高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编　陶平生　冯跃峰　边红平

DAISHU BIANXING

代数变形

蔡小雄 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

代 数 变 形

编　　著　蔡小雄

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 代数变形/蔡小雄编著. —杭州：浙江大学出版社，2008.8
ISBN 978-7-308-06038-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 蔡… Ⅲ. 代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 087663 号

代数变形

编　　著　蔡小雄

责任编辑　杨晓鸣
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　7.75
印　　数　0001—8000
字　　数　160 千
版 印 次　2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06038-7
定　　价　12.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

丛书编委会

编 写 说 明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来,反响强烈,深受广大读者喜爱,并收到了大量反馈信息。很多读者,包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见,希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求,我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共8种:《图论方法》、《周期函数与周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》;考虑到配套,把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题,通过对典型例题的解剖,传授数学思想方法,侧重培养学生的逻辑思维能力,不唯解题而解题;

2. 本着少而精的原则选择材料,不搞题海战术,不追求大而全,而是以点带面,举一反三;

3. 以数学修养和能力培养为立意,通过深刻剖析问题的数学背景,挖掘数学内涵,培养学生的数学品格和解决实际问题的能力;

4. 在注重基础知识训练同时,有适当程度的拔高,对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编;参加编写的成员是:陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限,书中的不妥之处敬请读者批评指正。

写在前面

著名数学教育家乔治·波利亚有一句脍炙人口的名言:“掌握数学就是意味着善于解题”. 的确,解题是数学工作者数学活动的基本形式,解题也是学生进一步掌握知识,应用知识的重要环节.

数学竞赛是一种较高层次的解题活动,而解题需要一些数学“技巧”. 但这些“技巧”不是个别孤立的一招一式或妙手偶得的雕虫小技,而是一种高层次思维、高智力水平的策略思想. 在学习的起始阶段,我们需要掌握这些方法与技巧,且多多益善. 但到了一定水平以后,也许要追求的就是“无招胜有招”了.

代数是数学竞赛中占比重最多的一部分,很多从事竞赛研究的专家认为:你如果数学竞赛不能取得好成绩,那肯定是代数这块出了问题,这不无道理. 事实上,解决代数问题的关键是掌握代数变形的技巧,代数变形是数学解题的基石,变形能力的强弱直接制约着解题能力的高低.

变形实质上是为了达到某种目的而采用的“手段”,是化归、转化和联想的准备阶段,它属于技能性的层面,需要在实践中反复操练才能把握,乃至灵活与综合应用. 我们在平时学习中如果不善于积累一些变形的技巧,那么在稍复杂的问题面前常会因变形方向不清,而导致常规的化归、转化工作难以实施,甚至无功而返.

解题的成功取决于多种因素,其中最基本的有:解题的知识因素,解题的能力因素,解题的经验因素和解题的非智力因素,等等. 因此,要提高代数变形的能力,应从以下三个层面进行强化与提高:

第一层面:知识结构层面

人的思维依赖于必要的知识和经验,数学知识正是数学解题思维活动的出发点与基石. 掌握丰富的知识并加以优化,才能为题意的本质理解与思路的迅速寻找创造成功的条件. 解题研究的一代宗师乔治·波利亚说过:“货源充足和组织良好的知识仓库是一个解题者的重要资本.”因此,要想提高代数变

形的能力，首先要熟练掌握代数的相关基础知识. 对于中学数学解题来说，应如数家珍地说出教材的概念系统、定理系统、符号系统以及中学数学竞赛涉及的基础理论，并在解题实践中进一步深刻理解.

第二层面：方法技巧层面

R·柯朗在《数学是什么》这本名著的序言中有这样一段话："学生和教师若不试图从数学的形式和单纯的演算中跳出来，以掌握数学的本质，那么挫折和迷惑将变得更为严重."可见，学习数学不能盲目地在题海中遨游，更不能就事论事，尤其是高中阶段的数学学习，应当注重掌握数学的方法技巧.

