

**Differential geometry
and Calculating geometry**

微分几何与计算几何

工科数学丛书

刘根洪 编著
何仁杰

四川大学出版社

微分几何与计算几何

刘根洪 编著
何仁杰

四川大学出版社

责任编辑:王泽彬
封面设计:晨光

图书在版编目(CIP)数据

微分几何与计算几何/刘根洪,何仁杰著. —成都:
四川大学出版社,2000.6

ISBN 7-5614-1921-X

I. 微... II. ①刘...②何... III. 微分几何②计
算几何 IV. 018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 31168 号

书名 微分几何与计算几何

作 者 刘根洪 何仁杰 主编
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段 24 号 (610065)
印 刷 南京东航印刷开发有限公司
发 行 四川大学出版社
开 本 850mm×1168mm 1/32
印 张 13.3 125
字 数 334 千字
版 次 2000 年 6 月第 1 版
印 次 2000 年 6 月第 1 次印刷
印 数 0 001~1 000 册
定 价 16.80 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科
联系。电话:5412526/5414115/
5412212 邮编:610064

◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回印刷厂调换。

版权所有◆侵权必究

前 言

计算几何是一门跨应用数学、计算机科学和工程科学的一门交叉性的新兴边缘学科。该课程是为培养高年级学生(包括硕士生)将来从事计算机辅助设计(CAD)、计算机辅助制造(CAM)以及计算机图形(CG)的教学、研究和应用的一门课。而微分几何则是计算几何的重要理论基础。

计算几何是研究几何外形的表示、造型、显示、分析和加工等的数学方法,在当今高科技的各个领域,从 CIMS 系统,地理信息管理到建筑设计,计算机动画片到电影广告制作,以及石油勘探,服装、鞋帽设计,飞行模拟训练系统,复合材料纤维缠绕的 CAD/CAM 等都跟计算几何密切相关。实际上,它已成功地应用于飞机、船舶、汽车和一般机械产品及部件的设计、医学图像的分析、图像的重建与识别、地层结构图的建立等。可以看出,在高科技产品占据主导地位的今天,在理工科院校有关专业的高年级学生中开设这门课程是十分必要的。

在理论上,“计算几何是一门新兴学科——由函数逼近论、微分几何、代数几何、计算数学特别是数控(NC)等形成的边缘学科”(苏步青)。在以上众多的理论中,微分几何是学习计算几何必不可少的理论基础,所以学习计算几何必须掌握一些微分几何的基础知识。编者考虑到微分几何目前尚未普遍列入工科院校的教学计划,为便于有关高等院校学生和工程技术人员能顺利阅读本书,特在第 1 章里用向量分析法介绍了学习计算几何所必需的经典微分几何基本理论知识,并在书末安排了两个附录,使本书有一个较完善的理论系统。

近三十多年来,随着近代工业科学技术的飞速发展,计算机作

为一种工具,在产品几何外形的设计与制造中发挥着重大的作用,计算几何也随之形成具有独特研究领域的一门新兴的学科,而且发展迅速.为使本书反映一些新的应用领域,编者尽力吸收近几年来各方面有关的研究成果,融合于书中,使本教材能赶上时代的步伐.

本书是编者在苏州大学数学系多年讲授微分几何和计算几何的基础上,编写了讲义,并经过多次修改和补充而编著成的.全书力求取材新颖,内容由浅入深,通俗易懂;突出微分几何与计算几何的基础知识和基本方法;注意理论联系实际,尽力从生产实践中引入概念或提出问题,在问题解决后,再举出它的实际应用,使学有所用.本书配备了数量较多的实例来帮助读者理解教材,其中有些题目不仅开拓了书中正文的内容,而且有一定的深度和广度.

编写这本教材,虽然主观上力求完善,但由于水平有限,难免有不妥之处,恳请读者提出批评和宝贵意见.

在本书的撰写和出版过程中,得到了苏州大学教务处领导、教材科的同志们及理学院数学系党政领导的大力支持;刘松涛博士对全书进行了详细的审阅,并提出不少宝贵意见;钱汉臣教授对本书也提出了有益的建议;出版社有关的同志为本书付出的辛勤劳动,在此谨表示衷心的感谢!

