FEIXIANXING BODONG FANGCHENG

非线性波动方程

方道元 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

非线性波动方程

方道元　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

非线性波动方程 / 方道元编著. —杭州：浙江大学出版社，2008.8
ISBN 978-7-308-06131-5

Ⅰ. 非… Ⅱ. 方… Ⅲ. 非线性方程:波动方程—研究生—教材 Ⅳ. O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 115633 号

非线性波动方程
方道元　编著

责任编辑　徐素君
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址:http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn）
电话:0571—88925591，88273066(传真)
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　浙江中恒世纪印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　17.25
字　　数　410 千
版 印 次　2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-308-06131-5
定　　价:35.00 元

前 言

本书是以作者多年来为浙江大学数学系偏微分方程方向研究生开设的《非线性波动方程》课程的讲稿为基础，参考国内外一些同类型的教材、专著，经过反复讨论、多次修改补充编写而成。可以作为综合性大学或师范院校数学系偏微分方程或其他专业的研究生和青年学者作研究入门参考书或教材。相信在阅读完本书的大部分内容之后即可进入现代偏微分方程分析的研究领域。

本书的主要内容是介绍非线性波动方程的局部或整体适定性理论、研究方法，以及解的破裂性质等。第一章，介绍了一些可用变分方法导出的方程与方法，讨论了方程中的一些重要的不变特征及其作用，以及定解问题的提法与研究解的存在性问题的常用方法等。第二章回顾和介绍了研究偏微分方程理论所需的现代分析或调和分析基础，其中包括可积空间、可微空间、Sobolev 空间以及它们之间的一些重要的定性性质和定量关系。最大函数及其应用，局部化方法与不确定性原理，稳定位相法，Gagliardo-Nirenberg 不等式，Moser 型估计等一些常用的非线性估计，Fourier 限制定理及其各种证明方法等。第三章主要介绍线性波动方程解的表示，解在 Sobolev 框架下的存在唯一性，能量不等式，衰减估计，Strichartz 估计，双线性估计以及波 -Sobolev 空间及其估计等。第四章主要介绍非线性波动方程的局部适定性理论，其中包括 Sobolev 框架、可微函数空间框架下的局部解以及满足零条件方程的局部解理论等。第五章介绍了一些典型波动方程经典解的破裂与奇性的形成以及生命区间的刻画等例子。第六章主要讨论了小振幅初值解的整体存在性问题。首先用连续性方法证明了高维拟线性波动方程的整体解的存在性，零条件以及低维情形的整体解。然后给出非线性 Klein-Gordon 方程的整体解常用研究方法。最后，讨论了半线性情形的波动方程，以及它们的低正则解等。第七章讨论一些大振幅初值的半线性波动方程的整体适定性问题以及研究方法，其中包括具有整体 Lipschitz 非线性项的波动方程的整体解；半线性波动方程的有限能量弱解、经典解以及三个空间变量情形的低正则解等。

本书的编著得到了许多教师及作者的一些研究生的大力支持，他（她）们对本书的原稿提过不少有价值的建议。内容的取材参考了目前国内外同类型的教材与著作。部分分析基础的内容来自于作者所记的 S. Klainerman 于 1998 年在法国巴黎高师开设的相应课程的笔记，也含有作者所带团队的部分研究成果。在此向这些作者、授课者以及未曾提及的作者深表感谢！本书的出版得到了数学系应用数学重点学科在经费上的支持，在此表示衷心的感谢。由于受时间和水平的限制，书中一定存在不少缺点和错误，恳切希望读者提出批评和指正。

作者

2008 年 5 月于求是园

目　录

第一章　概　论

§1.1　引　言

我们知道在几何、物理中都有大量的偏微分方程。如 Laplace 方程，Dirac 方程，Hodge 系统，调和映照方程，Yang-Mills 方程，Ginsburg-Landau 方程，极小曲面方程, Einstein 度量方程，热流，Ricci 流，波动方程，Klein-Gordon 方程，Maxwell 方程，波映照，Schrödinger 方程，KdV 方程，守恒律方程组，Navier-Stokes 方程组，Euler 方程组，Boltzman 方程等. 几何中研究方程的目的是通过对它们的研究来寻找具有最优几何性质的对象；物理中人们试图通过对它们的研究来解释和预测一些物理现象或认识物质运动的本质。这些模型方程的导出往往在适当的假设条件下，利用物质运动所服从的规律、对称、Lagrangian 变分原理等，或对一些几何或数学物理中的基本方程（组）通过取极限或作一些更进一步的假设、简化得到。

