升** ●小课本大**讲坛**

高中数学 空间向量与立体几何

总主编/钟 山

金星教育

中国出版集团 现代教育出版社

海阔凭鱼跃

方法赢得速度 选择决定未来

FANGFAYINGDESUDU XUANZEJUEDINGWEILAI

高中数学

1.函数 2.几何初步 3.三角函数与三角恒等变换 4.平面向量 5.数列 6.不等式 7.圆锥曲线与方程 8.导数及其应用 **9.空间向量与立体几何** 10.常用逻辑、推理与证明 11.统计与概率 12.算法、框图与复数 13.数学思想与方法

高中物理

1.力和直线运动 2.曲线运动与机械能 3.热运动与能量守恒 4.波动与相对论 5.电磁学（上） 6.电磁学（下） 7.动量守恒与微观粒子 8.物理实验与探究 9.物理思想与方法

高中化学

1.电解质溶液 2.化学反应与能量 3.元素周期律与化学键 4.化学反应速率与化学平衡 5.元素与化合物 6.物质结构与性质 7.有机化学基础 8.化学实验基础 9.化学计算

你的位置在哪里

有三只小鸟，它们一起出生，又一起从巢里飞出去，一起寻找成家立业的位置。

它们很快便飞到一座小山上。一只小鸟落到一棵树上说："哎呀，这里真好，真高。你们看，那成群的鸡、鸭、牛、羊，都在羡慕地向我仰望呢！能够生活在这里，我们应该满足了。"另两只小鸟失望地摇了摇头说："好吧，你既然满足，就留在这里吧，我们还想再到高处看看。"这两只小鸟飞呀飞呀，终于飞到了五彩斑斓的云彩里。其中一只陶醉了，情不自禁地引吭高歌起来，它沾沾自喜地说："我不想再飞了，这辈子能飞上云端，你不觉得已经十分了不起了吗？"另一只很难过地说："不，我坚信一定还有更高的境界。遗憾的是，现在我只能独自去追求了。"说完，它振翅翱翔，向着九霄，向着太阳，执著地飞去……

最后，落在树上的成了麻雀，留在云端的成了大雁，飞向太阳的成了雄鹰。

ISBN 978-7-80196-698-8

9 787801 966988 >

定价：9.80元

责任编辑：苏欣力 逄 梁
责任校对：张 强
封面设计：书友传媒

图书在版编目（CIP）数据

首席教师专题小课本．高中数学．空间向量与立体几何／钟山主编．—北京：现代教育出版社，2008.4
ISBN 978－7－80196－698－8

Ⅰ.首… Ⅱ.钟… Ⅲ.几何课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

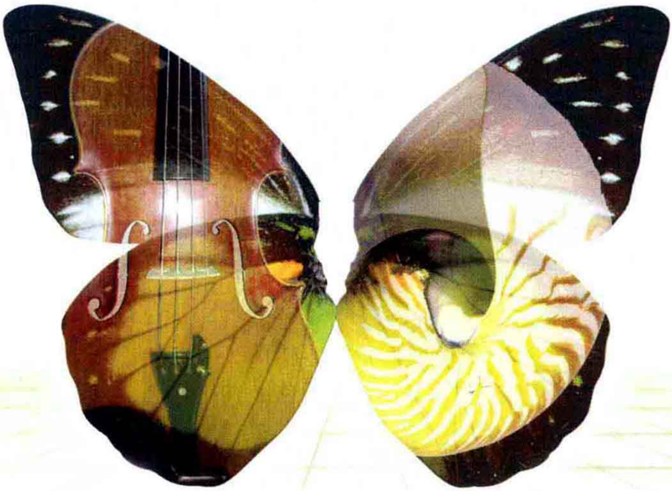
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 038463 号

