高等学校教学用書

数学分析教程

第一卷 第一分册

M. K. 格列本卡
C. И. 諾渥舍諾夫 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

数学分析教程

第一卷 第一分册

M. K. 格列本卡, С. И. 諾渥舍諾夫著
楊 从 仁 譯

高等教育出版社

本書系根据苏俄教育部教育出版社(Учпедгиз)出版的格列本卡(М. К. Гребенча)、諾渥舍諾夫(С. И. Новоселов)合著"数学分析教程"卷一(Курс математического анализа, том 1)1951年第三版譯出。原書經苏联高等教育部审定为师范学院数理系教科書。本書專供师范学院数理系一年級及二年級兩年一貫制数学分析教材，或作高等数学課程的参考。

本書分二卷，中譯本各分二个分册出版。

数　学　分　析　教　程

第一卷　第一分册

М. К. 格列本卡，С. И. 諾渥舍諾夫著

楊从仁譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·255　開本850×1168 1/32　印張7 1/16　字數215,000　印數11001—13000

1953年9月商務初版(共印13,000)，

1957年1月新1版，1959年11月北京第8次印刷　定價(6)￥0.80

序　言

首先我們讓讀者注意，這本數學分析教程主要的是爲了將來作數學教師的數理系的學生用的。因爲這個目的所以確定了它的內容和它的寫作的特徵。對於數學分析的基本概念如像函數，極限，連續性等予以特別的重視，我們認爲是應該的。這些概念不僅對於了解整個分析的教程有着決定性的作用，即使就這些概念自身來講也有它獨立的意義，因爲正是這些問題直接的關聯着中學的數學和它的教學。根據這個理由，我們認爲在分析中很快的就進入介紹微分學和積分學是不合適的。正因爲同樣的理由，所以在寫述中我們致力於使學生對於數學分析的基本概念有一個很清楚的認識。

有鑑於掌握分析基礎的困難性是由於它的抽象性，我們根據了數年的教學經驗，所以在敍述中附加了大量的例題，而這些例題是應該引起讀者注意的。考慮到某些讀者個別的特殊情況，就是說他們爲了能更好地掌握本書內容的基本概念，於初讀時寧願限於不太多的基本材料，因此我們把相當部分的教材用了較小的文字排寫。如果以後讀者由於需要性的增加可以回過來再學習。自然，假若講授的人認爲在第一學期證明連續函數的基本定理對教學不合適，可以由自己的斟酌把這一部分移後而在第一學期內只列舉出這些定理就够了。

除了教學的目的，並爲了力求使學生能閱讀關於數學分析的現代的科學文獻，我們在教材編寫中儘可能的用了現代數學的概念（近傍，寫像，加法的集合函數的概念）。不用說，由於這些概念的影響使得古典分析的基礎更透徹。

在編寫本書過程中常常得到維·維·斯捷潘羅夫教授的幫助，我們致以真切的感謝。

莫斯科市立師範學院對於我們的工作給以很大的支持，在此特致深厚的謝意。

校訂人斯·維·菲力捷夫對於本書顯出了格外的關心，特此致衷心的感謝。

蒙·格列本卡

斯·諾渥舍諾夫

莫斯科，12 月 25 日 1940 年。

第三版序言

在準備1948年本教程的第二次出版時，我們使這本書在根本上得到改寫：定積分理論這一部份的敍述已完全變更使得更接近於一般的習慣。在使基本概念不受影響的條件下，極限理論的敍述有了相當的簡化。就一般數學分析教程課本而論顯得是過於瑣碎的東西我們已經把它去掉。重要的是敍述的性質的改變。我們已經充分認識到，不必要的篇頁浩繁是本書第一版的眞正缺點之一，所以在重版時決定把一些冗長的敍述刪去，因爲他對於教材的質量有不好的影響。如所周知，初學數學分析會給學生帶來困難。但是，如果認爲冗長的敍述能够幫助我們克服這個困難，這個想法是很錯誤的。精簡的，絕對系統的和重點的敍述是蘇聯教材特有的優點。企圖以反覆的講述，《不謹嚴》的推理，《預備知識》的準備來代替上述的質量是沒有根據的，因爲這樣的作法對蘇聯的科學和教學法是不會帶來好處的。

