数学本科生及理工硕士生

21世纪高等学校数学系列教材

微分几何

■ 周振荣 杨文茂 郑高峰 赵玮 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学本科生及理工硕士生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

微分几何

■ 周振荣 杨文茂 郑高峰 赵玮 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/周振荣,杨文茂,郑高峰,赵玮编著.—武汉:武汉大学出版社,2008.9

21世纪高等学校数学系列教材

数学本科生及理工硕士生

ISBN 978-7-307-06527-7

Ⅰ.微… Ⅱ.①周… ②杨… ③郑… ④赵… Ⅲ.微分几何—高等学校—教材 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第143845号

责任编辑:李汉保　　责任校对:王　建　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉中远印务有限公司

开本:787×1092　1/16　印张:13　字数:312千字　插页:1

版次:2008年9月第1版　2008年9月第1次印刷

ISBN 978-7-307-06527-7/O·392　定价:21.00元

21世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

内容介绍

本书系统地介绍了曲线、曲面的局部微分几何和整体微分几何。局部微分几何部分，系统地介绍了曲线和曲面的概念及其性质，内容包括曲线的曲率、挠率、伏雷内公式、曲线基本定理、曲面的两个基本形式和两类基本量、曲率张量、测地线、曲面基本定理、等距变换、协变导数、平行移动、测地坐标系等。整体微分几何部分，系统地介绍了等周不等式、旋转指标定理、四顶点定理、高斯—波涅公式、卵形面等内容。在附录中，给出了一些 Matlab 和 Maple 程序，用来计算曲线与曲面的几何量、演示曲线与曲面的形状和运动。各章配有适量的例题与习题，便于读者研习。本书可以作为数学专业本科生以及理工类硕士生、博士生的教材，也可以供相关数学教师及数学爱好者参阅。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州）、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出

版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力。武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21世纪高等学校数学系列教材编委会

2007年7月

前 言

曲线与曲面的微分几何是运用微积分理论来讨论曲线与曲面的几何性质的数学分支,微分几何是一门既古老、又现代的学科。说微分几何古老是指自从有了微积分就有了微分几何;说微分几何现代,是指微分几何在现代数学中仍然发挥着很重要的作用,而且在理论物理、计算机科学和工程技术方面也有重要的应用。

《微分几何》课程是大学数学专业本生的一门很重要的专业课程,主要给学生介绍曲线和曲面的微分几何知识,为学生今后学习现代数学奠定基础。

我们这本教材是武汉大学出版社组织出版的21世纪高等学校数学系列教材之一,其内容分两部分:第一部分是曲线与曲面的局部微分几何,第二部分是曲线与曲面的整体微分几何。前五章属于第一部分,后两章属于第二部分。

第1章介绍向量代数、向量微积分、曲线与曲面的解析几何、欧几里得(Euclid)空间的等距变换等内容,为后面的学习奠定基础。其中,向量代数在线性代数与解析几何等课程中学习过,这里的介绍只是起一个承前启后的作用;向量微积分,尤其是向量的微分学,是学习曲线与曲面理论的基础,但由于其理论与函数微积分理论类似,我们没有进行详细地讨论,只是罗列相关的定义和结论;曲线与曲面的解析几何与后面我们将要介绍的曲线与曲面的微分几何密切相关,因此,这部分的介绍较为详细;欧几里得空间的等距变换在讨论曲线与曲面基本定理时发挥很重要的作用。这一章的内容读者可以根据实际情况选读。

第2章介绍了平面曲线与空间曲线的曲率、挠率、伏雷内公式以及空间曲线的基本定理。

第3章介绍了曲面的两个基本形式和两类基本量以及由此而产生的一些基本概念和基本结论,如法曲率、平均曲率、高斯(Guass)曲率等。

第4章引进新的记号、采用爱因斯坦求和约定来讨论曲面的曲率张量、曲面上的测地线等内容。这一章是局部微分几何的核心。

第5章证明曲面论的基本定理、讨论曲面上的协变导数与平行移动、介绍测地极坐标与测地法坐标。

第6章介绍曲线的整体微分几何,包括等周不等式、旋转指标定理、四顶点定理等经典定理。

第7章介绍曲面的整体微分几何,主要介绍整体高斯—波涅公式和卵形面等经典内容。

附录中，我们给出了一些 Matlab 和 Maple 程序，用来计算曲线与曲面的几何量、演示曲线与曲面的形状和运动。

前四章内容大约需要 54 学时，可以作为每周 3 学时一学期的授课内容。前五章连同附录的部分内容大约需要 72 学时，可以作为每周 4 学时一学期的授课内容。整体微分几何部分可以作为课外阅读材料，也可以作为选修课的授课内容。读者也可以将第 2、3、4、6、7 章这五章的内容作为周 4 学时一学期的授课内容。