编者

1999年10月

目 录

第 1 章 曲线和曲面论的基础(微分几何初步)	
第 1 节 曲线和曲面的参数表示	1
第 2 节 向量函数	9
第 3 节 曲线的切线、弧长	18
第 4 节 伏雷内(Frenet)标架、曲率与挠率、Frenet 公式、 Cesaro 方程	24
第 5 节 平面曲线	38
第 6 节 平面曲线族的包络	48
第 7 节 平面曲线的渐缩线与渐伸线	53
第 8 节 曲面的定义	56
第 9 节 曲面的切平面和法线	59
第 10 节 曲面的度量性质	62
第 11 节 曲面的曲率	67
第 12 节 曲面论的基本公式、基本方程及基本定理	84
第 13 节 测地线	93
第 14 节 特殊曲面	102
第 2 章 圆锥曲线方法	
第 1 节 圆锥曲线命名的由来	116
第 2 节 圆锥曲线方程	120
第 3 节 圆锥曲线的展开曲线	122
第 4 节 圆锥曲线的计算	126
第 5 节 满足给定连续性和相切性要求的圆锥曲线计算	131
第 6 节 有理二次参数曲线	136
第 7 节 化圆锥曲线的一般方程为有理二次参数方程	138
第 3 章 等距曲线与等距曲面	
第 1 节 等距曲线的定义和方程	141
第 2 节 等距曲线的相对曲率	149
第 3 节 平面曲线的奇点、特征点	151

第4节	C_0 的弧长、 C 和 C_0 间的面积、闭等距曲线	160
第5节	空间曲线的等距曲线	164
第6节	等距曲面	167
第7节	曲面的交线、曲线与曲面的交点	174
第4章 插值与样条		
第1节	拉格朗日(Lagrange)插值法	179
第2节	差商与牛顿(Newton)插值法	182
第3节	埃尔米特(Hermite)插值	184
第4节	最小二乘法	187
第5节	插值三次样条函数	189
第6节	三次参数曲线段	207
第7节	三次参数样条曲线	215
第8节	一般的三次参数样条曲线	217
第9节	三次参数曲线的形状控制	221
第10节	函数样条	238
第11节	圆弧插值	259
第5章 贝齐尔(Bezier)曲线和 B 样条曲线		
第1节	贝齐尔(Bezier)曲线	275
第2节	B 样条曲线	309
第3节	均匀 B 样条曲线	313
第4节	三次 B 样条曲线的局部光顺	326
第6章 设计中常用的几种曲面		
第1节	张量积曲面	333
第2节	双三次样条函数	337
第3节	孔斯(Coons)曲面	341
第4节	戈登(Gordon)曲面	353
第5节	贝齐尔(Bezier)曲面	355
第6节	B 样条曲面	370
第7节	扫描曲面	372
附录一 向量代数		
附录二 卵形线与 Crofton 公式		
参考文献		
		385
		403
		413

第 1 章 曲线和曲面论的基础

(微分几何初步)

在客观世界中,存在着各种各样的曲线和曲面.例如,齿轮、凸轮、汽车、飞机、轮船等外形设计中所用的曲线和曲面.为了设计和制造这些外形复杂的产品,就必须掌握这些曲线和曲面的几何性质.因此,本章在向量运算的基础上,用向量方程来表示曲线和曲面,以微积分为工具,推导刻画空间曲线、平面曲线以及空间曲面在局部领域内几何性质的一些基本几何量.

第 1 节 曲线和曲面的参数表示

在微积分里,我们用显函数

$$y = f(x) \quad (1.1)$$

表示平面上的曲线.这种表示虽具有形式简单,便于计算等优点,但它有三个明显的缺点:第一,方程的形状关于 x, y 不对称;第二,在切线平行于 y 轴的点,导数 $\frac{dy}{dx}$ 变为无穷大;第三,不能表示闭曲线或多值曲线.另外一种表示平面曲线的方法是用形如

$$F(x, y) = 0 \quad (1.2)$$

的隐函数方程.它的优点是可以表示闭曲线和多值曲线,还可以判定一点 $P(x_0, y_0)$ 是否在曲线上.换句话说,将点 $P(x_0, y_0)$ 的坐标代入方程 $F(x, y) = 0$ 的左端后,由其值 $F(x_0, y_0)$ 是否小于、等于或大于零,就可判断该点是落在所表示的曲线的哪一侧还是恰在其上.

隐式方程与显式方程的一个共同的缺点是它们过份地依赖于坐标系的选择.这就是说:用一套坐标系,就会有一套函数的表示.