书　　名： 首席教师专题小课本·高中数学—空间向量与立体几何
出版发行： 现代教育出版社
地　　址： 北京市朝阳区安华里 504 号 E 座
邮政编码： 100011
印　　刷： 北京市梦宇印务有限公司印刷
发行热线： 010－61743009
开　　本： 890×1240　1/32
印　　张： 5.25
字　　数： 220 千字
印　　次： 2008 年 4 月第 1 版　第 1 次印刷
书　　号： ISBN 978－7－80196－698－8
定　　价： 9.80 元

18

您需要的不是机会

NINXUYAODEBUSHIJIHUI



而是支换支点

小单元——知识·方法·能力·命题的交汇处

小单元——高效学习·成功备考的新支点

小单元学习法

首席教师的成功经验，优秀学生的学习秘诀

小单元是指在充分研究考纲和课标，透析教材知识结构，按照知识、方法、能力与中高命题的内在联系和系统结构，把教材内容分成若干个相对完整和独立的内容组块。几个小单元又构成相当于教材单元（或章）的内容板块，教材的几个单元又构成了大专题。

课时的基础性学习与单元的提升性学习

各类统考、高考试题命制的立足点、密集区在小单元，其能力要求、难度、综合性、深刻性、创新性往往与课时学习、教材内容严重脱节。在一节教材或一个课时中，对问题、原理及规律往往不能完全清楚认识，也不可能深化拓展，其实这只是基础性学习阶段。真正发展能力和提升成绩的支点是小单元，小单元学习是更高层次的提升性学习，是真正深化、拓展、发展能力的重要阶段，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。

主动变换发力点

实际教学中由于课时紧张，大多数师生致力于同步教材的课时学习，习惯于一个个概念孤立记忆，一道道题去解析，往往事倍功半，这也是很多学生平时学习很努力，但考试成绩不理想的重要原因之一。这就要求我们转变观念，在同步学习及备考复习的过程中适时、适度的插入小单元、大单元及专题学习，主动完成提升性学习，对所学内容分级整合深化、各个击破，分级提升学生的知识整合能力、综合运用能力和问题解决能力。