不同的方程之间可能存在着某种形式的或本质的内在联系，例如我们考虑 $n+1$ 维波动方程 $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u-\Delta u=0$, 其中 c 是光速，包含光速 c 的方程称为是相对论的。在一定的光滑性假设下，如果我们作变换

$$u(t,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})=\mathrm{e}^{imcx_{n+1}/\hbar}v(t,x_1,\cdots,x_n),$$

v 就成为 n 维 Klein-Gordon 方程 $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 v-\Delta v+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}v=0$ 的解，其中的质量 $m\geq 0$, $\hbar>0$ 是 Planck 常数。又如果作变换 $v=\mathrm{e}^{-itmc^2/\hbar}w$, 我们可以得

$$i\partial_t w+\frac{\hbar}{2m}\Delta w=\frac{\hbar}{2mc^2}\partial_t^2 w.$$

这样这个相对论 Klein-Gordon 方程的非相对论极限 $c\to\infty$ 收敛于 Schrödinger 方程。如果我们令波动方程中的常数 $c=1$, 就可以说明 $n+1$ 维波动方程的解 u 与 n 维 Schrödinger 方程 $i\partial_t w+\frac{1}{2}\Delta w=0$ 的解 w 之间存在着联系 $u(t,x_1,\cdots,x_{n+1})=\mathrm{e}^{-i(t+x_{n+1})}w(\frac{t-x_{n+1}}{2},x_1,\cdots,x_n)$。又如 2 维的 Zakharov 系统

$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=nu \\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2 n-\Delta n=\Delta|u|^2 \end{cases}$$

中令 $c\to\infty$ 就会导致非线性 Schrödinger 方程

$$i\partial_t u+\Delta u=-|u|^2u.$$

另外，Maxwell 方程

$$\partial_t E=c^2\nabla_x\times B;\quad \partial_t B=-\nabla_x\times E;\quad \mathrm{div}E=\mathrm{div}B=0;$$

和 Yang-Mills 方程

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=0;\quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma}+\partial_\beta F_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma F_{\alpha\beta}=0$$

之间，其中电场强度 E 和磁场强度 $B:\mathbb{R}^{1+3}\to\mathbb{R}^3$ 是实值向量场，$F:\mathbb{R}^{1+3}\to\bigwedge^2\mathbb{R}^{1+3}$ 是实值的反称 2 形式，这里的 $\mathbb{R}^{1+3}$ 是赋予度量 $\mathrm{d}g^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x_1^2-\mathrm{d}x_2^2-\mathrm{d}x_3^2$ 的 Minkovski 空间；Dirac 方程

$$i\gamma^\alpha\partial_\alpha u+\frac{mc}{\hbar}u=0$$

与 Klein-Gordon 方程之间均存在着联系，其中 $\gamma^0,\cdots,\gamma^3$ 是作用在 4 维复向量空间 V 上的矩阵，满足 $\gamma^\alpha\gamma^\beta+\gamma^\beta\gamma^\alpha=2g^{\alpha\beta}i\mathrm{d}_V$，这里的 $g^{\alpha\beta}$ 是上面给出的 Minkovski 度量。

我们将主要讨论非线性波动方程 (NLW) 如：

$$\partial_{tt}u-\Delta u+f(u)=0,$$

但在引入的过程中我们也关心另一些色散型方程的特征，如非线性 Schrödinger 方程 (NLS)

$$iu_t+\Delta u+f(u)=0$$

等。

方程中的非线性项的影响是复杂的。如 $f(u)=u^p$，当 u 大时，起到放大 u 的作用，当 u 小时，可以忽略。它能使一个解在有限时间破裂 (blow up)，也能产生孤波或激波 (如果包含 u 的导数)。这样，非线性项可以直接影响解的大小。有时非线性项的符号也可以造成解的存在性与破裂之间的差异。如我们考虑两个常微分方程

$$V_{tt}+V^3=0\quad \text{和}\quad W_{tt}-W^3=0.$$

第一个方程的解满足 $V_t^2+V^4/2=E=$ 常数，即所有解均在相空间中的一个闭曲线上，对所有时间都成立。对第二个方程，我们有 $W_t^2-W^4/2=E=$ 常数。因此对于给定 $E>0$ 和 $W(0)=W_0$ 的解满足

$$t=\int_{W_0}^{W}(E+\frac{1}{2}s^4)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.$$

如果 $W_t(0)>0$，设 T 是上式 $W_0>0\sim\infty$ 的积分，则当 $t\to T$ 时，$W(t)\to\infty$。前一个方程可以解释为是焦散型的，而第二个是焦聚型的，使得其解产生破裂。注意到这样的常微分方程可以看成是零维的波动方程，因此对于波动方程也必有类似的情形。事实上，如果我们考虑 $f(u)=\mu|u|^{p-1}u$ 时 $(\mu\in\{-1,0,1\})$，波动方程的分离变量形式解 $u=\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}v(t)$，其中 $v(t)$ 满足

$$\partial_t^2v=-(|\xi|^2+\mu|v|^{p-1})v.$$

我们知道对于线性情形 $\mu=0$，这个方程的解依照时间振荡因子 $\mathrm{e}^{\pm i|\xi|t}$ 演化；而对于相应于焦散的 $\mu=1$ 情形，非线性所起的是放大了线性方程的色散效果的作用；而在 $\mu=-1$ 的焦聚情形，非线性所起的是抵消色散效果。

