

努力的不一定是强者
而是坚持不懈

首席教师

专题小课本

- 小方法大智慧
- 小技巧大成效
- 小单元大提升
- 小课本大讲坛

初中数学 方程(组)与不等式(组)

总主编/钟山



中国出版集团 现代教育出版社

海阔凭鱼跃

图书在版编目(CIP)数据

首席教师专题小课本. 初中数学. 方程(组)与不等式(组) / 钟山主编. —北京: 现代教育出版社, 2008. 4
ISBN 978-7-80196-635-3

I. 首… II. 钟… III. 代数课—初中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 038483 号

书 名: 首席教师专题小课本·初中数学—方程(组)与不等式(组)
出版发行: 现代教育出版社
地 址: 北京市朝阳区安华里 504 号 E 座
邮政编码: 100011
印 刷: 北京市梦宇印务有限公司印刷
发行热线: 010-61743009
开 本: 890×1240 1/32
印 张: 9.25
字 数: 390 千字
印 次: 2008 年 4 月第 1 版 第 1 次印刷
书 号: ISBN 978-7-80196-635-3
定 价: 15.80 元

小单元学习法

首席教师的成功经验，优秀学生的学习秘诀

小单元是指在充分研究考纲和课标，透析教材知识结构，按照知识、方法、能力与中高命题的内在联系和系统结构，把教材内容分成若干个相对完整和独立的内容组块。几个小单元又构成相当于教材单元（或章）的内容板块，教材的几个单元又构成了大专题。

课时的基础性学习与单元的提升性学习

各类统考、中考试题命制的立足点、密集区在小单元，其能力要求、难度、综合性、深刻性、创新性往往与课时学习、教材内容严重脱节。在一节教材或一个课时中，对问题、原理及规律往往不能完全清楚认识，也不可能深化拓展，其实这只是基础性学习阶段。真正发展能力和提升成绩的支点是小单元，小单元学习是更高层次的提升性学习，是真正深化、拓展、发展能力的重要阶段，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。

主动变换发力点

实际教学中由于课时紧张，大多数师生致力于同步教材的课时学习，习惯于一个个概念孤立记忆，一道道题去解析，往往事倍功半，这也是很多学生平时学习很努力，但考试成绩不理想的重要原因之一。这就要求我们转变观念，在同步学习及备考复习的过程中适时、适度的插入小单元、大单元及专题学习，主动完成提升性学习，对所学内容分级整合深化、各个击破，分级提升学生的知识整合能力、综合运用能力和问题解决能力。

单元学习五大关键

整合深化
形成知识模块

归纳拓展
活化解题方法

系统分层
培养高考能力

居高临下
形成应试策略

题组检测
优化训练方法



首席教师 专题小课本

初中数学

方程(组)与不等式(组)

总主编:钟山

本册主编:姜汝顺

本丛书成立答疑解惑工作委员会,如有疑难问题可通过以下方式与我们联系:

企业网站:

<http://www.bjjxsy.com>

产品网站:

<http://www.swtnet.net>

服务电话:010-61743009

电子邮箱:

book@bjjxsy.com

service@swtnet.net

通信地址:北京市天通苑邮局6503号信箱

邮政编码:102218

专题三
中考数学

知识网络梳理

知识网络梳理

综合专题突破

综合专题突破



大单元提升

知识清单精解

方法技巧突破



小单元提升

中考能力培养

命题规律点津

题组优化训练



专题提升

思维方法攻略

SIWEIFANGFAGONGLUE

中考热点突破

ZHONGKAOREDIANTUO

专题速记图解

CHUANTISUJITUJIE

中考热点导航

CHONGKAOREDIANTAHUANG

中考零距离检测

CHONGKAOJINGLIJIEDETE

知识清单精解

单元内知识、方法、公式等学习要点清单化，运用整合、深化、对比、综合、发散等精细化学习方法及口诀、图表、顺口溜等学习技巧，精讲透析，简明快捷，易看、易记、易懂。

方法技巧突破

精心归纳问题及类型，找到最佳解决思想方法、解题技巧，透析方法运用要点，实现有效迁移，举一反三。例题讲解中进一步对疑难点的深化拓展，真正解决知识学习与解题运用的脱节问题。