单元学习五大关键

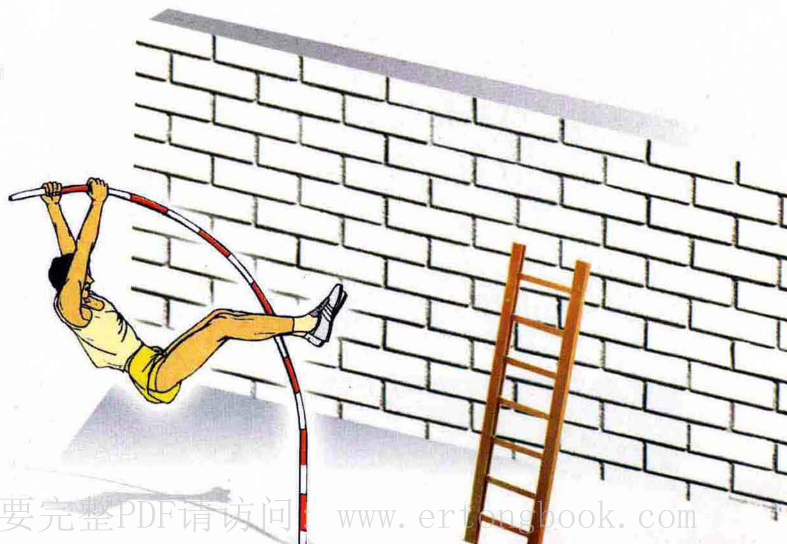
整合深化
形成知识模块

归纳拓展
活化解题方法

系统分层
培养高考能力

居高临下
形成应试策略

题组检测
优化训练方法



首席教师
专题小课本

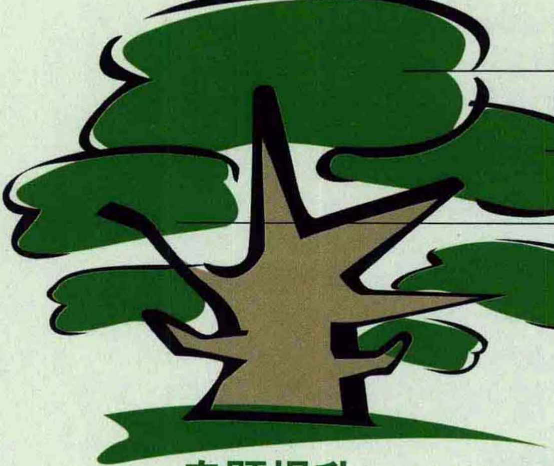
高中数学

几何初步

总 主 编：钟　山
本册主编：向　宁
　　　　　李庆阳

本丛书成立答疑解惑工作委员会，如有疑难问题可通过以下方式与我们联系：

企业网站：
http://www.bjjxsy.com
产品网站：
http://www.swtnet.net
服务电话：010-61743009
　　　　　010-61767818
电子邮箱：
book@bjjxsy.com
service@swtnet.net
通信地址：北京市天通苑邮局6503号信箱
邮政编码：102218



思维方法攻略
SIWEIFANGFAGONGLUE

高考热点突破
GAOKAOREDIANTUPO

专题速记图解
ZHUANTISUJITUJIE

专题提升

高考热点导航
GAOKAOREDIANDAOHANG

高考零距离检测
GAOKAOLINGJULIJIANCE

知识清单精解

单元内知识、方法、公式等学习要点清单化，运用整合、深化、对比、综合、发散等精细化学习方法及口诀、图表、顺口溜等学习技巧，精讲透析，简明快捷，易看、易记、易懂。

方法技巧突破

精心归纳问题及类型，找到最佳解决思想方法、解题技巧，透析方法运用要点，实现有效迁移，举一反三。例题讲解中进一步对疑难点的深化拓展，真正解决知识学习与解题运用的脱节问题。

高考能力培养

透析考纲对单元内容的能力要求，精析高考对知识内容的具体要求配以典型考例透视能力层次，科学把握学习的难度和综合性，做到有的放矢，达到事半功倍的学习效果。

命题规律点津

从高考要求、命题规律、应试策略三个维度详实讲解单元的高考现状与发展趋势，具体把握应试策略与技巧，真正实现高考备考同步化，科学阐释了零距离高考新概念。

题组优化训练

从误区突破、综合创新两个维度分题组选题，精选高考真题，热点模拟题、创新题、原创题，针对训练，集中突破。同时答案详解，配以题组规律总结，更利于练后反馈，达到训练效益最大化。

知识网络梳理

细致梳理概括大单元或章的知识与方法，达到网络化、图式化、结构化和形象化，利于快捷地由小单元升华到大单元，进一步扩充知识架构。

综合专题突破

在小单元讲练的基础上，整理出综合性、创新性、能力性更强的问题、方法、题型，以小专题形式专项讲解、拓展突破。

发现依靠眼光 行动决定收获

前言 QIANYAN

近年来，我国的基础教育改革和素质教育进程已进入深化实施阶段，中学教材已呈现出“一标多本”的多元化格局，高考更是呈现出“一纲多卷”的地方化特色。为了更好地适应教学考的新趋势、新特色，我们集各省名校的学科首席教师、一线特高级教师和有经验的教育考试专家的聪明智慧和科研成果，精心构思，编写打造了本套丛书。

本套丛书的鲜明特色和深度魅力，主要体现在以下四个方面：

1．核心单元，提升成绩的真正支点

小单元学习与同步课时学习相比，是更高层次的提升性学习，是真正深化拓展、发展能力、成功应试的重要步骤，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。本套丛书以小单元为讲练基点，弥补了同步教学的缺失和薄弱环节，单元内由“知识、方法、能力、应试与训练”五要素构成了最优化学习程序，层次鲜明，通过对重难点、能力点、方法点和考点的精心讲练，有效的为师生最大限度提升成绩，建起了知识、方法和能力提升的新支点。