第三层面：思维能力层面

解题能力，表现为发现问题、分析问题、解决问题的敏锐力、洞察力与整体把握. 其主要成分是三种基本的数学能力，即运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，核心是能否掌握正确的思维方法，包括逻辑思维与非逻辑思维. 只有具备了一定的能力，我们才能在解题中"因题制宜"地选择对口的解题思路，使用有效的解题方法，调动精明的解题技巧.

在本书中，我们将重点探讨第二层面的内容. 笔者将代数变形的常用技巧概括为以下八方面：活用常数，配以对偶，合理代换，加强命题，逐步调整，分拆合项，和式变换与巧妙构造，力求通过一些典型的问题提炼一般的规律，从而掌握方法，形成能力.

本书的写作提纲是在充分征求广大竞赛研究专家和竞赛教练的意见基础上形成的，书中很多内容是根据笔者近几年为杭州二中学生辅导竞赛时的讲课稿整理而成，有些专题的成果已在全国竞赛类核心刊物《中等数学》上发表，也有些内容直接参考自国内外竞赛专家的论文或专著，在此一并表示感谢. 另外，由于水平有限，书中不妥之处也请专家、同行与读者不吝指正.

蔡小雄

2008 年 1 月 18 日

目 录

第1讲 活用常数

方法点津

常数是代数式中最活跃的一分子，善待常数，活用常数，充分发挥好常数的“过渡”功能，将使许多复杂的代数问题的解决“如虎添翼”.

在初等数学中，最常见与常用的常数为“0”与“1”. 在解决有些代数问题时，运用“0”这一重要常数可起到“无中生有”“天堑变通途”的作用. 另外，巧妙地发挥常数“1”的替换功能也将使许多原本难以入手的问题豁然开朗.

如常数“1”可用以下重要恒等式替换：

$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$1=\tan\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos 2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$

$1=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{a}\,(a\neq 0,\ b\neq 0)$

$1=\log_a b\cdot\log_b a=\log_a a\,(a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1)$

$1=a^0\,(a\neq 0)$

$1=\mathrm{i}^{4k}$（$k\in\mathbf{Z}$，i 为虚数单位）

$1=1^k\,(k\in\mathbf{R})$

当然，除了用以上恒等式替换常数外，活用常数还包括分拆常数、配凑常数、提取常数与添加常数等技巧. 下面通过一些具体例子加以简要说明，希望读者能触类旁通，举一反三.

典型例题

例 1 已知 $abc=1$，求 $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}$ 的值.

解 将题中的 1 用 abc 替换，得

原式 $=\dfrac{a}{ab+a+abc}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{bc}{bc+b+1}=\dfrac{bc+b+1}{bc+b+1}=1.$

评注 本题的解法很巧，若将所求式通分化简，再代入已知式或将已知式变形再代入所求都不易求出结果. 习惯上是将字母代换成数，而此题是将数代换成字母，反而收效明显. 因此，常值代换也是恒等变形的重要技巧.

例 2 已知 m，n 是正整数，且 $1<m<n$，求证：$(1+m)^n>(1+n)^m$.

证明 $(1+n)^m=\underbrace{(1+n)(1+n)\cdots(1+n)}_{m\text{个括号}}\cdot\underbrace{1\cdots\cdots1}_{n-m\text{个}1}<\left[\dfrac{m(1+n)+n-m}{n}\right]^n$

$=(1+m)^n$.

评注 本题可通过构造函数，借助导数来证明，也可先证明 $n^iA_m^i<m^iA_n^i$，再利用二项式定理证明. 但都不如将 1 分拆成 $n-m$ 个 1 相乘，再利用平均不等式证明来得简捷.

例 3 （第 36 届美国普特南试题）设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$，求证：

$$n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n<S_n<n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}\ (n>2).$$

证明 由均值不等式得，当 $n>2$ 时，有

$$\frac{1}{n}(S_n+n)=\frac{1}{n}\left[(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\geqslant\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=(n+1)^{\frac{1}{n}},$$

即 $n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n<S_n$，

另一方面，$\dfrac{1}{n-1}(n-S_n)=\dfrac{1}{n-1}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$

$>\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\cdots\dfrac{n-2}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}=n^{-\frac{1}{n-1}}$.