对于以 $f(u)=u^2$ 或 $-u^2$ 为非线性的 3 个空间维数的 NLW，我们将看到所有 Cauchy 问题的解均会在有限时间破裂，即使是小初值也是如此。这里的符号并不起作用，因为这时如果我们做变换 $u\mapsto -u$ 就可将其中的一个变为另一个。但对于 $f(u)=u^3$ 或 $-u^3$ 就会更复杂一些。对于前者有整体解，并且如果初值是 C^∞ 函数，则其解也是。对于后者，一些初值可导致解的破裂，而另一些初值将又有整体解。对于 $f(u)=u^7$，我们将看到有整体存在的能量弱解，但即使是 C^∞ 初值，其解的光滑性及唯一性仍然是一个未解决的问题。

从数学上看，我们研究偏微分方程的主要兴趣在于试图理解数学物理中的基本方程（组）解的演化问题。虽然方程的个体特征是明显的，它来自于各自的实际问题，有各自的背景，但也有很多的共同特征，我们自然希望能给予分门别类的统一处理。具体地说，我们试图利用方程的某些特征给予分类，按类证实或否定所给问题解的局部或整体存在、唯一性等，确定解何时且如何从一个光滑解导致奇性的形成；寻找一个合适的概念使在适当的初始条件下所给问题的解是存在且唯一的；确定广义解的渐近特征等；以严格的数学方式去理解各种逼近成立的范围，如光速趋于无穷时的牛顿极限，音速趋于无穷时的不可压缩极限，粒子个数趋于无穷时的大范围极限以及雷诺数趋于无穷时的无粘性极限等。通过对一些基本模型方程的研究或分析，发现或建立一些研究几何或物理问题的新工具、方法和概念等。如要处理能越过奇性的解，得发现一个与之相适应的广义解的概念。

§1.2 几何与物理中的一些方程的导出

早在学习数学物理方程时我们就知道诸多运动方程可以通过物质运动所遵循的物理定律如质量守恒、动量守恒和能量守恒等导出。物理学中的一些偏微分方程的导得也可参考李大潜和秦铁虎的《物理学中的偏微分方程》。在此，我们考虑用变分原理来描述一些非线性方程，即用 Lagrangian 场论的 Euler-Lagrangian 方程来描述。Lagrangian 变分原理的基本对象是：时空，如 Minkowski 时空 $(\mathcal{M},g)=\mathbb{R}^{1+n}$，场 ϕ，以及 Lagrangian 密度 L。给定这些对象，我们能定义对应的作用 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\phi,g,K)=\int_K L[\phi]\mathrm{d}v_g$，其中 K 是时空 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中的紧集，$\mathrm{d}v_g$ 是时空的测度。场 ϕ 的一个**紧变分**是指定义在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的一个光滑的单参数场 $\phi(s)$ 满足 $\phi(0)=\phi$，且对所有 $\mathbb{R}^{1+n}\setminus K$ 中的点都有 $\phi(s)=\phi$ 的变分。我们将用 $\dot\phi\equiv\frac{\partial\phi}{\partial s}\mid_{s=0}$ 来记这样的变分。如果对任何 ϕ 的紧变分都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(s)\mid_{s=0}=0,$$

我们称场 ϕ 关于作用 $\mathcal{L}$ 是驻定的，其中 $\mathcal{L}(s)=\mathcal{L}[\phi(s)]$。**作用原理**是说物理上可接受的解必须为关于 Lagrangian 密度是驻定的。由作用原理所得到的关于 ϕ 的偏微分方程称为 Euler-Lagrangian 方程。例如设 $x\in\mathbb{R}^n$，$\gamma=\{(t,x);x=x(t),x_0=x(t_0),t_0\le t\le t_1\}$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中的一条曲线段，或看成是某函数空间中的一个点。我们知道曲线 γ 是泛函 $\mathcal{L}(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}L(x,\dot x,t)\mathrm{d}t$ 在过 $x(t_0)=x_0$ 与 $x(t_1)=x_1$ 两点的

曲线之空间的驻定曲线（即变分为零的曲线）或驻点当且仅当沿曲线 $x(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0. \tag{1.2.1}$$

这样的方程就是 $\mathcal{L}$ 的 Euler-Lagrangian 方程。在力学系统中，L 可表示为动能减势能。在不同坐标下，驻定曲线可有不同的表达形式，但均满足 Euler-Lagrangian 方程。在物理中通常将 x 记成 q，并记 $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$。称 $H(q,\dot{q},t)=p\dot{q}-L(q,\dot{q},t)$ 为 Hamiltonian，它表示的是总能量，即动能加势能。