2．螺旋提升，提供三级发展平台

专题编写遵循“小单元提升、大单元提升、本专题提升”三个梯度，再加上平时的课时学习，讲练结合、循序渐进、螺旋提升，构成了学科学习、思维发展与能力培养的有机整体。

3．突出方法，多维度培养能力

无论是疑难讲解，问题解决，还是应试与训练，均以方法归纳、提炼与运用为突破口，力求做到集“学习法、解题法、应试法、训练法”于一身，帮助学生高效构建知识体系和方法体系，使读者在运用本书高效学习的同时收获更多的有效方法，发掘自己的最大学习潜能。

4．汲取各版本精华，真正的专题教材

在编写过程中，充分汲取各版本教材的特色与精华，选取其中典型素材、典题典例、方法技巧，以师生完成同步教材的课时学习为基础，通过整合、深化、发散、分级，达到高考要求，既是学生完成提升性学习的专题教材，更是教师各类单元、专题教学的必备参考。

阿基米德说，给我一个支点，我将撬起地球，本套丛书必将成为您成功的新支点，发展的新平台．

目录

首席寄语

专题导引

本专题包括两部分内容,第一部分是空间向量及其运算,第二部分是立体几何中的向量方法,空间向量及其运算主要包括:加减运算、数乘运算、数量积运算、正交分解及其坐标表示等内容,立体几何中的向量方法主要包括共线向量、法向量以及向量在立体几何中的应用.

空间向量为处理立体几何问题提供了新的视角,空间向量的引入,为解决三维空间中图形的位置关系与度量问题提供了一个十分有效的工具,在本专题,学生将在学习平面向量的基础上,把平面向量及其运算推广到空间,运用空间向量解决有关直线、平面位置关系的问题,体会向量方法在研究几何图形中的作用,进一步发展空间想象能力和几何直观能力.

高考命题规律

随着新教材的逐步推广、使用,"向量"将会成为高考命题的热点,一般选择题、填空题重在考查向量的概念、数量积及其运算律,在有些立体几何的解答题中,建立空间直角坐标系,以向量为工具,利用空间向量的坐标和数量积解决直线、平面问题的位置关系、角度、长度等问题越来越受青睐,比用传统立体几何的方法简便快捷,空间向量的数量积及坐标运算仍是高考命题的重点,解答题大都属于中档题.

学习应试策略

根据近几年本专题部分的命题特点,复习时宜采用以下策略:

1.空间向量及其运算这一部分一定要理解基本概念并会运用解决相关问题,它提供了一种解决问题的工具,特别在处理垂直、夹角、距离时应用十分方便,注意在做题时,不断领会应用.

2.利用向量坐标解题,建立坐标系是关键一步.一般在具有垂直关系较多的正方体、正四棱柱、直棱柱中运用坐标法建系,并且使尽量多的点在坐标轴上,这样表达、运用都十分方便,求角求距离常用坐标关系,因为这样可以避免作图的过程,直接求,方便可行,在做题中注意体会.

3.对于直接建立空间直角坐标系不方便的题目,可以选取基向量,根据空间向量基本定理知,任一向量都可以用基向量表示,这就为我们解题带来方便.

4.用向量知识证明立体几何问题,仍然离不开立体几何定理,如要证明线面平行,只需要证明平面外的一条直线和平面内的一条直线平行,即化归为证明线线平行,用向量方法证直线 $a\parallel b$,只需证明向量 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R})$ 即可,若用直线的方向向量与平面的法向量垂直来证明线面平行,仍需强调直线在平面外.

5.复习中要加强数学思想方法的总结与提炼,在本专题注意以下数学思想的运用:

(1)数形结合思想:利用空间向量解决立体几何中的问题,首先要探索如何用空间向量来表示点、直线、平面在空间的位置以及它们之间的关系,即建立立体图形与向量之间的联系,这样就可以将立体几何问题转化成空间向量来解决.