本书的第 1 章至第 5 章（局部微分几何部分）以及附录（演示实验部分）由华中师范大学周振荣教授和郑高峰博士编写，第 6 章和第 7 章（整体微分几何部分）由仰恩大学的杨文茂教授和赵玮副教授编写。

华中师范大学的邓引斌教授和彭双阶教授在试用本教材后提出了许多宝贵的意见，在此表示感谢！

周振荣　杨文茂

2008 年 7 月 10 日

目　录

第 1 章　预备知识 …… 1
§1.1　向量代数 …… 1
§1.2　向量分析 …… 4
§1.3　曲线与曲面的概念 …… 8
§1.4　等距变换 …… 15
第 1 章补充练习题 …… 21

第 2 章　曲线论 …… 23
§2.1　平面曲线 …… 23
§2.2　空间曲线 …… 27
第 2 章补充练习题 …… 36

第 3 章　曲面的基本理论 …… 39
§3.1　曲面的第一基本形式 …… 39
§3.2　曲面的第二基本形式 …… 45
§3.3　曲面的主方向与主曲率 …… 49
§3.4　高斯曲率与平均曲率 …… 56
§3.5　直纹面 …… 63
第 3 章补充练习题 …… 67

第 4 章　曲面的曲率张量与测地线 …… 70
§4.1　曲面的曲率张量 …… 70
§4.2　测地曲率、测地挠率和测地线 …… 76
§4.3　曲面上的半测地坐标网　高斯-波涅公式 …… 81
第 4 章补充练习题 …… 85

第 5 章　曲面的进一步讨论 …… 87
§5.1　曲面的基本定理 …… 87
§5.2　等距变换与共形变换 …… 89

§5.3 协变导数与平行移动 …… 95
§5.4 测地坐标系 …… 100
第5章补充练习题 …… 103

第6章 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R}^3$ 中曲线的整体性质 …… 104
§6.1 平面曲线的整体性质 …… 104
§6.2 平面上直线集与球面上有向大圆集的测度 …… 116
§6.3 空间曲线的整体性质 …… 121
第6章综合习题 …… 127

第7章 曲面的整体性质 …… 130
§7.1 曲面的整体定义与性质 …… 130
§7.2 整体 Gauss-Bonnet 公式 …… 134
§7.3 卵形面 …… 137
第7章综合习题 …… 140

附录 演示实验 …… 142
附录Ⅰ Matlab 演示实验 …… 142
附录Ⅱ Maple 演示实验 …… 162

部分习题答案与提示 …… 181

索引 …… 193

参考文献 …… 196

第1章　预备知识

本章讨论三维欧氏空间的向量代数、向量微积分、曲线与曲面的解析几何、等距变换等内容,这些内容是后面讨论曲线、曲面的微分几何时所需要的. 我们假设读者掌握了高等代数、空间解析几何和数学分析的基础知识. 向量代数内容只是罗列相关概念与结论,省略其推导过程. 由于向量微积分的理论与函数的微积分的理论基本相同,因此,这方面的内容我们也只给出一个梗概,而省略其详情. 关于等距变换这一节,我们介绍了等距变换的定义、基本性质和特征,同时我们还介绍了有关标架的概念.

本章的内容请读者根据自己的实际情况选读. 建议重点阅读 §1.3、§1.4 两节的内容.

§1.1　向 量 代 数

1.1.1　向量空间

设 $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbf{R}\}$ 是三维实向量空间, 如图 1.1 所示, $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$, 是 $\mathbf{R}^3$ 的标准基. 任意向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 用标准基可以表示为 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

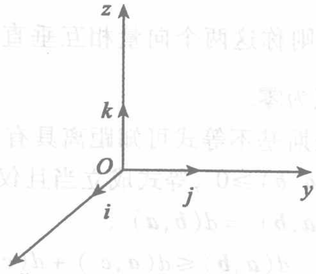

图 1.1

设

$$a_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k, \quad a_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k \tag{1-1}$$

则它们的和 $a_1 + a_2$ 为

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \end{aligned} \tag{1-2}$$

再设 $a = (x,y,z)$,$\lambda \in \mathbf{R}$,则 λ 与 a 的数乘为

$$\lambda a = \lambda x i + \lambda y j + \lambda z k = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \tag{1-3}$$

1.1.2 欧几里得空间

设 $a_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i=1,2)$,是 $\mathbf{R}^3$ 中的两个向量,它们的内积定义为

$$a_1 \cdot a_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

$\mathbf{R}^3$ 装备了这样的内积之后就称为欧几里得(Euclid)空间,仍然记为 $\mathbf{R}^3$.