因此，$n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n<S_n<n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}\ (n>2)$.

评注 以上解法的巧妙之处在于将 n 分拆成 n 个 1 相加，从而为均值不等式的顺

利运用创造了条件.

例 4 (2007年中国东南地区奥林匹克试题)设正实数 a, b, c 满足 $abc=1$，求证：对于整数 $k\geqslant 2$，有 $\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}$.

证明 因为

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{1}{4}(a+b)+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k-2\text{个}\frac{1}{2}}\geqslant k\cdot\sqrt[k]{\frac{a^k}{2^k}}=\frac{k}{2}a;$$

$$\frac{a^k}{a+b}\geqslant\frac{k}{2}a-\frac{1}{4}(a+b)-\frac{k-2}{2}.$$

同理可得

$$\frac{b^k}{b+c}\geqslant\frac{k}{2}b-\frac{1}{4}(b+c)-\frac{k-2}{2},$$

$$\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{k}{2}c-\frac{1}{4}(c+a)-\frac{k-2}{2}.$$

三式相加可得

$$\begin{aligned}\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}&\geqslant\frac{k}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{2}(k-2)\\&=\frac{(k-1)}{2}(a+b+c)-\frac{3}{2}(k-2)\\&\geqslant\frac{3}{2}(k-1)-\frac{3}{2}(k-2)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

评注 以上解法妙在巧拆常数，合理并项，顺利运用均值不等式. 当然，本题也可利用 Cauchy 不等式或幂平均不等式及切比雪夫不等式证明. 用以上方法也可巧妙地解答以下第31届IMO预选题：设 $a、b、c、d$ 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的非负实数，求证：$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}$.

例 5 已知 $a_i>0(i=1, 2, 3, \cdots, n)$，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，求证：$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{(n^2+1)^2}{n}$.

证明 在不等式左边配凑 n 个常数1，运用 Cauchy 不等式证明.

$$(1^2+1^2+\cdots+1^2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\right]^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2,$$

又 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，$a_i>0$，$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n^2$，即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n^2$，

因此 $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{(1+n^2)^2}{n}$.

评注 上例通过配凑若干个常数 1 后再运用了 Cauchy 不等式证明，充分体现常数的魅力.

例 6 (2002 年湖南省数学竞赛试题)设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，其对角线长为 l，试证：$(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\geqslant 512a^4b^4c^4$.

证明 原不等式等价于 $\left(\dfrac{l^4}{a^4}-1\right)\left(\dfrac{l^4}{b^4}-1\right)\left(\dfrac{l^4}{c^4}-1\right)\geqslant 512$.

设 $x=\dfrac{a^2}{l^2}$，$y=\dfrac{b^2}{l^2}$，$z=\dfrac{c^2}{l^2}$，则 $x+y+z=1$，则原不等式可写成

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\geqslant 512.$$

由 $\dfrac{1}{x^2}-1=\dfrac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\dfrac{(y+z)(x+x+y+z)}{x^2}$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt[4]{x^2yz}}{x^2}=\frac{8\sqrt[4]{x^2y^3z^3}}{x^2},$$

其中等号当且仅当 $x=y=z$ 时取到.

同理，有 $\dfrac{1}{y^2}-1\geqslant\dfrac{8\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{y^2}$，$\dfrac{1}{z^2}-1\geqslant\dfrac{8\sqrt[4]{x^3y^3z^2}}{z^2}$.

以上三式相乘，即证得原不等式成立.

例 7 求证：$k^2C_n^k=2C_n^2C_{n-2}^{k-2}+C_n^1C_{n-1}^{k-1}$.