(2)化归思想:立体几何中的空间位置关系及空间距离、空间角等问题,都可以运用化归思想,转化为利用空间向量来解决.如二面角可转化为两平面的法向量的夹角,点到面的距离可转化为向量在平面法向量的射影来求.

(3)函数、方程的思想:立体几何中的开放、探索性问题,可根据题目给出的条件,列出方程或方程组,从而使问题得以解决.

[单元提升篇]

第一章　空间向量及其运算

课程标准要求

1. 空间向量及其运算

(1)理解空间向量的概念、掌握空间向量的加法、减法和数乘运算；

(2)理解共线向量、共面向量的意义及其定理,空间向量的基本定理；

(3)掌握空间向量的数量积的定义及其性质、运算律.

2. 空间向量的坐标运算

理解空间向量坐标的概念;掌握空间向量的坐标运算以及两点间距离公式和夹角的公式.

第一单元

空间向量的加减、数乘及数量积运算

知识清单精解 ZHISHIQINGDANJINGJIE

要点1　向量的概念

向量是既有大小,又有方向的量,向量的模是正数或0,是可以进行比较大小的,由于方向不能比较大小,因此“大于”、“小于”对向量来说是没有意义的,比如可以说$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,但不能说$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$.

要点2　向量的三角形法则和平行四边形法则

(1)在掌握向量加减法的同时,应首先掌握有特殊位置关系的两个向量的和或差,如共线、共起点、共终点等.

(2)要记住常用关系、常用数据.如在$\triangle ABC$中,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$;以向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形中,$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})$表示两条对角线所在的向量.

(3)在应用向量的三角形法则和平行四边形法则时，要注意其要点：

①对于向量加法运用平行四边形法则要求两向量共起点，运用三角形法则要求向量首尾顺次相连.

②对于向量的减法要求两向量有共同的起点.

要点3　共线向量及共线向量定理

(1)空间共线向量与平面共线向量的定义完全一样，当我们说 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线时，表示 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 两条有向线段所在直线既可能是同一直线，也可能是平行直线；当我们说 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，也具有同样的意义.

(2)“共线”这个概念具有自反性 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{a}$，也具有对称性，即若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.

(3)用共线向量定理证明两直线平行是常用方法，但是要注意，向量平行与直线平行是有区别的，直线平行不包括共线的情况.如果应用共线向量定理判断 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 所在的直线平行，还需说明 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$)上有一点不在 $\boldsymbol{b}$(或 $\boldsymbol{a}$)上.

(4)用共线向量定理证明三点共线也是常用方法之一，在利用该定理证明(或判断)三点 A、B、C 共线时，只需证明存在实数 λ，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$ 或 $\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{AC}$ 即可.同时也可证明：对空间任意点 O，有 $\overrightarrow{OB}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OC}$.

要点4　共面向量定理的理解

(1)空间一点 P 位于平面 MAB 内的充分必要条件是存在有序实数对 (x,y)，使 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$.满足这个关系式的点 P 都在平面 MAB 内；反之，平面 MAB 内的任一点 P 都满足这个关系式.这个充要条件常用以证明四点共面.

(2)共面向量的充要条件给出了平面的向量表示式，说明任意一个平面可以由两个不共线的平面向量表示出来，它既是判断三个向量是否共面的依据，又是已知共面条件的另一种形式，可以借此已知共面条件转化为向量式，以方便向量运算.另外，在许多情况下，可以用“若存在有序实数组 (x,y,z)，使得对于空间任意一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，且 $x+y+z=1$ 成立，则 P、A、B、C 四点共面”作为判定空间上四个点共面的依据.

要点5　空间向量的数量积

(1)两向量的数量积，其结果是个数量，而不是向量，它的值为两向量的模与两向量夹角的余弦的乘积，其符号由夹角的余弦值确定.