例 1.2.1 考虑 Lagrangian $L(u)=\frac{1}{2}(|u_t|^2-|\nabla u|^2)$，则可得 u 满足 $\Box u=0$ 当且仅当 u 是 $L(u)$ 的紧支集变分的驻点，其中 $\Box=\partial_t^2-\Delta$。

半线性波动方程 $\Box u=F'(u)$ 的 Lagrangian 可以取为 $L(u)=\frac{1}{2}(|u_t|^2-|\nabla u|^2)+F(u)$。

例 1.2.2 在非线性 Schrödinger 方程 *(NLS)* 中取 $f(u)=\lambda|u|^{p-1}u$，我们可取 Lagrangian 为

$$L(u)=\frac{i}{2}(\bar{u}u_t-u\bar{u}_t)-\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\frac{2\lambda}{p+1}|u|^{p+1}$$

例 1.2.3 波映照方程 波映照方程来自于数学物理的 Higgs 场模型，相对论模型等。为写出方程，我们设 (N,g) 是一个赋予 Riemannian 度量结构的 n 维流形，g 是 N 上的正定的双线性形式，称 N 为目标流形。由 Nash 定理，如果 d 足够大，N 嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中。设 $\mathbb{R}^{1+n}$ 是赋予平坦度量 $h=\{-1,1,\cdots,1\}$ 的 Minkovski 时空。这样，n 维波映照方程可以写成如下的形式：

$$u_{tt}-\Delta u-B(u)(\partial_\alpha u,\partial^\alpha u)=0,$$

其中 $B(u):T_uN\times T_uN\longrightarrow T_uN^\perp$ 是 $N\subset\mathbb{R}^d$ 的第二基本形式。特别地，目标流形是 $\mathbb{R}^3$ 中的球面的 *2* 维波映照可以写成

$$u_{tt}-\Delta u+u(|u_t|^2-|\nabla_x u|^2)=0.$$

考虑 Lagrangian

$$L(u)=\int_{\mathbb{R}^{1+n}}g_{ab}(u)\partial^\alpha u^a\partial_\alpha u^b,$$

其中的希腊字母 α,β 表示 $0\sim n$，拉丁字母 a, b, c, d 表示 $1\sim n$，重复指标表示求和。对应的 Euler-Lagrangian 方程就成为

$$-2\partial_\alpha(g_{ab}\partial^\alpha u^b)+\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b\partial_a g_{bc}=0,$$

或等价地

$$-g_{ab}\partial_\alpha\partial^\alpha u^b-\partial_c g_{ab}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b+\frac{1}{2}(\partial_a g_{bc}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b)=0.$$

写成达朗贝尔的形式

$$g_{ab}\Box u^b+\partial_c g_{ab}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b-\frac{1}{2}(\partial_a g_{bc}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b)=0.$$

由 Christoffel 记号 $\Gamma_{cab}=\frac{1}{2}(\partial_a g_{bc}+\partial_b g_{ac}-\partial_c g_{ab})$，以及

$$\partial_a g_{bc}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b=\frac{1}{2}(\partial_c g_{ab}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b+\partial_b g_{ac}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b),$$

我们可以将方程重写成上面的标准形式

$$\Box u^a+\Gamma^a_{bc}\partial_\alpha u^b\partial^\alpha u^c=0.$$

如果将 N 看成是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的 d 维超曲面，在 N 上引进局部坐标 $(y^1,\cdots,y^d,y^{d+1})$，则 $g_{ab}=\langle\partial_{y^a},\partial_{y^b}\rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$。在局部坐标下的波映照方程可以写为

$$\Box y^a+\Gamma^a_{bc}\partial_\alpha y^b\partial^\alpha y^c=0.$$

我们也容易验证波映照 $v(x)=u(y(x))$ 满足外蕴形式方程

$$\Box v+\sum_{\alpha,\beta=0}^{n}h^{\alpha\beta}B(v)(\partial_\alpha v,\partial_\beta v)=0,$$

其中 $B(p):T_pN\times T_pN\to T_pN^\perp$ 是 $N\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 的第二基本形式。

§1.3 方程中的一些不变特征

在偏微分方程的分析理论中，人们发现方程的两个基本特征是重要的。其一是守恒量，甚至也可以是近似的守恒量。这样的量提供了解的大小的一个界的估计，可以让我们通过定量的控制来研究解的长时间性态。它往往可以利用方程的对称性得到。其二是标尺度平衡 (scaling) 或变换的不变性或近不变性，如对于非线性项是 $\mu|u|^{p-1}u$ 的 Schrödinger 方程在标尺度变换

$$u(t,x)\longmapsto\lambda^{\frac{-2}{p-1}}u\left(\frac{t}{\lambda^2},\frac{x}{\lambda}\right),\lambda>0,$$