证明 在等式左边加进 $(-k+k)C_n^k$，得

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=(k^2-k+k)C_n^k=k(k-1)C_n^k+kC_n^k\\
&=k(k-1)\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}+k\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\\
&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[(n-2)-(k-2)+1]}{(k-2)!}+\\
&\quad n\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!}\\
&=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}=2C_n^2C_{n-2}^{k-2}+C_n^1C_{n-1}^{k-1}.
\end{aligned}$$

例 8 若 $a,\ b,\ c\in[0,\ 1]$，求证：

$$\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

证明 不失一般性，可设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$，在原不等式左边添加常数 0，并将 0 用 $\dfrac{1}{1+a+b}-\dfrac{1}{1+a+b}$ 替代，得

$$\text{左边}=\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b}+\frac{1}{1+a+b}-\frac{1}{1+a+b}$$

$$+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\leqslant \frac{1}{1+a+b}+\frac{a}{1+b+a}+\frac{b}{1+a+b}+\frac{c}{1+a+b}-\frac{1}{1+a+b}$$

$$+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$=\frac{1+a+b}{1+a+b}+\frac{c-1}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$=1+(1-c)\left[(1-a)(1-b)-\frac{1}{1+a+b}\right]$$

$$=1+\frac{1-c}{1+a+b}[a^2(b-1)+b^2(a-1)-ab]\leqslant 1.$$

例 9 设 a, b, c 为三角形三边的长，求证：$abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

证明 由三角形两边和大于第三边知 $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ 都大于 0.

$$a=a+0=a+\frac{b-c+c-b}{2}=\frac{(a+b-c)+(c+a-b)}{2}$$

$$\geqslant \sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}.$$

同理 $b\geqslant \sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}$, $c\geqslant \sqrt{(c+a-b)(b+c-a)}$.

三式相乘即得证.

评注 “0”是个特殊的常数，有时运用“无中生有”这一招，在原有的式子中添加常数 0，并将其巧妙转化，可使复杂的问题简单化.

例 10 $a_i, b_i, c_i > 0(i=1, 2, \cdots, n)$. 求证：

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}+\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}.$$

证明 此题直接证明不好入手. 若将不等式一边变成 1，再观察新的不等式结构的特点，易得证明思路.

原不等式等价于

$$\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$$

$$+\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$$

$$+\sqrt[n]{\frac{c_1c_2\cdots c_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}\leqslant 1. \quad ①$$

注意到

$$\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2+c_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n+c_n}\right),$$

$$\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2+c_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n+c_n}\right),$$

$$\sqrt[n]{\frac{c_1c_2\cdots c_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{c_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{c_2}{a_2+b_2+c_2}+\cdots+\frac{c_n}{a_n+b_n+c_n}\right).$$

将上面三个不等式相加即得式①.

因此,原不等式成立.

例 11 (第 46 届 IMO 试题)设正实数 x,y,z. 若 $xyz\geqslant 1$,证明:$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+x^2+z^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0$.

证明 因 $y^4+z^4-yz(y^2+z^2)=(y-z)^2(y^2+yz+z^2)\geqslant 0$,

则 $y^4+z^4\geqslant yz(y^2+z^2)$.

因 $y^2+z^2\leqslant xyz(y^2+z^2)\leqslant x(y^4+z^4)$,

则 $\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\frac{x^5}{x^5+x(y^4+z^4)}=\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$.

故 $\sum\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\sum\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}=1$. ①

因为 $xyz\geqslant 1$,于是,

$$[(x^{\frac{5}{2}})^2+y^2+z^2](yz+y^2+z^2)$$

$$\geqslant[(x^{\frac{5}{2}})^2+y^2+z^2]\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)$$

$$\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2.$$

从而 $\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

则 $\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{x^2(yz+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\leqslant\frac{\frac{3}{2}x^2(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

故 $\sum\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\sum\frac{3}{2}(x^2y^2+z^2x^2)$

$$=\frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\leqslant 1. \quad ②$$

①—② 即知所证不等式成立.