中考能力培养

透析考纲对单元内容的能力要求，精析中考对知识内容的具体要求，配以典型考例透视能力层次，科学把握学习的难度和综合性，做到有的放矢，达到事半功倍的学习效果。

命题规律点津

从中考要求、命题规律、应试策略三个维度详实讲解单元的中考现状与发展趋势，具体把握应试策略与技巧，真正实现中考备考同步化，科学阐释了零距离中考新概念。

题组优化训练

从误区突破、综合创新两个维度分题组选题，精选中考真题，热点模拟题、创新题、原创题，针对训练，集中突破。同时答案详解，配以题组规律总结，更利于练后反馈，达到训练效益最大化。

知识网络梳理

细致梳理概括大单元或章的知识与方法，达到网络化、图式化、结构化和形象化，利于快捷地由小单元升华为大单元，进一步扩充知识架构。

综合专题突破

在小单元讲练的基础上，整理出综合性、创新性、能力性更强的问题、方法、题型，以小专题形式专项讲解、拓展突破。

前言

Q IANYAN

近年来,我国的基础教育改革的素质教育进程已进入深化实施阶段,中学教材已呈现出“一标多本”的多元化格局,中考更是呈现出“一纲多卷”的地方化特色。为了更好地适应教学者的新趋势、新特色,我们集各省名校的学科首席教师、一线特高级教师和有经验的教育考试专家的聪明智慧和科研成果,精心构思,编写打造了本套丛书。

本套丛书的鲜明特色和深度魅力,主要体现在以下四个方面:

1. 核心单元,提升成绩的真正支点

小单元学习与同步课时学习相比,是更高层次的提升性学习,是真正深化拓展、发展能力、成功应试的重要步骤,也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。本套丛书以小单元为讲练基点,弥补了同步教学的缺失和薄弱环节,单元内由“知识、方法、能力、应试与训练”五要素构成了最优化学习程序,层次鲜明,通过对重难点、能力点、方法点和考点的精心讲练,有效的为师生最大限度提升成绩,建起了知识、方法和能力提升的新支点。

2. 螺旋提升,提供三级发展平台

专题编写遵循“小单元提升、大单元提升、本专题提升”三个梯度,再加上平时的课时学习,讲练结合、循序渐进、螺旋提升,构成了学科学习、思维发展与能力培养的有机整体。

3. 突出方法,多维度培养能力

无论是疑难讲解,问题解决,还是应试与训练,均以方法归纳、提炼与运用为突破口,力求做到集“学习法、解題法、应试法、训练法”于一身,帮助学生高效构建知识体系和方法体系,使读者在运用本书高效学习的同时收获更多的有效方法,发掘自己的最大学习潜能。

4. 汲取各版本精华,真正的专题教材

在编写过程中,充分汲取各版本教材的特色与精华,选取其中典型素材、典题典例、方法技巧,以师生完成同步教材的课时学习为基础,通过整合、深化、发散、分级,达到中考要求,既是学生完成提升性学习的专题教材,更是教师各类单元、专题教学的必备参考。

阿基米德说:给我一个支点,
我将撬起地球。本套丛书必将成为
您成功的新支点,发展的新平台。



发现
依靠眼光
行动决定收获

目 录

首席寄语	(1)
单元提升篇	(3)
第一章 方程与方程组	(3)
第一单元 方程和它的解	(3)
第二单元 一元一次方程的解法	(13)
第三单元 一元一次方程的应用	(27)
第四单元 二元一次方程	(45)
第五单元 二元一次方程组的解法	(62)
第六单元 二元一次方程组的应用	(85)
第七单元 可化为一元一次方程的分式方程	(107)
第八单元 一元二次方程	(125)
第九单元 一元二次方程的解法	(139)
第十单元 一元二次方程的根的判别式及根与系数的关系	(157)
第十一单元 可化为一元二次方程的分式方程	(166)
第十二单元 一元二次方程的应用	(176)
章末综合提升	(186)