下不变。而对于相同非线性的波动方程在标尺度变换

$$u(t,x)\longmapsto\lambda^{\frac{-2}{p-1}}u\left(\frac{t}{\lambda},\frac{x}{\lambda}\right)$$

下不变。

一般来说常系数的色散型偏微分方程通常享有一些不变性或对称。如关于时间变量平移不变，关于空间变量平移不变等。有的还具有关于时间的反向对称等，但不变形式不尽相同，如 Schrödinger 方程 $u(t,x)\longmapsto\overline{u(-t,x)}$，波动方程 $u(t,x)\longmapsto u(-t,x)$ 等。也有的享有正交变换不变，Lorentz 变换不变，共形或拟共形变换不变等。一般来说，对应于时间平移不变的守恒量是能量或 Hamilton 量，空向平移不变对应的是动量或质量的守恒，Galilean 变换不变对应于质心的守恒等。

前面说过，了解方程对称或不变性是重要的，其中的一个基本原因是因为它可以提供可能的守恒律。而导出守恒律的基本依据是

Noether 原理：如果一个变分能保持一单参数变换簇不变，则其 Euler-Lagrangian 方程满足一个守恒律。

设 $\mathcal{L}=\mathcal{L}[\phi,g]$ 是场 ϕ 的一个积分作用。设 T_s 是时空 $\mathcal{M}$ 上的一个等距的单参数群，即 $(T_s)_*g=g$，则 $\mathcal{L}[(T_s)_*\phi,g]=\mathcal{L}[(T_s)_*\phi,(T_s)_*g]=\mathcal{L}[\phi,g]$。这样作用在映射 $\phi\to(T_s)_*\phi$ 下是保持的。由 Noether 原理我们应该能找到对应于 Euler-Lagrangian 方程的一个守恒律，可用生成 T_s 的向量场 X 导得这样的守恒律。

利用对称或守恒律，我们可以得到解在相应范数空间的估计。利用标尺度变换的不变性，我们可以预测初值函数空间的正则性与解的存在时间之间的关系。它们可以为我们解决问题所采取的方法提供参考依据。例如，我们欲建立在某对称下不变的初值函数集合中建立适定性，这就建议我们用在对称下不变的技巧和估计；利用对称可将解在适当的空间中规范化，如可使解集中到物理空间、时间或频率空间的特定位置如原点等。对于使得方程的标尺度平衡的变换，如果还能保持某特定的 Sobolev 空间范数不变，我们就称这样的 Sobolev 空间的正则性为**临界**正则。对于上面的非线性 Schrödinger 方程、波动方程的临界正则指标是 $s_c=n/2-2/(p-1)$。事实上，对应于 Schrödinger 方程的临界正则 Sobolev 范数是齐次范数，即 $\|u(0,x)\|_{\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^n)}$；波动方程则是 $\|u(0,x)\|_{\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^n)}+\|\partial_t u(0,x)\|_{\dot{H}^{s_c-1}(\mathbb{R}^n)}$。对于高于临界正则性的指标 $s>s_c$，我们称作是**次临界**的，而相反的 $s<s_c$ 称之为**超临界**的。对于次临界情形 $(s>s_c)$，人们希望 Cauchy 问题是适定的，至少局部是如此。这时解的存在时间和初值的大小之间往往存在一种某次幂的反比关系。这样，如果我们在某固定时间建立了小初值的局部适定性，我们就能得到大初值小时间的局部适定性的。对于超临界的 s，在 H^s 中方程一般是不适定的，即使是局部也是如此，对应于这种情形广义的弱解是无意义的。而对于临界情形 $s=s_c$，希望对于小初值问题有适定的整体弱解。这就是说次临界正则性的问题的解具有较好的性态。当然，不同的对称会有不同的临界正则性。

在研究中，我们对于临界正则空间与一些有特殊物理意义的守恒量所在空间相一致的情形更有兴趣。如能量空间 H^1，对于非线性波动方程保 Lorentz 不变、共形不变等的空间；对于 Schrödinger 方程保质量不变的 L^2 空间等。

注意到 Fourier 变换在物理空间与频率空间之间的伸缩变换建立了一个定量的联系，我们就可以利用标尺度平衡分析来了解解的初值之高频与低频在所考虑空间中随时间的演化关系，利用守恒律了解解在高频与低频处的大小控制关系。因此这意味着我们也可以利用这些不变性将方程依据守恒律（如能量）分为次临界（在细致标尺时强，在粗糙标尺时弱）、临界（标尺度变换不变）、超临界（在粗糙标尺时强，在细致标尺时弱）。可以说临界的守恒律提供了方程的线性部分与非线性部分在强度上大致是可以比较的关系，这两者之间的细致的关系可以反映出解的演化性态。通过标尺的改变来观察在这一过程中所导致的解关于某种量（如能量）的变化，从而预测解的奇性的发展。例如，我们考虑方程

$$\partial_t^2 u-\Delta u=\pm|u|^{p-1}u. \tag{1.3.1}$$

其能量可由

$$E(u)=\int\left\{\frac{1}{2}|\partial_t u(t,x)|^2+\frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2\mp\frac{1}{p+1}|u(t,x)|^{p+1}\right\}\mathrm{d}x$$