但是,曲线的几何性质并不依赖于坐标系的选择.为了克服这一缺陷,我们采用参数方程表示曲线和曲面.

在解析几何里,空间曲线上一点 P 的坐标分量被表示成某个参数 t 的数量函数:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) (t_1 < t < t_2).$$

把三个坐标分量合在一起,就组成了曲线上该点的位置向量.

$$\begin{aligned} P(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ &= \{x(t), y(t), z(t)\}, t_1 < t < t_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

称(1.3)式为关于参数 t 的向量方程.

类似地,曲面可表示成双参数 u 和 v 的向量方程:

$$\begin{aligned} P(u, v) &= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \\ &= \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}, (u, v) \in D \subset R^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

例 1 圆柱螺旋线(图 1-1).

当空间一质点绕 z 轴作等速旋转,并沿 z 轴方向作等速移动(即作螺旋运动)时,它所画成的轨迹就是圆柱螺旋线.为了写出它的向量方程,设 ω 为质点 P 绕 z 轴的旋转速度(常数), a 为圆柱的半径, v 为 P 点沿 z 轴的运动速度,则 P 从点 $P_0(a, 0, 0)$ 出发,经过时间 t 后的位置坐标分量 x, y, z 可表示成

$$\begin{cases} x(t) = a\cos\omega t, \\ y(t) = a\sin\omega t, \\ z(t) = vt, \\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

其向量方程是

$$P(t) = \{a\cos\omega t, a\sin\omega t, vt\},$$

或 $P(t) = \{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\} \quad (-\infty < \theta < +\infty),$

其中 $\theta = \omega t, b = \frac{v}{\omega}$ (螺旋常数).

例2 圆锥面螺旋线.

圆锥面上一动点绕轴线作螺旋运动时,其轨迹为圆锥面螺旋线(齿轮滚刀的铲背曲线),参考图1-2. 设锥面半顶角为 α ,螺旋常数为 b (即例1中的 $\frac{v}{w}$),则

$$\begin{aligned} P(\theta) &= OD + DP \\ &= b\theta \operatorname{tga} \{\cos\theta, \sin\theta, 0\} + \\ &\quad b\theta \{0, 0, 1\} \\ &= b\theta \{\operatorname{tga} \cdot \cos\theta, \operatorname{tga} \cdot \sin\theta, \\ &\quad 1\}. \end{aligned}$$

例3 圆锥对数螺线.

设 xOz 平面内的直线 $l: z \sin\alpha - x \cos\alpha = 0, y = 0$ 绕 z 轴作等角速度 w 均匀地旋转,动点 P 沿直线 l 运动,其速度与动点到原点的距离 $|OP|$ 成正比. 求此动点的轨迹方程.

解 仍如图1-2所示,设动点 $P(x, y, z)$ 在 xOy 上的射影为 D , $\angle(OD, i) = \theta = \omega t$, $|OP| = r$, 则

$$\begin{aligned} P(t) &= OD + DP \\ &= \{r \sin\alpha \cdot \cos\theta, r \sin\alpha \cdot \sin\theta, 0\} + \{0, 0, r \cos\alpha\} \\ &= r \{\sin\alpha \cdot \cos\omega t, \sin\alpha \cdot \sin\omega t, \cos\alpha\}. \end{aligned}$$

按题设,有关系:

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r (\lambda \text{ 为比例常数}),$$

积分得 $r = r_0 e^{\lambda t}$ (r_0 为 $t = 0$ 时的距离),

故 $P(t) = r_0 e^{\lambda t} \{\sin\alpha \cos\omega t, \sin\alpha \sin\omega t, \cos\alpha\},$

或 $P(\theta) = ce^{\beta\theta} \{\operatorname{tga} \cos\theta, \operatorname{tga} \sin\theta, 1\}, \quad (1.5)$