方法·技巧·策略

方程的识别(4)/检验方程的解(5)/根据数量关系列方程(5)/等式性质的运用(6)/
 根据所给的解列方程(7)/检验一个数是否是某个方程的解(7)/考查一元一次方程的定
 义(14)/一元一次方程的一般解法(14)/分母中含有小数的一元一次方程的解法(15)/巧
 解一元一次方程(16)/含有字母系数的一元一次方程的解法(17)/含绝对值的一元一次
 方程的解法(18)/利用方程的解求其他字母的值(18)/寻找相等关系的一般方法(28)/
 列方程解应用题常见的分析方法(28)/和、差、倍、分问题(29)/等积变形问题(30)/行程
 问题(31)/劳动力调配问题(32)/工程问题(33)/利润问题(33)/数字问题(34)/储蓄
 问题(35)/考查二元一次方程的定义(47)/二元一次方程的变形(48)/考查二元一次方程的
 解的概念(48)/利用二元一次方程的解求二元一次方程中其他字母的值(50)/考查二元一
 次方程组的定义(50)/二元一次方程组解的判定(51)/二元一次方程组解的应用(52)/

利用一元一次方程的解求二元一次方程组的解(53)/用代入法解二元一次方程组(63)/用加减消元法解二元一次方程组(64)/用换元法解方程组(66)/求二元一次方程组中待定系数的值(67)/利用同解方程解答问题(68)/综合考查非负数及二元一次方程组(69)/综合考查方程组与相反数的关系(70)/代数式的值与二元一次方程组的综合考查(71)/根据同类项的特点列二元一次方程组解答问题(72)/解含有字母系数的二元一次方程组(72)/和、差、倍、分问题(86)/数字问题(87)/行程问题(88)/工程问题(90)/配套问题(91)/利息、利税问题(92)/经营决策问题(92)/考查分式方程的概念(108)/考查增根的概念(108)/分式方程的解法(109)/根据分式方程根的情况求方程中字母的值(110)/利用方程的增根求方程中字母的值(111)/用换元法解分式方程组(112)/换元法解方程组在实际问题中的应用(113)/分式方程的应用(114)/对一元二次方程概念的考查(126)/一元二次方程与一元一次方程的区别(127)/化一元二次方程为一般形式(128)/与一元二次方程相关的求代数式的值(129)/用直接开平方法解一元二次方程(142)/用因式分解法解一元二次方程(143)/用配方法解一元二次方程(144)/用公式法解一元二次方程(146)/挖掘隐含条件,注重思维突破(158)/用换元法解分式方程(166)/突破列方程解应用题的思维误区(177)

第二章 不等式与不等式组	(205)
第一单元 认识不等式	(205)
第二单元 一元一次不等式及其解法	(212)
第三单元 一元一次不等式组及其解法	(221)
第四单元 不等式(组)的应用	(230)
章末综合提升	(241)

方法·技巧·策略

几种不等关系的表示(206)/正确区分不等式的解和解集(206)/已知不等式和它的解,求字母系数的取值(212)/巧解一元一次不等式(213)/确定不等式组解集的方法(222)/求不等式组的整数解(223)/建模思想——根据不等关系建立不等式模型(231)/分类讨论的思想——通过讨论不等关系,建立不等式(232)/转化思想——将实际问题转化为数学问题,即不等式(组)问题(233)

专题提升篇	(256)
-------	-------

第一单元 专题思想方法	(256)
-------------	-------

方法·技巧·策略

转化的思想(256)/数形结合思想(258)/分类讨论的思想(261)/换元思想(262)/整体思想(264)/数学建模思想(265)

第二单元 专题中考热点	(273)
-------------	-------

方法·技巧·策略

图表信息题(273)/阅读理解题(277)/实践操作与方案设计问题(280)



首席寄语

■专题导引

观察图 1-0-1, 问买一盒“福娃”玩具和一枚徽章的价格各是多少元?

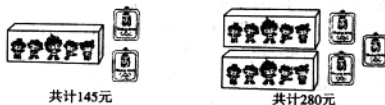


图 1-0-1

由上面的实例可以看出, 方程(组)在现实生活中无处不在. 它让我们体会到方程(组)是刻画现实世界的一个数学模型. 方程和方程组是初中数学的重要内容, 与数、等式、不等式、函数有着密切的联系, 而一元一次不等式和一元一次不等式组及其应用是在方程(组)基础上的知识拓展, 同时又是高中学习一元二次不等式、分式不等式的基础, 是初中数学的重要内容.