(2)两个向量的数量积是两个向量之间的一种乘法，与以前学过的数的乘法是有区别的，在书写时一定要把它们严格区分开来，绝不可混淆.

(3)当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 不能推出 $\boldsymbol{b}$ 一定是零向量，这是因为任一个与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的非零向量 $\boldsymbol{b}$，都有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，这由向量的几何意义就可以理解.

要点6　两个向量数量积的性质

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是非零向量，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量，θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角，则

(1)$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

特别地:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4)若 θ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角,则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.(5)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

向量的数量积的性质有:$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$,$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,因此,用向量的数量积可以解决有关长度、角度、垂直的问题.

要点 7　数量积、运算律的理解

(1)对于三个不为 0 的实数 a,b,c,若 $a\cdot b=a\cdot c$,则 $b=c$;对于三个不为 $\mathbf{0}$ 的向量,若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,不能得出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,即向量不能约分.

(2)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$,不能得出 $\boldsymbol{a}=\dfrac{k}{\boldsymbol{b}}\left(\boldsymbol{b}=\dfrac{k}{\boldsymbol{a}}\right)$,也就是说,向量不能进行除法运算.

(3)对于三个不为 0 的实数 a,b,c,有 $(ab)c=a(bc)$,对于三个不为 $\mathbf{0}$ 的向量,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$不等于 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$,向量的数量积不满足结合律.

方法技巧突破
FANGFAJIQIAOTUPO

数学思想方法

(一)化归思想

将几何问题化归为向量问题,然后利用向量的性质进行运算和论证,再将结果转化为几何问题,这种“从几何到向量,再从向量到几何”的思想方法,在本章尤为重要.

例 1　已知$\triangle ADB$ 与$\triangle ADC$ 都是以 D 为直角顶点的直角三角形,且 $AD=BD=CD$,$\angle BAC=60°$.(1)求证:$BD\perp$平面 ADC;(2)若 H 是$\triangle ABC$ 的重心,求证:H 是 D 在平面 ABC 内的射影.

证明:如图 1-1-1 所示.

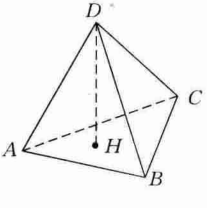


图 1-1-1

(1)不妨设 $AD=BD=CD=1$,则 $AB=AC=\sqrt{2}$,

故$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.因为$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=1$.$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\cos 60°=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=1$,所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,即 $BD\perp AC$.又已知 $BD\perp AD$,且$AD\cap AC=A$,所以 $BD\perp$平面 ADC.

(2)$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\sqrt{2}\cos 45°-1\cdot\sqrt{2}\cos 45°=0$.故 $DH\perp BC$.又$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.故 $DH\perp AC$,又 $AC\cap BC=C$,所以 $DH\perp$平面 ABC,即 H 是 D 在平面 ABC 内的射影.

（二）分类讨论思想

立体几何中的分类讨论主要是指对角的大小、点的位置等的讨论.

例 2　已知两条异面直线 a,b 的距离为 1，所成的角为 $60°$ 且 $M\in a,N\in b$，AB 为公垂线，且 $A\in a,B\in b,MA=NB=10$，求 $M、N$ 之间的距离.

解法 1：如图 1-1-2，过 b 作面 $\alpha /\!/ a$，过 a 与 AB 作面 $\beta\cap\alpha=l$，则 $a/\!/l$，又 AB 为公垂线，∴ $AB\perp l$，∴ $AB\perp$ 面 α.

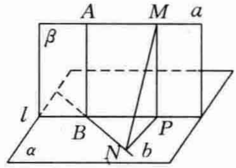


图 1-1-2

当 $\angle PBN$ 为锐角时，$\angle PBN=60°$，∴ $PN^2=BP^2+BN^2-2BP\cdot BN\cos 60°=10^2+10^2-2\times10\times10\times\cos 60°$.