在現在本書的第三版中，我們僅僅根據教授本書的教師所提供的意見作了個別的變更與修正。

藉這個機會我們對以下諸先生致深厚的謝意：恩·亞·列得涅夫；亞·什·庫班科，蒲·什·莫傑羅夫，布·吾·庫吐諾夫，蒲·伊·諾曼羅夫斯基，因爲他們提供給本書很多有價的參考。我們感謝亞·恩·梅得那羅夫斯科對本書的製圖和克·什·舍末果夫對本書的校稿。我們也同樣的對亞·伊·馬爾庫舍維奇，因爲他在本書的第二版準備中提供很多寶貴的意見。

莫斯科，2月7號，1951年。

斯·諾涅舍諾夫

目　錄

序　言

第一編　函數概說

第一編　函數概説

第一章　函數的概念

§1　集合的概念

集合這一概念是原始概念之一，所以不需要由更簡單的概念去定義它。

爲了解釋這一概念，我們可以舉出集合的一些具體例子。例如我們可以說書本上某頁的字母所成的集合，太陽系的行星所成的集合，某一教室的學生所成的集合，構成某一物體的分子所成的集合，平面上所有的點所成的集合，空間中所有的球體所成的集合等等。事實上，在研究數學最早的時期就已經遇到集合這一概念。例如在記數的時候，就必然遇到自然數的集合 1, 2, 3,…… 這一概念，這就是所謂的自然數列。又如正負整數正負分數的全體和零則構成有理數的集合。在初等幾何裏，圓周可以看做平面上距一已知點都是等長的所有點的集合。

我們也可以用下面的同義字去代替《集合》這一術語：《全體》，《聚合》，《系》，《複元》，《類》等等，但是，必須注意，用這些同義字僅僅是把一個字換成另外一個和它同意義的字，而不是定義了集合這一概念。

假若對於每一個元素 x 都可以斷定它是否屬於集合 $\mathfrak{M}$ 我們就可以把集合 $\mathfrak{M}$ 看做已知。若元素 x 屬於集合 $\mathfrak{M}$，我們可用記號：$x \in \mathfrak{M}$ 代表它。

假若某一集合 $\mathfrak{N}$ 的所有元素都同含於集合 $\mathfrak{M}$，集合 $\mathfrak{N}$ 就叫做集合 $\mathfrak{M}$ 的部份集合。我們可用《包含符號》($\subset$)代表這一事實：$\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$。

例 1. 設 $\mathfrak{M}$ 是所有自然數的集合，則 $1\in\mathfrak{M}$，$2\in\mathfrak{M}$，$3\in\mathfrak{M}$，但 $\frac{1}{2}$，$\sqrt{2}$，半徑等於1的圓周，已知的三角形等，雖然是個別的元素，却不屬於集合 $\mathfrak{M}$。若 $\mathfrak{N}$ 代表所有正偶數 2,4,6,……的集合，則有 $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$。

若 R 代表所有有理數的集合，Z 代表所有實數的集合，則有：$\mathfrak{M}\subset R\subset Z$。

2. 設 $\mathfrak{M}$ 是平面上所有的三角形的集合，x 代表邊長依次爲 3,4,5 單位的《埃及》直角三角形，則有 $x\in\mathfrak{M}$。若 $\mathfrak{N}$ 代表所有等邊三角形的集合，則有 $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$。

每一集合 $\mathfrak{M}$ 都含有屬於它的所有元素，所以有 $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$。假若集合 $\mathfrak{M}$ 除含有集合 $\mathfrak{N}$ 所有的元素外至少含有一個元素不屬於 $\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}$ 就叫做 $\mathfrak{M}$ 的眞部份集合。例如平面上所有三角形的集合就是所有多邊形集合的眞部份集合。