1. 本专题学习的主要内容:

- ① 方程和方程组
 - 概念: 一元一次方程、二元一次方程(组)、一元二次方程、可化为一元一次方程(一元二次方程)的分式方程.
 - 解法: 利用“加减消元法”和“代入消元法”解二元一次方程组, 利用“换元法”或“转化思想”解分式方程, 利用“因式分解法”、“公式法”、“配方法”解一元二次方程.(重点)
 - 应用: 列一元二次方程、二元一次方程组、分式方程、一元二次方程解决实际问题.(难点)
- ② 不等式(组)
 - 概念: 不等式、不等式组的概念.
 - 解法: 解一元一次不等式、二元一次不等式组, 利用数轴表示不等式(组)的解集.(重点)
 - 应用: 利用不等式(组)解实际生活中的优化问题.(热点)

2. 本专题所涉及的知识点与方法:

- ① 根据相关定义判断方程(组)的各类型及不等式(组), 判断所给数是不是方程(组)、不等式(组)的解或解集, 主要题型为选择题、填空题.
- ② 能熟练地运用加减消元法、代入消元法、因式分解法、换元法、去分母法和乘法解方程或方程组, 利用不等式的性质解一元一次不等式, 能熟练地在数轴上表示不等式的解集, 利用数轴(口诀)求不等式组的解集, 利用根的判别式判定一元二次方程的根的情况, 利用根与系数的关系求值, 多以选择题、填空题、解答题为主.
- ③ 应用数学知识解决实际问题学习数学的目的之一, 也是考查能力的重要方式, 所以应用题一直是考查热点. 列一元一次方程、二元一次方程组、一元二次方程、

分式方程应用题.从所列不等式(组)的解集确定符合题意的解,根据实际意义检验它的合理性,解决优化问题,是近几年中考的热点问题,常出现于应用题中.

■中考命题规律

本册内容包括“方程”和“不等式”两部分,都是初中数学的重要内容,是历年中考命题的重点和热点.近几年各省中考题中,直接或间接考查本册内容的考题分值占20%~25%,题型以填空题、选择题的形式直接考查知识点,也有这两部分内容及与其他知识结合的解答题及综合性问题的中、高档题.中考命题也随着“课程标准”对本册内容的新要求,较前几年发生较大转化,命题规律趋势主要体现在以下几个方面:

1. 含有字母系数或其他知识融合在一起,以选择题或填空题的形式考查一元一次方程的有关概念.根据“课程标准”的要求,估计今后的命题,会从概念上判断方程(组)的类型并根据定义的双重性解方程(组)和研究分式方程的增根情况方面灵活命题.

2. 对方程(组)应用问题的考查仍是中考命题的热点,命题形式以解答题居多,难度适中.但在选择题和填空题中也会经常见到它的踪迹.今后的命题将会出现多方位辐射的动向,更加贴近生活、贴近社会,通过应用数学知识把实际问题抽象成数学问题,从培养同学们分析问题和解决问题的能力以及“学数学,用数学”的意识出发命题.

3. 求不等式(组)的解集,并在数轴上表示出来,常以选择题和填空题的形式出现,直接考查知识点,也经常与其他知识综合,以解答题的形式出现,考查知识点的运用.新课改实验教科书强化了这一方面,如与求函数自变量取值范围,与二次根式、分式有无意义等内容相结合,用不等式组解决一些实际问题等已成为今后命题的热点.

4. 对不等式(组)的应用是历年来全国各地中考的必考内容,近几年根据题中不等量关系列不等式(组)解决实际问题一直是中考命题的热点.新课程标准明确指出:“要根据具体问题中的数量关系列出一元一次不等式和二元一次不等式组,解决实际问题”.今后对这一部分中考命题,会与其他知识相结合,考查综合运用知识的能力.

本册内容将是今后中考命题的重点和热点.在选择题、填空题和解答题中都会有较为重要的作用,除以上分析外,对方程(组)、不等式(组),特别是一元二次方程和可化为一元二次方程的分式方程的应用将是中考命题的重点.从表现为与方程自身有关的知识间的单科应用,辐射到表现为与几何、函数等综合应用,反映时代气息,命题情境来自生活、生产实践、营销、决策等,从社会关注的热点问题中寻找题中等量(不等量)关系,形成对用数学意识、用方程思想(不等量关系)解决日常生活、生产中的实际问题的考查,与社会密切相关的试题将会不断出现.