∴ $MN=\sqrt{MP^2+PN^2}$

$=\sqrt{1^2+10^2+10^2-2\times10\times10\times\cos 60°}=\sqrt{101}$.

当 $\angle PBN$ 为钝角（即 N 在 B 的另一侧），同理可求 $MN=\sqrt{301}$.

解法 2：由解法 1 知 $\angle PBN$ 或其补角即为异面直线所成角，即 $\angle PBN=60°$ 或 $120°$，由图知

$|\overrightarrow{MN}|^2=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})^2$

$=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BN}|^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BN}+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BN}$

$=10^2+10^2+1^2+0+0+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BN}=201+2\times10\times10\cdot\cos\langle\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BN}\rangle$.

当 $\angle PBN=60°$ 时，上式 $=201+2\times10\times10\times\cos 120°=101$；

当 $\angle PBN=120°$ 时，上式 $=201+2\times10\times10\times\cos 60°=301$.

∴ $MN=\sqrt{101}$ 或 $\sqrt{301}$.

解题技法

（一）运用向量变换技巧解题

解决向量证明题常有三种操作思路，一是正确分析被证向量式与题目中的特殊点、特殊线段之间的关系；二是正确运用三角形法则与平行四边形法则；三是掌握常用向量变换技巧，如平面共线向量定理、平面向量基本定理等.

例 3　如图 1-1-3，设 A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外的一点，G 是 $\triangle BCD$ 的重心.

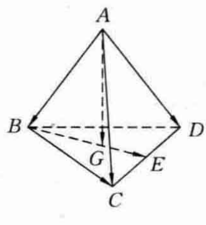


图 1-1-3

求证：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

分析：熟练应用向量加法和减法的运算法则，特别是三角形法则证题.

证明：连结 BG，延长后交 CD 于 E，由 G 为 $\triangle BCD$ 的重心，知 $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

∵ E 为 CD 的中点，∴ $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$

$+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}[(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})]=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

（二）利用向量共线证明线面平行

证明线面平行的常规方法是证明平面外一条直线与平面内一条直线平行，因此可利用平面内外的两向量共线来证明线面平行.

例 4　如图 1-1-4，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在平面互相垂直，点 M、N 分别在对角线 BD、AE 上，且 $BM=AN$.

求证：MN∥平面 CDE.

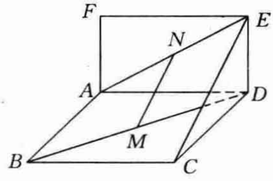


图 1-1-4

分析：要证明 MN∥平面 CDE，只要证明向量$\overrightarrow{NM}$可以用平面 CDE 内的两个不共线的向量$\overrightarrow{DE}$和$\overrightarrow{DC}$线性表示.

证明：如图 1-1-4，因为 M 在 BD 上，设 $BM=\lambda BD$，

所以$\overrightarrow{MB}=\lambda\overrightarrow{DB}=\lambda\overrightarrow{DA}+\lambda\overrightarrow{AB}$. 同理$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DE}$. 又$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=(\lambda\overrightarrow{DA}+\lambda\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BA}+(\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DE})$

$=(1-\lambda)\overrightarrow{CD}+\lambda\overrightarrow{DE}$. 又$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{DE}$不共线，

根据共面向量定理，可知$\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$共面.

由于 MN 不在平面 CDE 内，所以 MN∥平面 CDE.

点评：应用共面向量定理证明线面平行时，要注意说明直线不在平面内这一条件.

高考能力培养
GAOKAONENGLIPEIYANG

1. 用向量法思考问题和解决问题的能力

能力点津：立体几何引入向量以后，有些问题可借助于向量来解决. 如求线段长度，就可将线段用向量表示，利用求模公式来解决.

例 1　如图 1-1-5，已知在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=4$，$AD=3$，$AA'=5$，$\angle BAD=90°$，$\angle BAA'=\angle DAA'=60°$. 求 AC' 的长.