§ 2 實數集合

實數的概念和它的基本性質假設讀者是已知的。以下我們只列舉實數的一些基本性質而作爲將來研究的根據。

I 所有的實數，即所有的正數負數(或爲有理數或爲無理數)和零，都是由《相等》,《大於》或《小於》的關係而相互的排列着。這個關係具有以下的性質：

1° 對於任意兩個實數 a 和 b，下面的三個關係有一個且僅有一個成立：

$$a=b,\ a>b,\ a<b。$$

2° 不等式的不可逆性：

若 $a<b$，則 $b>a$。若 $a>b$，則 $b<a$。

3° 不等式的可遷性：

若 $$a<b,\ b<c,\ 則\ a<c。$$

4° 等式的可遷性：

若 $$a=b,\ b=c,\ 則\ a=c。$$

5°　等式的回射性：常有 $a=a$。

II　在實數的集合內，可以施行加法和乘法的運算，這些運算具有以下諸性質：

1°　加法的交換律：　$a+b=b+a$。

2°　加法的結合律：　$(a+b)+c=a+(b+c)$。

3°　乘法的交換律：　$ab=ba$。

4°　乘法的結合律：　$(ab)c=a(bc)$。

5°　乘法關於加法的分配律：　$a(b+c)=ab+ac$。

在實數的集合內常可施行加法的逆運算——減法。

在實數的集合內可以施行乘法的逆運算——除法，但以零作除數則不許可。

以零作除數是一個不能施行的運算，所以形式如 $\frac{a}{0}$ 的算式是沒有意義的。

最後，還應當提到加法和乘法的單調性。

1° 加法的單調性：若 $a<b$，則 $a+c<b+c$。

2° 乘法的單調性：設 $a<b$。若 $c>0$，則有 $ac<bc$。若 $c<0$，則有 $ac>bc$。

由上面所列舉的基本性質可以導出任意多個因子數的運算規則和施行恆等變換的規則。

比較數的大小以及施於不同形式的各種數（正負有理數，正負無理數和零）的運算已在算術和代數中證明，這些我們都假設是已知的。

III　每一個有理數 r 都可以寫成分數 $\frac{m}{n}$ 的形式，式中的 m 和 n 都代表整數。若 $r\neq 0$，代表同一數的所有分數中，唯一的存在一個以正數為分母的既約分數。每一個實數都可以表示為一個十進位的小數。在这樣的表示法中，有理數或表為有限小數或表為循環無限小數；但無理數則只能表為不循環的無限小數。

每一有限小數都可用兩種不同方法表為循環無限小數：以 0 為週

期和以 9 爲週期。例如$\frac{1}{5}$就可以表爲兩種形式不同的無限小數如下:

$$\frac{1}{5}=0.200\cdots,\ \frac{1}{5}=0.199.$$

每一負實數都可以表爲一個小數而以負整數爲整數部份並以正數爲尾數(小數部份)。例如:

$$-2.79183\cdots=-3+(1-0.79183\cdots)=\bar{3}.20816\cdots.$$

比較實數的大小,可以利用它的小數表示法。在這樣的比較中,爲了避免小數表示法的二重性,以 9 爲週期的小數通常不用。

IV 下述的定理是表示有理數和無理數在所有實數的集中的稠密性。

定理 任意給定兩個不同的實數 α 和 β, 常有無限多的實數(有理數和無理數)含於 α 和 β 之間。

證明 設 $\alpha=p_0.\,p_1\,p_2\cdots p_n\cdots,\quad \beta=q_0.\,q_1\,q_2\cdots q_n\cdots$
是這兩個已知數的小數表示(在我們的證明中,以 9 爲週期的小數是避而不用的)。我們試比較這兩個已知數的近似值:

$$p_0,\quad p_0.\,p_1,\quad p_0.\,p_1\,p_2,\cdots$$
$$q_0,\quad q_0.\,q_1,\quad q_0.\,q_1\,q_2,\cdots$$

若 $\alpha<\beta$, 在上表的第一列中可以按照次序求出第一個數 $p_0.\,p_1\,p_2\cdots p_k$ 而小於第二列的對應數,也就是說: $p_0.\,p_1\,p_2\cdots p_{k-1}=q_0.\,q_1\,q_2\cdots q_{k-1}$, 但 $p_k<q_k$ ($p_0<q_0$ 的可能性也包括在內)。現在我們構造一個無限小數

$$\xi=p_0.\,p_1\,p_2\cdots p_k\,l_{k+1}\,l_{k+2}\cdots$$

而使它的前 k 位數字和代表 α 的前 k 位數字相同。無論以後的數字 $l_{k+1}, l_{k+2}\cdots$ 如何選擇,常有 $\xi<\beta$。若 $p_{k+1}\neq 9$, 我們可以選取任意一個大於 p_{k+1} 的數當做 l_{k+1} (自然,這個數也不能大於 9)。由此,無論以後的數字 $l_{k+2}, l_{k+3},$ 是什麼,常有 $\alpha<\xi$。若 $p_{k+1}=9$, 但 $p_{k+2}<9$, 則可令 $l_{k+1}=9$, l_{k+2} 等於任一個大於 p_{k+2} 的數,而其餘的數字則隨便選擇。因爲不是所有的數字 $p_{k+1}, p_{k+2},\cdots$ 都等於九,所以按照上述方法