■学习应试策略

1. 方程(组)的解法是初中数学的重要内容,学习时要注意方程的变形与解的检验;要明确分式方程转化为整式方程的指导思想,注意“去分母法”和“换元法”的运用;对列方程解应用题要仔细审题、弄清题意,正确找出能够表示应用题全部含义的相等关系,把握好应用题的检验,体会贯穿方程中的思想方法——“化归法”、“换元法”、“消元法”和“降次法”,将实际问题中内在本质的联系抽象转化为数学问题,进而建立数学模型.

2. 一元一次不等式(组)的解法是各地中考的必考内容.学习本部分知识,要注意在不等式两边同乘(或除以)同一个负数时,不等号要改变方向和在数轴上表示不等式(组)解集时的“空心圆圈”与“实心圆点”的运用;近几年由于题目内容贴近生活实际,往往文字较多,要注意正确理解题意,要综合全面分析问题,抓住问题的实质,列恰当的不等式(组),日常学习中要养成审题仔细,做题认真,求解后检验的良好习惯.

[单元提升篇]

第一章 方程与方程组

 课程标准要求

1. 能根据具体问题中的数量关系,列出方程,体会方程是刻画现实世界的一个有效的数学模型.
2. 经历观察、画图或计算器等手段估计方程解的过程.
3. 会解一元一次方程、简单的二元一次方程(组)、可化为一元一次方程的分式方程.
4. 会用因式分解法、公式法、配方法解简单的数字系数的一元二次方程.
5. 能根据具体问题的实际意义列方程(组),并检验结果是否合理.

第一单元

方程和它的解

 知识清单精解

 ZHISHIQINGDANJINGJIE

要点 1 方程的概念

含有未知数的等式叫做方程.

注意:(1)方程的概念有两层含义:一是等式,即是用等号连接而成的式子;二是方程中至少有一个未知数,二者缺一不可.

(2)一个式子的分类有以下关系:

$$\begin{array}{l} \text{等式} \begin{cases} \text{含未知数的等式,一定是方程} \\ \text{不含未知数的等式,一定不是方程} \end{cases} \\ \text{式子} \begin{cases} \text{不等式,一定不是方程} \end{cases} \end{array}$$

要点 2 方程的解的概念

使方程左、右两边的值相等的未知数的值叫做方程的解.

注意 (1)只含一个未知数的方程的解,也叫做方程的根。(2)方程的解一定是方程中所含未知数的取值。

学法指导

将所给的未知数的取值,分别代入方程的左边和右边,若左边与右边的值相等,则未知数的取值就是方程的解;若左边与右边的值不相等,则未知数的取值就不是方程的解。

要点 3 列方程的意义

根据题目中的等量关系,把文字语言叙述的问题转化为符号语言表达的式子,就列出了方程。

列方程的一般步骤:

- (1)设字母表示未知数(通常用 x, y, z 来表示未知数);
- (2)用代数式表示相关的量;
- (3)根据等量关系,列出方程。

要点 4 解方程的概念

求方程的解的过程叫做解方程。

学法指导

解方程的过程实际上是等式的变形,即利用等式的性质1:等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,所得结果仍为等式;等式的性质2:等式的两边都乘(或除以)同一个数(除数不能为零),所得结果仍为等式。利用等式的这两条性质,使方程的一边只含有所求字母且字母的系数为1。

方法技巧突破**技巧 1 方程的识别**

等式和方程的区别在于方程中含有未知数,而等式中不一定含有未知数;等式不一定是方程,但方程一定是等式。

例 1 指出下列各式是不是方程,是方程的,说明已知数和未知数;不是方程的,说明理由。

- (1) $2x-1=5$; (2) $4+8=12$; (3) $5y-8$; (4) $2a+3b=0$;
 (5) $2x^2+x=1$; (6) $6x^2-5x+4$; (7) $x-2\neq 1$; (8) $ax+2a=3$ 。

解:(1)是方程。 $2, -1, 5$ 是已知数, x 是未知数;

(2)不是方程。因为等式中不含未知数;

(3)不是方程。因为它是代数式,而不是等式;

(4)是方程。 $2, 3, 0$ 是已知数, a, b 是未知数;

(5)是方程. 2,1 是已知数, x 是未知数;

(6)不是方程. 因为它是代数式,而不是等式;

(7)不是方程. 因为它不是等式;

(8)是方程. 当 a 是未知数时, $x, 2, 3$ 是已知数; 当 x 是未知数时, $a, 2a, 3$ 是已知数; 当 a, x 是未知数时, $2, 3$ 是已知数.