给出。当方程 (1.3.1) 的右端取负号时，方程即为焦散型的，这时能量 $E(u)$ 总是正的。我们可以期望非线性项起的作用是放大线性方程的色散效果；而在相反的正号情形，能量可能成为负值，非线性的作用也与色散相向，它可以削弱甚至阻止色散作用。因此这时的情况就会很复杂，甚至会丧失线性方程解关于时间的衰减性质，如出现孤立子波等。

当 $n\geq 3, p=1+\frac{4}{n-2}$ 时，能量，即解在 H^1 空间范数下，在上面的标尺度平衡变换下是不变的。对应于这时的能量表达式中的非线性指数是 $p+1=\frac{2n}{n-2}$，它正好是 Sobolev 不等式的端点情形。

我们可以用此来刻画方程的非线性程度，给方程作出适当的分类，对 $p=1+\frac{4}{n-2}$，能量是标尺度平衡不变的，或说成是无量纲的。$p>1+\frac{4}{n-2}$ 能量有正量纲 (说明非线性强度已超出能量可控范围)，$n\leq 2$，或 $n\geq 3$, $p<1+\frac{4}{n-2}$ 能量有负量纲 (非线性强度较弱)，对应的问题分别称为能量临界、能量超临界和能量次临界。

对于超临界情形，解在高频处的守恒律弱。这样能量的守恒并不排除集中，这时即使能量小，非线性程度还是可以很高。在这种情形解很可能出现非常不稳定的现象，或出现湍流。对于这种情形人们期望用比能量更强的范数来附加小性，对这样的“小初值”解具整体正则性，而大初值解破裂。对于次临界的情形，守恒律在高频处比低频强，由于低频演化缓慢，希望解在短时间内有线性性态，而在长时间有非线性性态。所以在这种情形，解的局部存在性在次临界正则情形是容易证明的。如果能量是有界的，集中能被排除，因为在集中的过程中需要很多的能量，因此，我们就可以基于能量估计去证明适定性或解的正则性，人们可以希望解具有整体的正则性。对于临界情形，守恒律是标尺度平衡变换不变的，对一个固定能量的能值，高低频有等量的非线性。这样希望当能量小时，对所有时间解都呈现线性性态。集中要求一定量的能量，如果能量小，集中应该说可以排除，在这种情况，人们希望多数情形解具有正则性。就我们所考虑的焦散型波动方程 (1.3.1) 而言，在临界情形，用 Strichartz 估计可以说明对于大能量初值，只要势能不集中，解就会有正则性；只要势能衰减，解就会有良好的渐近性质。事实上，我们可以用 Morawetz 恒等式说明势能是不集中的且在无穷远处是衰减的。

利用初值的正则性空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$，方程的标尺度变换不变的正则性空间 $H^{s_c}(\mathbb{R}^n)$，解的频率和解的演化性态之间的联系，人们猜测：若 $s_c<1$，则 Cauchy 问题有整体正则解，对于 $s_c=1$，在多数情形有整体正则解；而对 $s_c>1$，有“小初值”正则解，大初值解会破裂。

1.3.1 几个重要李群

在偏微分方程研究中，特别是在解的正则性研究中人们发现有几个李群是重要的，其实从方程对一些作用的不变性质的分析中可以看到这一点。为学习或应用方便我们先介绍几个重要李群。首先是正交群 $O(p,q)$，这里的 p,q 是惯性指标满足 $p+q=n$，

它是保持所给的非退化对称双线性形式不变的 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换群。$p=0$ 对应于欧氏空间，简记为 $O(n)$；$p=1$ 对应 Minkowski 时空 $\mathbb{R}^{1+n}$。群 $O(1,n)$ 是 Lorentz 群：它是 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中保持度量 $\sum g_0^{jk}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k$ 不变的线性群。它由空间的旋转与时空的“推进”生成。其李代数（李群在原点的切空间）的生成元为角导数 Ω_{ij}，即

$$\Omega_{ij}=g_0^{ii}x_i\partial_j-g_0^{jj}x_j\partial_i,\ 0\le i<j\le n, \tag{1.3.2}$$