显然,内积具有如下性质:

性质 1.1 正定性 $a \cdot a \geqslant 0$,等式成立当且仅当 $a = \mathbf{0}$;

性质 1.2 对称性 $a \cdot b = b \cdot a$;

性质 1.3 线性性 $a \cdot (kb + lc) = ka \cdot b + la \cdot c$.

向量 a 的长度为 $|a| = \sqrt{a \cdot a}$;两个向量 a,b 作为欧几里得空间的点,它们之间的距离为 $\mathrm{d}(a,b) = |a - b|$. 长度为 1 的向量称为单位向量.

定理 1.1 对任意的两个向量 $a,b \in \mathbf{R}^3$ 有下面两个不等式成立:

(1)许瓦滋(Schwarz)不等式 $a \cdot b \leqslant |a| \cdot |b|$.

(2)闵可夫斯基(Minkowski)不等式 $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

这两个不等式中的等式成立的充分必要条件是存在 $\lambda \in \mathbf{R}$,使 $a = \lambda b$,即 $a // b$.

由许瓦滋不等式可知 $\dfrac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} \leqslant 1$. 向量 a 与 b 的夹角为

$$\theta = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right)$$

如果两个向量的夹角是 $\dfrac{\pi}{2}$,则称这两个向量相互垂直或正交. 因此两向量正交的充分必要条件是它们的内积为零.

由距离的定义与闵可夫斯基不等式可知距离具有如下性质:

性质 1.4 正定性 $d(a,b) \geqslant 0$,等式成立当且仅当 $a = b$;

性质 1.5 对称性 $d(a,b) = d(b,a)$;

性质 1.6 三角不等式 $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$.

其中,正定性和对称性是显然的. 三角不等式不难由闵可夫斯基不等式得到. 事实上,

$$d(a,b) = |a - b| = |(a - c) + (c - b)| \leqslant |a - c| + |c - b| = d(a,c) + d(c,b).$$

设向量 a,b 的夹角为 θ ,则它们的向量积(也叫叉积)$a \times b$ 是这样一个向量,

其长度为 $|a\times b| = |a|\,|b|\sin\theta$，方向满足右手法则：

伸出右手，让大拇指和四指垂直，让四指从向量 a 朝向量 b 旋转一个较小的角度（小于 180°）到达 b，则大拇指所指的方向就是 $a\times b$ 的方向. 如图 1.2 所示.

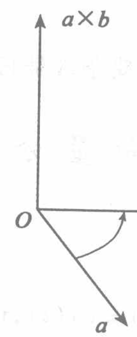

图 1.2

根据向量积的定义，我们有

$$i\times j = k, j\times k = i, k\times i = j,$$

并且对任意的向量 a,b，有反交换律：$a\times b = -b\times a$.

三个向量 a,b,c 的混合积定义为 $(a,b,c) = (a\times b)\cdot c$.

可以证明，向量的叉积对加法满足分配律（练习），即

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c, (b+c)\times a = b\times a + c\times a.$$

另外，设 $a_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i=1,2,3)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的三个向量，则有

$$a_1\times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

$$(a_1,a_2,a_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (a_2,a_3,a_1) = (a_3,a_1,a_2) = -(a_1,a_3,a_2). \tag{1-5}$$

由上述讨论可知：两个向量垂直的充分必要条件是它们的内积为零，两个向量平行的充分必要条件是它们的叉积为零，三个向量共面的充分必要条件是它们的混合积为零.

例 1　拉格朗日公式

$$(a\times b)\cdot(c\times d) = \begin{vmatrix} a\cdot c & a\cdot d \\ b\cdot c & b\cdot d \end{vmatrix}, \tag{1-6}$$

特别地

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 \tag{1-7}$$

◎练习 1.1

1. 证明叉积对加法的分配律(参考一般解析几何的书籍).