点拨:方程的已知数包括它前面的符号,当未知数的系数为1时,可省略不写,也可以看成已知数,但不需写“1”.

技巧2 检验方程的解

检验方程解的方法——代入计算.

例2 检验下列各数是不是方程 $3a-1=2a+1$ 的解.

(1) $a=4$; (2) $a=2$.

解: (1)把 $a=4$ 分别代入方程 $3a-1=2a+1$ 的左边和右边, 得左边 $=3 \times 4 - 1 = 11$, 右边 $=2 \times 4 + 1 = 9$. $\because$ 左边 $\neq$ 右边, $\therefore a=4$ 不是方程 $3a-1=2a+1$ 的解.

(2)把 $a=2$ 分别代入方程 $3a-1=2a+1$ 的左边和右边, 得左边 $=3 \times 2 - 1 = 5$, 右边 $=2 \times 2 + 1 = 5$. $\because$ 左边 $=$ 右边, $\therefore a=2$ 是方程 $3a-1=2a+1$ 的解.

例3 已知 $3x^{a-1}y^2$ 与 $4x^2y^{b-1}$ 是同类项, 判断 $k=\frac{a+b}{2}$ 是不是方程 $2k-6=0$ 的解?

解: $\because 3x^{a-1}y^2$ 与 $4x^2y^{b-1}$ 是同类项,

$$\therefore \begin{cases} a-1=2, \\ b-1=2. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=3, \\ b=3. \end{cases}$$

将 $a=3, b=3$ 代入 $k=\frac{a+b}{2}$, 得 $k=\frac{3+3}{2}=3$.

把 $k=3$ 代入方程 $2k-6=0$, 得

左边 $=2 \times 3 - 6 = 0 =$ 右边,

$\therefore k=\frac{a+b}{2}$ 是方程 $2k-6=0$ 的解.

点拨:例3属于解方程,可利用等式的性质. 检验方程的解的方法是将所给的数值,分别代入方程的左边和右边,看左边和右边是否相等. 检验过程中要注意格式的书写规范,不能将数值直接代入方程,如例2中(1)小题不能写为:把 $a=4$ 代入原方程,得 $3 \times 4 - 1 = 2 \times 4 + 1 = 12 - 1 = 8 + 1$. $\because 11 \neq 9$, $\therefore a=4$ 不是原方程的解.

这样写错误的原因是在未检验之前,还不知道 $a=4$ 是不是方程的解,也就不知道当 $a=4$ 时,方程两边相等还是不相等,这样就不能用等号连接. 即使上例检验时,从第一步开始都写成不等号,也不符合书写规范.

技巧3 根据数量关系列方程

根据问题中的数量关系列方程,关键是找出题中的等量关系. 其中分析和思维的

过程通常包括:

- (1)弄清题意和其中的数量关系,用字母表示适当的未知数;
- (2)找出问题所给出的数量相等关系,它反映了未知量与已知量之间的关系;
- (3)对这个等量关系中涉及的量,列出所需的表达式,根据等量关系,得到方程.

例 4 根据下列条件列出方程.

- (1)某数的 3 倍加上 2 等于 7;
- (2)某数的 5 倍比它本身大 5;
- (3)某数的相反数比它的 2 倍小 1;
- (4)某数比它的 $\frac{5}{3}$ 还大 4;
- (5)某数的 25% 与 15 的和等于它的 45%;
- (6)某数的 30% 比它本身的倒数的 $\frac{2}{3}$ 还小 $\frac{2}{3}$.