若取 $g_0^{jk}=\mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1)$ 是波动方程的达朗贝尔系数，这样，

$$\Omega_{ij}=x_j\partial_i-x_i\partial_j,\ 0<i<j\le n, \tag{1.3.3}$$

和

$$\Omega_{0j}=t\partial_j+x_j\partial_t\,,0<j\le n. \tag{1.3.4}$$

其中 Ω_{0j} 对应于推进，其他对应于空间旋转。一般情形，设 Q 是对角阵，前 p 个对角元是 -1，剩下的是 $+1$. 则 $O(p,q)=\{L\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})|L^{\mathrm{T}}QL=Q\}$。对 $L\in O(p,q),\det(L)=\pm1$，用 $SQ(p,q)$ 记如下的特殊正交群 $SQ(p,q)=\{L\in O(p,q)|\det L=1\}$。$O(p,q)$ 和 $SQ(p,q)$ 的李代数

$$\mathcal{SQ}(p,q)=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})|AQ+QA^{\mathrm{T}}=0\},$$

其维数为 $n(n-1)/2$. $\mathcal{SQ}(p,q)$ 上的李括号是通常的李括号，即 $[A,B]=AB-BA$。且有 Jacobi 恒等式

$$[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=0$$

成立。酉群 $U(p,q)=\{U\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})|U^*QU=Q\}$ 是正交群在复空间 $\mathbb{C}^n$ 的对应物，其维数是 n^2。相应的特殊正交群以及他们的李代数分别为 $SU(p,q)=\{U\in U(p,q)|\det U=1\}$，其维数是 n^2-1。$\mathcal{U}(p,q)=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})|AQ+QA^*=0\}$，和 $\mathcal{SU}(p,q)=\{A\in\mathcal{U}(p,q)|\mathrm{tr}_QA=0\}$，其中 $\mathrm{tr}_Q=Q^{ij}A_{ij}$。

Poincaré 群也称非齐次 Lorentz 群，它是由 Lorentz 群的元素和平移变换生成。对应的李代数由 Lorentz 群的李代数生成元和 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中平移变换的向量场

$$\partial_i,\ 0\le i\le m, \tag{1.3.5}$$

生成，其中 $\partial_j=\partial/\partial x_j$。

一个微分同胚 $\Phi:\mathcal{U}\subset\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 如果满足 $\Phi^*g=\Omega^2g$，则称其是共形等距的。如果 $\Omega=1$，就称之为等距的。生成单参数的等距和共形等距群的向量场分别称为 Killing 向量场和共形 Killing 向量场。

设 K 是这样一个向量场，Φ_s 是对应的单参数群。由于 $(\Phi_s)_*$ 是共形等距的，我们立刻有 L_Kg 必须成比例于 g。此外，如果 K 是 Killing 的，$L_Kg=0$。如果 K 是 Killing 向量场，我们能选取局部坐标 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 使得 K 是一个坐标导数，即 $K=\partial_0$。这样我们立刻就有相应于这样的局部坐标 g 与 x_0 无关。对于 Minkowski 时空 $\mathbb{R}^{1+n}$ 线性无关的 Killing 向量场的个数不会超过 $(n+1)(n+2)/2$。

所有平移、Lorentz 旋转、伸缩以及反射变换全体生成的群称为**共形群**。用 X 记时空点，给定一个向量 a，则平移变换 T_a 为 $X \to X + a$; 给定任何 $\Lambda \in O(1,n)$, Lorentz 旋转为 $X \to \Lambda X$。如果 $n \neq 1$，共形变换可由除平移、Lorentz 变换外还有伸缩 $X \longrightarrow \lambda X$，及反射变换 VT_aV 生成，其中 $V(X) = X(X \cdot X)^{-1}$，其中的 $(X,X) = \delta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \neq 0$, 这里的 $\delta_{\alpha,\beta}$ 为 Minkowski 度量。

对应于伸缩变换 $x \to \lambda x$ 有生成元 $L_0 = t\partial_t + x \cdot \nabla$。

反射变换 VT_aV 的生成元 $C_\alpha = 2x_\alpha(x^\gamma\partial_\gamma) - x^\beta x_\beta \partial_\alpha$。它可由 V_* 作用到向量场 ∂_α 来得到，即 $C_\alpha = V_*(\partial_\alpha)$。

共形变换群的李代数是由向量场 ∂_α, $\Omega_{\alpha\beta}$, L_0, 和 C_α 生成。

下面我们将

$$\partial_0, \cdots, \partial_n, L_0, \Omega_{01}, \cdots, \Omega_{n-1}, C_\alpha$$

分别由 $\Gamma_i, i = 0, \cdots, (n+1)(n+4)/2$ 来记。

$$\Gamma^\alpha = \Gamma_1^{\alpha_1} \cdots \Gamma_m^{\alpha_m},$$

我们称向量场 L_0, $\Omega_{\alpha,\beta}$ 为齐次向量场，这是由于它们的系数是一次齐次的. 注意到对于这些向量场，我们有交换关系

$$[\Gamma_i, \Gamma_j] = \sum C_{ijk}\Gamma_k \tag{1.3.6}$$

对某些固定的常数成立，其中的和仅包含齐次向量场。这样，两个齐次向量场的交换子是齐次向量场的线性组合。如果我们计算 ∂_j 和齐次向量场的交换关系，就得到一个平移变换向量场:

$$[\Gamma_k, \partial_j] = \sum_{i=0}^{n} a_{ijk}\partial_i, \tag{1.3.7}$$

这是由于

$$[\partial_k, L_0] = \partial_k, [\partial_k, \Omega_{0j}] = \delta_{0k}\partial_j + \delta_{jk}\partial_0, \tag{1.3.8}$$