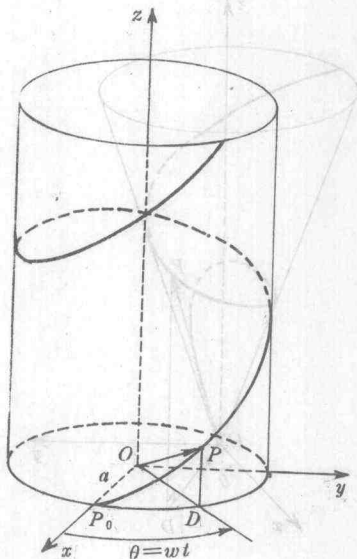


图 1-1

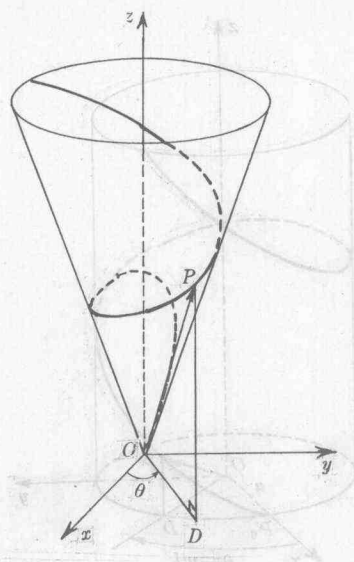


图 1-2

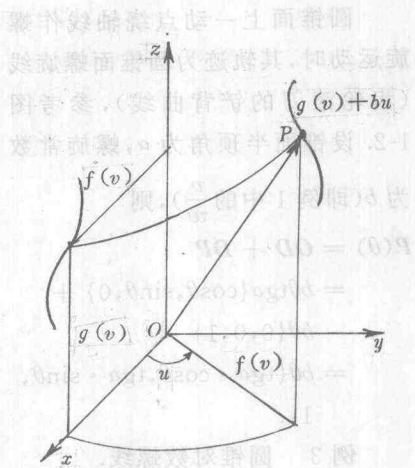


图 1-3

其中 $c = r_0 \cos \alpha$, $\beta = \frac{\lambda}{\omega}$.

称所得轨迹方程(1.5)式为圆锥对数螺线. 圆锥对数螺线用于无线电的天线设计.

例 4 螺旋曲面(图 1-3).

把平面 xOz 中的一条曲线

$$C: \begin{cases} x = f(v), \\ y = 0, \\ z = g(v), \quad v_1 < v < v_2 \end{cases}$$

(假定 $f(v) > 0$) 绕 z 轴旋转 u 角的同时还沿 z 轴上升距离 bu (b 是正常数), 这时曲线 C 运动的轨迹构成螺旋曲面. 它的方程是

$$P(u, v) = \{f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v) + bu\}, \quad (1.6)$$

其中 $0 < u < 2\pi$, $v_1 < v < v_2$.

在(1.6)式中,如果令 $b = 0$,且取曲线 C 分别为

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = 0, \\ z = a \sin \varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} x = R + a \cos \varphi, \\ y = 0, \\ z = a \sin \varphi (0 < a < R). \end{cases}$$

这时得到如图 1-4 所示的球面向量方程

$$\begin{aligned} P(\theta, \varphi) &= \{a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \sin \theta, a \sin \varphi\} \\ &\left(0 < \theta < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

和图 1-5 所示的环面向量方程

$$\begin{aligned} P(\theta, \varphi) &= \{(R + a \cos \varphi) \cos \theta, (R + a \cos \varphi) \sin \theta, a \sin \varphi\} \\ &(0 < \theta, \varphi < 2\pi). \end{aligned} \quad (1.8)$$

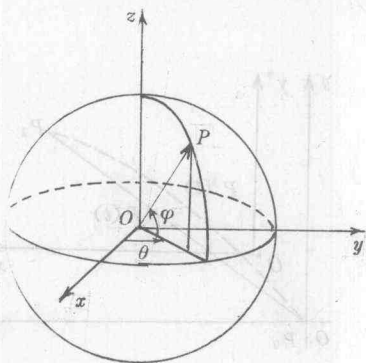


图 1-4

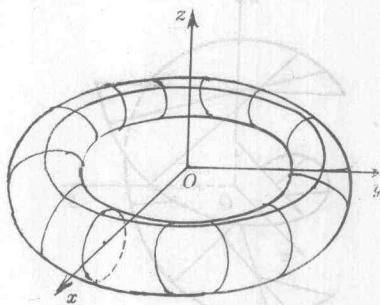


图 1-5

如果 b 为正常数,并取曲线 C 为

$$\begin{cases} x = u, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \text{ 则得如图 1-6 所示}$$

的正螺面方程

$$r(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, bv\} (-\infty < (u, v) < +\infty).$$

(1.9)

用参数方程描述的曲线和曲面具有以下优点.