解:设某数为 x ,根据题意,得

$$(1) 3x + 2 = 7; (2) 5x - x = 5; (3) 2x - (-x) = 1; (4) x = \frac{5}{3}x + 4;$$

$$(5) 25\%x + 15 = 45\%x; (6) \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - 30\%x = \frac{2}{3}.$$

点拨:首先设未知数,然后分析已知量与未知量之间的关系,找出题中的等量关系,最后根据已知的等量关系列出方程.

例 5 小赵去商店买练习本,回来后问同学们:“店主告诉我如果多买一些就给我八折优惠,我就买了 20 本,结果便宜了 1.8 元,你们猜原来每本价格多少元?”如果设每本价格为 x 元,你能写出所列方程吗?

分析:按原来每本的价格买 20 本共花 $20x$ 元,若按优惠计算共花 $20x \cdot 80\%$ 元.所依据的相等关系是:优惠前的价格 - 优惠后的价格 = 1.8 元.

解:依据题意,得 $20x - 20x \cdot 80\% = 1.8$.**技巧 4 等式性质的运用**

等式的性质:

- (1)等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,所得结果仍为等式;
 - (2)等式的两边都乘(或除以)同一个数(除数不能为零),所得结果仍为等式.
- 等式的性质是等式变形的依据,而解方程的过程实际上是进行等式的变形.

例 6 用适当的数或整式填空,使所得的结果是等式,并说明根据等式的哪条性质.

(1)若 $2x + 6 = 7$, 则 $2x = 7 - \underline{\hspace{2cm}}$;

(2)若 $-2x = \frac{1}{2}$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: (1) 用等式性质 1, 等式两边同减去 6;

(2) 利用等式性质 2, 等式两边同乘 $(-\frac{1}{2})$.

答案: (1) 6 等式性质 1 (2) $-\frac{1}{4}$ 等式性质 2

点拨: 等式变形时, 必须根据等式的性质, 等式两边同时进行完全相同的四则运算.

例 7 已知: $2x - y = 3 + y$, 利用等式的性质, 比较 x, y 的大小.

解: $2x - y = 3 + y$, 根据等式性质 1, 两边都减去 y , 得 $2x - 2y = 3$; 根据等式性质 2, 两边都除以 2, 得 $x - y = \frac{3}{2}$. $\because x - y > 0, \therefore x > y$.

点拨: 根据有理数大小比较的方法, 可利用作差法来比较 x, y 的大小, 这就需要利用等式的性质, 对 $2x - y = 3 + y$ 变形, 求出 $x - y$ 的值.

技巧 5 根据所给的解列方程

此类问题是开放性题目, 答案不唯一. 可先使所给的解满足一个较简单的方程, 再利用等式的性质对此方程进行适当的变形.

例 8 (2005 · 上海) 已知一个方程有一个解为 1, 那么这个方程可以是 _____ (只需写出一个方程).

答案: $x = 1$

点拨: 最简单的方程是 $x = 1$. 在此基础上利用等式的性质变形, 可写出无数个满足要求的方程. 例如 $2x = 2, x + 5 = 6, \frac{1}{2}x + 1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{x} = 1$ 等.

技巧 6 检验一个数是否是某个方程的解

检验一个数是不是某个方程的解, 就是将所给的数分别代入方程的左边和右边. 如果左边等于右边, 这个数就是方程的解; 如果左边不等于右边, 这个数就不是方程的解. 不要将所给的数代入原方程中判断.

例 9 $x = -\frac{1}{3}$ 是不是方程 $2x^2 - 1 = 5x - x^2 + 1$ 的解?

解: 把 $x = -\frac{1}{3}$ 分别代入方程的左边和右边, 得

$$\text{左边} = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9},$$

$$\text{右边} = 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = -\frac{7}{9}.$$

$\therefore$ 左边 = 右边,

$\therefore x = -\frac{1}{3}$ 是方程 $2x^2 - 1 = 5x - x^2 + 1$ 的解.

1. 逻辑思维能力

能力点津:方程的思想是非常重要的数学思想之一,列方程解决生活中的实际问题体现了学生的思维能力、分析问题、解决问题的能力,是中考命题的重点内容.解答此类问题的关键是正确的理解题意,弄清问题中各种数量之间的关系,寻找等量关系,并根据题意设未知数,列出方程.