评注 有些不等式表面看似乎与1无关，但若抓住问题本质，以"1"为参照物，将不等式转化为与"1"相关的不等式来证明，再借助重要不等式往往能使原问题简捷获证. 当然，本题还有更简捷的两种解法. 以下解法为摩尔多瓦选手 Boreico Iurie 给出，他也因此解法获得46届IMO特别奖：

因为 $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqslant 0$,

所以 $\sum\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\sum\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$

$$\geqslant\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum(x^2-yz)\text{（因为 }xyz\geqslant 1\text{）}\geqslant 0.$$

例 12 （1992·C. M. O 试题）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为非负实数. 记 $x_{n+1}=x_1$, $a=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 试证：$\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$，等式成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证法一 所求不等式可改写为

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant\sum_{j=1}^{n}1+\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-x_{j+1}}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_{j+1}-a)^2,$$

所以，只要证明对 $j=1, 2, \cdots, n$，总有

$\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant 1+\frac{x_j-x_{j+1}}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}(x_{j+1}-a)^2$ 即可.

令 $a_j=\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}-1-\frac{x_j-x_{j+1}}{1+a}=\frac{(x_j-x_{j+1})(a-x_{j+1})}{(1+a)(1+x_{j+1})}$.

当 $x_j>x_{j+1}$ 时，有 $a_j\leqslant 0\leqslant\frac{(x_{j+1}-a)^2}{(1+a)^2}$；

当 $x_j\leqslant x_{j+1}$ 时，有 $a_j=\frac{(x_{j+1}-a)(x_{j+1}-x_j)}{(1+a)(1+x_{j+1})}\leqslant\frac{(x_{j+1}-a)^2}{(1+a)^2}$，

这就证明了不等式成立.

显然，等号成立当且仅当

$$a_j=\frac{(x_{j+1}-a)^2}{(1+a)^2},\ 1\leqslant j\leqslant n,$$

即 $(x_{j+1}-a)[(1+a)(x_{j+1}-x_j)-(x_{j+1}-a)(1+x_{j+1})]$

$$=(x_{j+1}-a)[-(1+a)(x_j-a)-(x_{j+1}-a)^2]\geqslant 0.$$

由于 $\quad -(1+a)(x_j-a)-(x_{j+1}-a)^2\leqslant 0$，

所以 $x_{j+1}=a$ 或 $x_{j-1}>a$，$(1+a)(x_j-a)+(x_{j+1}-a)^2\leqslant 0$，导出矛盾.

因此，$x_1=x_2=\cdots=x_n=a$.

证法二 设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个排列，且 $0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_n$. 于是，$1\leqslant 1+y_1\leqslant 1+y_2\leqslant\cdots\leqslant 1+y_n$. 由排序不等式，有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}.$$

只要能证得 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2$ 即可.

由于 $\quad \dfrac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}+\dfrac{1+y_{n-j+1}}{1+y_j}-2=\dfrac{(y_j-y_{n-j+1})^2}{(1+y_j)(1+y_{n-j+1})}\leqslant\dfrac{(y_j-y_{n-j+1})^2}{(1+a)^2}$，

所以 $\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}(y_j-a)^2.$

因此 $\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2.$

又等号成立当且仅当 $y_j=y_{n-j+1}$ 且 $(1+a)^2=(1+y_j)\cdot(1+y_{n-j+1})$.

由 $a\leqslant y_j,y_{n-j+1}$，有 $y_j=y_{n-j+1}=a$，$j=1,2,\cdots,n$.

这证明了 $y_1=y_2=\cdots=y_n=a$，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=a$.

习题精选 1

1. 求和：$\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\cdots+\dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}$.

2. 已知 $\sin 2(\alpha+\gamma)=n\sin 2\beta$，求证：$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{n+1}{n-1}\tan(\alpha-\beta+\gamma)$.

3. 求和：$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

4. 设 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\dfrac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$.

5. 证明：$5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$ 能被 19 整除，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

6. 已知 $\begin{cases}a\sin x+b\cos x=0\\ A\sin 2x+B\cos 2x=C\end{cases}$，其中 $a\neq 0$，求证：$2abA+(b^2-a^2)B+(a^2+b^2)C=0$.