(1) 具有几何不变性, 即曲线曲面的形状与坐标系的选择无关.

(2) 在多值的情况下, 便于规定曲线、曲面的延伸范围.

(3) 易于分段表示曲线、曲面.

(4) 易于进行几何变换, 如仿射变换、射影变换等.

(5) 易于计算出曲线、曲面上点的运动轨迹及获得其它信息.

(6) 容易处理曲线的斜率为 ∞ 的情形.

(7) 便于提供对曲线、曲面形状控制的较多自由度.

(8) 几何元素容易用向量形式和矩阵形式表示, 计算方便.

上述优点中, 最重要的是几何不变性. 所谓几何不变性是指曲线、曲面的形状不应随坐标系的旋转与平移变换而发生变化.

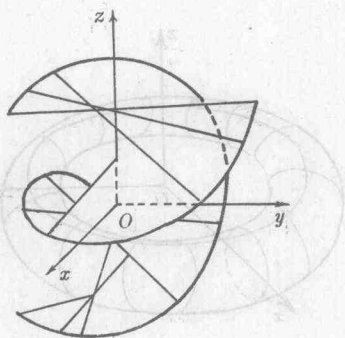


图 1-6

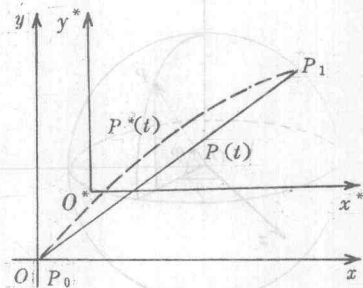


图 1-7

现考虑由图 1-7 所示的参数曲线

$$P(t) = \varphi_0(t)P_0 + \varphi_1(t)P_1 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (1.10)$$

(1.10) 式的矩阵表示式是

$$P(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t))(P_0, P_1)^T. \quad (6.4)$$

这里 $\varphi_0(t) = (1-t)^2$, $\varphi_1(t) = t^2$, $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (5, 5)$, $(P_0, P_1)^T$ 表示 (P_0, P_1) 的转置矩阵. 容易看出, 曲线 $P(t)$ 是连接两

点 P_0 和 P_1 的直线段. 引进坐标变换

$$\begin{cases} x = x^* + 1, \\ y = y^* + 2. \end{cases}$$

此时, 点 P_0 和 P_1 在新坐标系里的坐标分别为

$$P_0^* = (-1, -2), P_1^* = (4, 3).$$

如果 $P^*(t) = \varphi_0(t)P_0^* + \varphi_1(t)P_1^* = ((1-t)^2, t^2)(P_0^*, P_1^*)^T$, 上式却表示了一条抛物线, 而不再是直线段. 由此看出 (1.10) 式不具有形状不变性的条件.

下面我们寻求曲线经坐标变换后保持形状不变性所需满足的条件.

设原曲线的参数表示式为

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t)P_i \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (1.11)$$

矩阵表示式为

$$P(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) (P_0, P_1, \dots, P_n)^T,$$

其中, $\varphi_i(t)$ 为参数 t 的多项式函数(基函数), P_i 为定义该曲线的位置向量 ($i = 0, 1, \dots, n$). 先考虑旋转变换:

设 A 为旋转变换矩阵, P_i^* 为 P_i 经旋转变换后的位置向量 ($i = 0, 1, \dots, n$), 它们的变换关系是

$$P_i^* = P_i A \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

这时有

$$\begin{aligned} P_i^*(t) &= \sum_{i=0}^n \varphi_i(t)P_i^* \\ &= (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) (P_0 A, P_1 A, \dots, P_n A)^T \\ &= (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) (P_0, P_1, \dots, P_n)^T A \\ &= P(t)A \quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

由此可见, 在旋转变换下曲线的形状仍保持不变性.

下面, 考虑平移变换.

设平移向量为 C , P_i^* 为 P_i 经平移变换后的位置向量, 它们的变换关系分别是

$$P_i^* = P_i + C \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

这时有

$$P^*(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))(P_0^*, P_1^*, \dots, P_n^*)^T$$

$$= (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))(P_0 + C, P_1 + C, \dots, P_n + C)^T$$

$$= P(t) + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) \right) C.$$

为保证(1.11)式经平移变换后保持形状的不变性, 应满足柯西(cauchg)条件:

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) \equiv 1.$$

满足柯西条件的一组基函数称它为规范基, 否则就称它为非规范基. 曲线的参数方程用规范基来表示时就具有几何不变性, 用非规范基来表示就不具几何不变性. 对于曲面有类似的规范基与非规范基概念, 这里就不详述了.