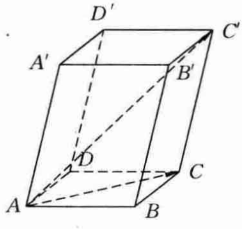


图 1-1-5

解：$\because \overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$，$\therefore |\overrightarrow{AC'}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2=|AB|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA'}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})=4^2+3^2+5^2+2(0+10+7.5)=85$，

$\therefore |\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{85}$.

点评：求两点间的距离或某线段的长度，就是把此线段用向量表示，然后用 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$，即 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$，通过向量运算求 $|\boldsymbol{a}|$.

2. 多题一解,培养能力

例 2 如图 1-1-6 所示,已知线段 AB 在平面 α 内,线段 $AC\perp\alpha$,线段 $BD\perp AB$,且 $AB=7$,$AC=BD=24$,线段 BD 与 α 所成的角为 $30°$,求 CD 的长.

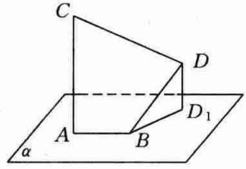


图 1-1-6

分析:利用 $|\overrightarrow{CD}|^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2$ 求解,在求解过程中要注意 $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 所成的角为 $\angle BDD_1$ 的补角.

解:由 $AC\perp\alpha$,可知 $AC\perp AB$,

过点 D 作 $DD_1\perp\alpha$,D_1 为垂足,

连结 BD_1,则 $\angle DBD_1$ 为 BD 与 α 所成的角,

即 $\angle DBD_1=30°$,$\therefore\ \angle BDD_1=60°$,$\because\ AC\perp\alpha$,$DD_1\perp\alpha$,$\therefore\ AC/\!/DD_1$,

$\therefore\ \langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB}\rangle=60°$,$\therefore\ \langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=120°$. 又 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$,

$\therefore\ |\overrightarrow{CD}|^2=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2=|CA|^2+|AB|^2+|BD|^2+2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

$\because\ BD\perp AB$,$AC\perp AB$,$\therefore\ \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

故 $|CD|^2=|CA|^2+|AB|^2+|BD|^2+2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=24^2+7^2+24^2+2\times24\times24\times\cos 120°=625$,$\therefore\ |\overrightarrow{CD}|=25$.

例 3 二面角 α-l-β 的平面角为 $120°$,$A,B\in l$,$AC\subset\alpha$,$BD\subset\beta$,$AC\perp l$,$BD\perp l$,若 $AB=AC=BD=1$,求 CD 的长.

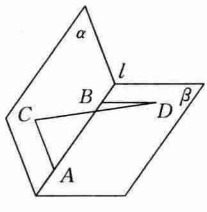


图 1-1-7

解:如图 1-1-7 所示,由已知 $AC\perp AB$,$BD\perp AB$,知:$\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=180°-120°=60°$,

$\therefore\ |\overrightarrow{CD}|^2=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=3+2\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=3+2|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos 60°=4$. $\therefore\ |\overrightarrow{CD}|=2$,即 CD 的长为 2.

点评:用向量法求线段的长度,要用到公式 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$. 以上两例把 $\overrightarrow{CD}$ 表示成 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ 是解决问题的关键.

应试规律点津 YINGSHIGUILÜDIANJIN

1. 考点导航

考点	考点要求
空间向量的概念及其加减和数乘运算	理解空间向量的概念;掌握空间向量的加法、减法和数乘运算
共线向量、共面向量的意义及其定理,空间向量的基本定理	理解共线向量、共面向量的意义及其定理,空间向量的基本定理,并能运用以上定理,证明点共线、点共面、线共面及线线、线面的平行与垂直问题、会求线线角、线面角;会求点点距、点面距等距离问题
空间向量数量积	掌握空间向量的数量积的定义及其性质,运算律