和

$$[\partial_k, \Omega_{ij}] = \delta_{jk}\partial_i - \delta_{ik}\partial_j,\ 0 \le k \le n, 1 \le i,j \le n.$$

对于其他向量场我们有 $[C_\alpha, C_\beta] = 0$, $[C_\alpha, L_0] = -C_\alpha$, $[\Omega_{\alpha\beta}, C_\gamma] = \delta_{\alpha\gamma}C_\beta - \delta_{\beta\gamma}C_\alpha$ 以及

$$[\Omega_{\alpha\beta}, \Omega_{\gamma\delta}] = \delta_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} - \delta_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\delta} + \delta_{\beta\delta}\Omega_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma}.$$

容易验证对于达朗贝尔算子 $\Box = \partial_t^2 - \Delta$，我们有 $[\Box, \partial_\mu] = 0$, $[\Box, \Omega_{\mu\nu}] = 0$, $[\Box, L_0] = 2\Box$, $[\Box, C_\mu] = 4x_\mu\Box$.

另一事实对我们也是有用的，即考虑在一个给定的点 $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \setminus 0$ 齐次向量场的张量。具体地, 注意到如果 $t^2 \neq |x|^2$, 即如果 (t,x) 不在光锥上, 则这些向量场张成所有 (t,x) 上的切空间。另一方面，如果 $t^2 = |x|^2$, 它们仅仅张成光锥上的切空间, 由 (1.3.8) 这丢失的法向分量仅一阶为 0。

Laplace 算子可以在球坐标下写成

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\sum_{j<k}\Omega_{jk}^2,$$

其中 $r=|x|, \partial_r = (\frac{x}{r})\cdot\nabla$ 是径向导数，角导数的平方满足

$$|\nabla u|^2 - u_r^2 = \frac{1}{r^2}\sum_{j<k}(\Omega_{jk}u)^2. \tag{1.3.9}$$

1.3.2 模型方程的守恒律与一些不变性质

这一节我们将对方程的不变性作一些具体的刻画，如 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中的 Schrödinger 方程 $i\partial_t u + \Delta u = 0$, 除了前面的标尺度变换不变外，容易验证在 Galilean 变换

$$\tilde{u}(t,x) = \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}x\cdot v}\mathrm{e}^{i\frac{1}{4}t|v|^2}u(t,x-vt), v\in\mathbb{R}^n,$$

下是不变的，即 u 是方程的解当且仅当 $\tilde{u}$ 是方程的解。

对于非线性波动方程 NLW, 它可以形式地看成是 Lagrangian

$$\mathcal{L}(u) = \int\int\Big\{-\frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\Big\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{1.3.10}$$

的 Euler-Lagrangian 方程，其中 F 是 f 的原函数，且 $F(0)=0$。极小泛函 $\mathcal{L}$ 在 Poincaré群作用下是不变的。注意到关于时间平移变换的生成元为 $\frac{\partial}{\partial t}$，故在 (NLW) 两边同乘 $\partial_t u$ 得散度形式

$$\partial_t e - \sum_{j=1}^n \partial_j p_j = 0, \tag{1.3.11}$$

其中 $e = \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)$, $p_j = (\partial_t u)(\partial_j u)$。

- 如果适当选取初值，使得当 $|x|\to\infty$ 时为 0, 则 (1.3.11) 意味着能量守恒

$$E(u) = \int\Big(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\Big)\mathrm{d}x = 常数. \tag{1.3.12}$$

- 如果 $F\geqslant 0$, 由 (1.3.11) 还可以得到有限传播速度性质。事实上，我们在以 T 为顶，B 为底，K 为侧面的实锥台 $t_0\geqslant t_2\geqslant t\geqslant t_0-|x-x_0|\geqslant t_1$ 上积分得

$$\int_T e\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_K (e - \frac{x}{r}\cdot p)\mathrm{d}K = \int_B e\mathrm{d}x, \tag{1.3.13}$$

其中 $r=|x|$, $\mathrm{d}K$ 是锥面上的测度。注意到 $|p|\leqslant e$, 上式左边的两被积函数均非负，因此 T 中的能量小于等于 B 中的能量，即传播速度 $\leqslant 1$。

- 注意到空间平移变换的生成元是 ∂_x, 由此可以导致动量 $\int p_k\mathrm{d}x$ 守恒，

$$\partial_t p_k - \sum_j \partial_j(\partial_k u\partial_j u) + \partial_k(e-(\partial_t u)^2) = 0. \tag{1.3.14}$$