习 题 1

1. 把下列平面曲线的参数方程化为隐函数方程, 并说明是什么曲线.

(1) $p(t) = \{t + 1, 2t^2 - t + 1\}$; (2) $r(t) = \left\{ \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2bt}{1+t^2} \right\}$.

2. 写出下列空间曲线的一种参数方程.

(1) 圆柱面与平面的截线: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

(2) 圆柱面与球面的截线: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

(3) 圆环面与平面的截线: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - a^2 = 2R \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x = R - a; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - a^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin\alpha(x - l) + z\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

3. 证明:

(1) $r(t) = \{acht, bsh t\} (-\infty < t < +\infty)$ 表示一条双曲线, 式中

$$\operatorname{cht} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \operatorname{sh}t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

代表双曲函数.

$$(2) r(t) = \left\{ \frac{t}{1+t^2+t^4}, \frac{t^2}{1+t^2+t^4}, \frac{t^3}{1+t^2+t^4} \right\} (-\infty < t < +\infty)$$

表示一条球面曲线. 求它所在的球面方程.

4. 已知大圆半径为 b , 小圆半径为 a , 设大圆不动, 而小圆在大圆外(或内)无滑动地滚动, 动圆周上某一点 P 的轨迹叫做外(或内)旋轮线. 求外(或内)旋轮线的方程.

注: 外(或内)旋轮线又称外(或内)摆线. 特别地, 当 $b \rightarrow +\infty$ 时, 可得到摆线方程 $r(\theta) = a\{\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta\}$.

5. 设半径分别为 r_1 和 r_2 的圆柱体的轴线为相互垂直的异面直线, 它们之间的距离为 d . 求两圆柱交线的参数方程.

6. 设半径为 a 的圆柱体的轴线 l 与空间直线 l_1 为一对异面直线, 它们之间的夹角为 α , 距离为 d , 过轴线 l 上的任意一点 M 作垂直于 l 的平面 π 交 l_1 于 N :

(1) 求动直线 MN 与圆柱体的交点所形成的曲线 C 的方程;

(2) 求曲线 C 绕直线 l_1 旋转所得到的曲面 S (此曲面为圆钢矫直机的辊子曲面).

7. 已知圆柱面的底圆半径为 R , 圆半径为 r 的圆

$$C: r(\varphi) = \{(R + r\cos\varphi, R + r\sin\varphi, 0) \mid (r < R)\}.$$

求圆 C 所在平面平行于 xOy 平面, 圆心在圆柱螺线上运动所形成的端面圆弧螺旋面方程.

第 2 节 向量函数

如果一个向量 r 的三个坐标分量都是 t 的函数, 即

$$r = (x(t), y(t), z(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2),$$

则称它为一元向量函数(简称向量函数),记作 $r(t)$. 特别地,当 $r(t)$ 与 t 无关时,称它为常向量.

2.1 向量函数的极限

设向量函数 $r = r(t)$ 在 t_0 附近有定义, r_0 为常向量. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时, 有 $|r(t) - r_0| < \varepsilon$, 则称当 $t \rightarrow t_0$ 时, $r(t)$ 趋于极限 r_0 , 记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r_0.$$

定理 设 $r = r(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, 则

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \\ \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

证 必要性: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时, 有

$$|r(t) - r_0| < \varepsilon,$$

即 $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \varepsilon,$

由此可得 $|x(t) - x_0| < \varepsilon, |y(t) - y_0| < \varepsilon, |z(t) - z_0| < \varepsilon.$

充分性: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i > 0$, 当 $0 < |t - t_0| < \delta_i (i = 1, 2, 3)$ 时,

有 $|x(t) - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, |y(t) - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, |z(t) - z_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, 更有

$$|x(t) - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, |y(t) - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, |z(t) - z_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

故 $|r(t) - r_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}$
 $\leq |x(t) - x_0| + |y(t) - y_0| + |z(t) - z_0| < \varepsilon,$

即 $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r_0.$

此定理表明向量函数的极限可归结为坐标函数的极限.