2. 证明$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ (提示:用分量做),并由此证明拉格朗日公式.

3. 证明两个向量线性无关的充分必要条件是它们的向量积不为零.

§1.2 向量分析

1.2.1 极限与连续性

开区间 I 上的向量函数是形如 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 的向量,其中 $t \in I$. I 称为向量函数的定义域.

定义 1.1 设 $\boldsymbol{r}(r)$ 是开区间 I 上的一个向量函数,$\boldsymbol{a}$ 是常向量,$t_0 \in I$. 如果 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时, $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$ 成立,则称 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 当 t 趋向于 t_0时的极限,记为 $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{a}(t \to t_0)$.

定理 1.2 设 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$,$\boldsymbol{a} = (x_0, y_0, z_0)$,则

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

定理 1.2 表明对向量函数求极限就是对该向量函数的每个分量求极限. 这样,向量函数的极限就转化成数量函数的极限. 根据数量函数的极限的性质就很容易推出向量函数的极限的性质 .

推论 1.1(极限的运算性质) 设当 $t \to t_0$ 时,有 $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{s}(t) \to \boldsymbol{b}$,$\lambda(t) \to c$,则:

(1)$\boldsymbol{r}(t) \pm \boldsymbol{s}(t) \to \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$,$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t) \to c\boldsymbol{a}$;

(2)$\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{s}(t) \to \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$;

(3) $\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{s}(t) \to \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

这些结论的证明留给读者.

定义 1.2 如果当 $t \to t_0$时有 $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}(t_0)$ 成立,则称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0处连续;如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在其定义域内的每一点都连续,则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 是连续函数.

由连续性的定义以及极限的运算性质可知:连续函数的和、差、积(数量积、向量积、混合积、数乘)是连续的.

由定理 1.2 知 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 在 t_0处连续的充分必要条件是每个分量函数 $x(t)$,$y(t)$,$z(t)$ 都在 t_0处连续.

◎练习

证明推论 1.1.

1.2.2 一元向量函数的微分学

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是一元向量函数，$t,t_0\in I$，其中 I 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的定义域.

定义 1.3 如果极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$ 存在，则称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处可导，而该极限就称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 处的导数，记为 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)$. 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在其定义域内处处可导，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 可导，此时 $\boldsymbol{r}'(t)$ 称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导函数（也简称导数）；如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 有连续的 $k(\geqslant 0)$ 阶导函数，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ 是 C^k 类向量函数. 特别地，C^0 类向量函数就是连续向量函数. C^∞ 类向量函数是指各阶导函数都存在的向量函数，也称为光滑向量函数.

显然，若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在一点 t_0 处可导，则 $\boldsymbol{r}(t)$ 在该点处必定连续.

定理 1.3 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 可导的充分必要条件是其三个分量函数皆可导，并且当 $\boldsymbol{r}(t)$ 可导时有 $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$.

证 运用导数的定义以及定理 1.2 即可. ▮

注意，$\boldsymbol{r}(t)$ 是 C^k 类向量函数的充分必要条件是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的每个分量函数都是 C^k 类的数量函数.

推论 1.2（导数的运算性质） 设 λ 是数量函数，则

(1) $(\lambda\boldsymbol{r})'=\lambda\boldsymbol{r}'+\lambda'\boldsymbol{r}$，$(\boldsymbol{r}\pm\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\pm\boldsymbol{s}'$；

(2) $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}'$；

(3) $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}'$；

(4) $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}')$.

证明 直接验证即可（作为练习）.

定理 1.4（一元泰勒（Taylor）公式） 设一元向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 是 C^{k+1} 类的，则

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+(\Delta t)\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+\frac{(\Delta t)^k}{k!}\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{k+1}}{(k+1)!}\left[\boldsymbol{r}^{(k+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\right] \tag{1-8}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\to\boldsymbol{0}$（当 $\Delta t\to 0$）.

命题 1.1 可微单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导数之模 $|\boldsymbol{r}'(t)|$ 等于 $\boldsymbol{r}(t)$ 的角速率，即 $\boldsymbol{r}(t)$ 的角度的改变量 $\Delta\varphi$ 相对于参数的改变量 Δt 的变化率的绝对值.

证 如图 1.3 所示，运用向量函数导数的定义有

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{NM}}{\Delta t}\right|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=|\varphi'(t)|. \tag{1-9}$$

证毕. ▮