類推下去一定可以選取一個數 $\xi>\alpha$。

根據上述可得 $\alpha<\xi<\beta$。

因爲在數字 $l_{k+1}, l_{k+2}\cdots$ 中，由某一個開始可以任意選擇，所以有無限多的數 ξ 存在而含於 α 和 β 之間。假若選擇這些數字而使它對應的數是循環小數（特別是有限小數）則 ξ 是一個有理數，否則 ξ 就是一個無理數。證畢。

例 1. $\alpha=2.735\cdots, \beta=4.01$。後面任一数 2.8, 2.81, 3.80, 3.9, …都大於 α 而小於 β。

2. $\alpha=0.713994\cdots$, $\beta=0.714005\cdots$。實數 $\xi=0.713995\cdots$ 滿足條件 $\alpha<\xi<\beta$。

3. $\alpha=2.7301$, $\beta=2.7415\cdots$。非循環小數 $\xi=2.73101001000100001\cdots$ 代表一個無理數含於 α 和 β 之間。

V 實數可用一個直綫(數軸)上的點表示，即在直綫上選定計量綫段的單位和原點並規定正方向。在這樣的表示法中，每一個實數可使對應直綫上唯一的一點，反之，直綫上的每一點可使對應唯一的一個數。這樣我們就可以在數學分析中利用幾何的術語，換句話說，對於數和代表它的點一般就可以用«點»這一名詞。實數和直綫上的點的對應具有«保持順序»的性質：對於兩個不同的數，較大的數對應數軸上排列在«右»的點 *)。

下述的幾何公理(直綫的連續性)是用直綫上的點代表實數的可能性的根據。

公理（綫段套縮原理）

設想給定了一個敍列的綫段 $A_1B_1,\ A_2B_2,\cdots,\ A_nB_n,\cdots$ 具備以下的性質：

1° 在後的每一個綫段含於在前的綫段。

2° 任意給定綫段 P，常有整數 n 存在而使綫段 $A_n B_n$（同時也表示這個綫段以後的任一個）含於 P。

由此，直綫上有唯一的一點存在而含於已知敍列的所有綫段內。

---

*) 照一般的習慣，數軸上向右的方向取爲正。

有理數$\frac{m}{n}(n>0)$可由綫段的端點表示，卽由原點0起($m>0$，由原點向右，$m<0$，由原點相左)取單位綫段E的$\frac{1}{n}$長度的$|m|$倍。設α爲無理數

$$\alpha=p_0.p_1p_2\cdots p_n\cdots,$$

若直綫上的諸點$A_0, A_1, A_2, \cdots$依次代表α的不足近似值：

$$p_0,\ p_0+\frac{p_1}{10},\ p_0+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{100},\cdots,$$

$B_0, B_1, B_2\cdots$諸點依次代表α的過剩近似值：

$$p_0+1,\ p_0+\frac{p_1+1}{10},\ p_0+\frac{p_1}{10}+\frac{p_2+1}{100},\cdots,$$

則套縮綫段的敍列　$A_0B_0,\ A_1B_1,\ A_2B_2,\cdots$

(長度爲$1, 0.1, 0.01$等等)唯一的決定直綫上一點P。我們可以把這一點看做代表無理數α。

反之，直綫上的每一點P可使對應一個實數α。由綫段OP的十等分法就會達到這個目的。若OP等於單位綫段E的p倍，則OP的長度等於p。否則OP就可以表示爲兩個綫段的和$OA_1=p$和A_1P，式中$A_1P<E$ ($OP<E$的可能性也包括在內，在此有$p=0$)。把E分爲10等分，A_1P或等於E的$\frac{1}{10}$的整數倍或含一綫段A_2P小於$\frac{1}{10}E$。繼此以推，我們可以用$\frac{1}{100}E$計量綫段A_2P等等。根據上述方法，可定義一個實數α而表爲十進位小數(位數有限或無限)如下：