考例 1 (2006·陕西)一件标价为 600 元的上衣按八折销售仍可获利 20 元.设这件上衣的成本价为 x 元,根据题意,下面所列的方程正确的是()

- A. $600 \times 0.8 - x = 20$ B. $600 \times 8 - x = 20$
C. $600 \times 0.8 = x - 20$ D. $600 \times 8 = x - 20$

解析:本题涉及到销售问题中基本量的关系,即售价 - 成本 = 利润,这恰是本题中隐含的等量关系,而售价为 600×0.8 元,所列方程应为 $600 \times 0.8 - x = 20$,故选 A.

答案:A

2. 抽象概括能力

能力点津:利用与生活实际有关的具体情景,注重学生的心理历程,搭起数学与实际问题的桥梁,帮助学生体验由生活情境抽象数学问题,即学会运用数学建模的思想方法,培养学生用数学的观点和方法来考察周围事物,提高学生应用数学的能力、抽象概括的能力.

考例 2 小明是一位爱动脑筋、善于思考的同学,对日历很有研究,如图 2-1-1 是 2004 年 3 月份的日历,只要你说出十字框内五个数的和是多少,例如这五个数的和是 95,小明就能知道是哪五个数,请问小明是怎么知道这五个数的?(只列方程)

一	二	三	四	五	六	日
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

图 2-1-1

分析:日历上的数有这样的特点:每一个数比它左边的一个数大 1,比它右边的一个数小 1,比它上面的一个数大 7,比它下面的一个数小 7,小明正是利用这个特点列方程求出这五个数的.

解:设十字框内正中间的一个数是 x ,则它左边的数是 $x-1$,右边的数是 $x+1$,上面的数是 $x-7$,下面的数是 $x+7$,根据题意,得

$$(x-1) + x + (x+1) + (x-7) + (x+7) = 95.$$

点拨:列方程解答实际问题,关键是要从题目中找出表示已知量和未知量之间的等量关系,根据此等量关系列出方程.



1. 考点导航

考 点	要 求
方程的解	会判断一个数(或一组数)是不是某方程的解
列方程解决应用问题	会根据题目中的等量关系,列出方程

2. 规律点津

本节主要考查方程的解及列方程解决实际问题. 在近几年的中考中, 主要以选择题、填空题形式出现.

例 1 (2007·福建南平) 已知 $x=1$ 是方程 $ax^2+x-2=0$ 的一个根, 则 $a=$ _____.

解析: 利用方程根的定义, 把 $x=1$ 代入方程,

得 $a+1-2=0$, 所以 $a=1$. 答案: 1

点拨: 本题考查了方程解的概念和求待定系数的值, 是中考命题的必考内容.

3. 策略技巧

列方程解决生活中的实际问题

首先要对实际问题提供的情景有所了解, 其次要仔细读题, 弄清问题中各种数量之间的关系. 如多几、少几、几倍、几分之几, 又如路程=速度 $\times$ 时间等等. 然后要设未知数, 最关键的就是要从题目中找出表示已知量和未知量之间的等量关系, 根据此等量关系列出方程.

例 2 不久前, 共青团等部门发起了“保护母亲河行动”, 某校九年级两个班的 115 名学生积极参与, 踊跃捐款, 已知九年级(1)班有 $\frac{1}{3}$ 的学生每人捐了 10 元; 九年级(2)班有 $\frac{2}{5}$ 的学生每人捐了 10 元, 两班其余学生每人都捐了 5 元, 两班捐款总数为 785 元, 问两班各有多少名学生? (只列方程)

分析: 找出题中的等量关系为: 两班捐款总数为 785 元, 即: (1)班捐款总数 + (2)班捐款总数 = 785, 因此只要把两个班各自的捐款数分别表示出即可.

解: 设九年级(1)班有 x 人, 则九年级(2)班有 $(115-x)$ 人, 根据题意得

$$\left[\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}(115-x)\right] \times 10 + 5 \times \left[\left(1-\frac{1}{3}\right)x + \left(1-\frac{2}{5}\right)(115-x)\right] = 785.$$

点拨: 此题若再用算术法, 将会非常困难, 因此方程的思想较算术法更优越, 今后体会会更深.