$$\alpha=p.p_1p_2\cdots p_n\cdots.$$

依綫段OP所指的方向可令P點對應實數α或$-\alpha$。

§3　數的間隔

定義　設a和b代表任意兩個實數，並設$a<b$。

1° 滿足不等式　$a<x<b$

的所有實數x的集合叫做開間隔(a, b)。

2° 滿足不等式　$a\leqslant x\leqslant b$

的所有實數 x 的集合叫做閉間隔 $[a, b]$。

3° 滿足不等式　　$a<x\leqslant b$

的所有實數 x 的集合叫做左開間隔 $(a, b]$。

4° 滿足不等式　　$a\leqslant x<b$

的所有實數 x 的集合叫做右開間隔 $[a, b)$。

用幾何的解釋，開間隔可由數軸上兩已知點 a, b 之間的點集合來代表，換句話說，可用以 a, b 爲端點的綫段來代表，但端點的自身則除外（圖 1）。

圖 1

圖 2

閉間隔同樣可由以 a, b 爲端點的綫段來代表，但端點的自身則包括於綫段內（圖 2）。

左開間隔的幾何表示是一個綫段含有右端點而不含左端點（圖3）。

右開間隔的幾何表示是一個綫段含有左端點而不含右端點（圖4）。

圖 3

圖 4

除此以外，我們並規定下面記號的使用。

1° 所有實數的集合用記號 $(-\infty, \infty)$ 代表，並叫它做由 $-\infty$（負無限大）到 ∞（正無限大）的開間隔。

2° 所有大於 a 的實數 x 的集合：　$a<x$

用記號 (a, ∞) 代表，並叫它做由 a 至 ∞ 的開間隔。

3° 開間隔 $(-\infty, a)$ 代表所有小於 a 的實數 x 的集合：　$x<a$。

4° 右開間隔 $[a, \infty)$ 代表所有不小於 a 的實數 x 的集合：$a\leqslant x$。

5° 左開間隔 $(-\infty, a]$ 代表所有不大於 a 的實數 x 的集合：$x\leqslant a$。

用幾何的解釋，開間隔 $(-\infty, \infty)$ 可由數軸上所有的點所成的集合來代表，開間隔 (a, ∞) 可由數軸上位置在 a 點右端的一切點所成的

集合來代表，右開間隔 $[a, \infty)$ 同樣可由位置在 a 點右端的一切點來代表，但 a 點自身則包括在內。其餘的可照此類推。

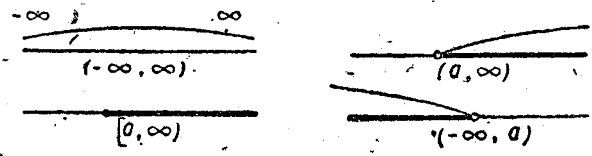

圖 5

上面討論到的各種形式的開間隔，閉間隔，左開間隔或右開間隔都通稱爲間隔。爲了敍述統一起見，記號 ∞ 和 $-\infty$ 有時依次叫做«∞點»和«$-\infty$點»。

在某些情形下，當我們對於間隔的«端點»無需加以考慮的時候，我們常用記號 $\langle a, b\rangle$ 代表一個間隔。因之，關於«間隔»這一術語的某一命題，就是說這個命題對於開間隔，閉間隔，左開間隔或右開間隔都成立。

假若間隔 $\langle a, b\rangle$ 的端點至少有一個是 ∞ 或 $-\infty$，我們就叫這樣的間隔做無限間隔。假若某一已知間隔的兩個端點都是實數，我們就叫它做有限間隔。例如 $(-\infty, \infty)$, $(2, \infty)$, $(-3, \infty)$, $(-\infty, 0)$, 等等都是無限間隔，$[-1, 1]$, $(0, 2)$, $(-5, 5]$, $[-4, 1)$ 都是有限間隔。

記號 ∞ 和 $-\infty$ 不能當做數看待，同時關於這兩個記號的算術運算也是不允許的。

我們規定記號 ∞ 和 $-\infty$ 的自身與乎這兩個符號和實數之間有不等式的關係，換句話說，我們規定每一個實數 c 都小於 ∞ 而大於 $-\infty$，同時也規定 $-\infty$ 小於 ∞： $-\infty<c<\infty$。

在特別情形下有 $-\infty<0$, 和 $0<\infty$。

不等式 $-\infty<x<\infty$ 是表示 x 可以代表任意一個實數，同理，不等式 $a<x<\infty$ 是表示 x 可以代表任意一個大於 a 的實數。其餘照此類推。