

做对的事比
做对的事更重要，
而是重质完成

首席教师

专题小课本

- 小方法大智慧
- 小技巧大成效
- 小单元大提升
- 小课本大讲坛

初中数学

整式与分式

总主编/钟山



中国出版集团 现代教育出版社

海阔凭鱼跃

图书在版编目(CIP)数据

首席教师专题小课本. 初中数学. 整式与分式 / 钟山
主编. —北京: 现代教育出版社, 2008. 4
ISBN 978-7-80196-643-8

I. 首… II. 钟… III. 数学课—初中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 038475 号

书 名: 首席教师专题小课本·初中数学—整式与分式
出版发行: 现代教育出版社
地 址: 北京市朝阳区安华里 504 号 E 座
邮政编码: 100011
印 刷: 北京市梦宇印务有限公司印刷
发行热线: 010-61743009
开 本: 890×1240 1/32
印 张: 6
字 数: 260 千字
印 次: 2008 年 4 月第 1 版 第 1 次印刷
书 号: ISBN 978-7-80196-643-8
定 价: 10.80 元



目 录

首席寄语	(1)
单元提升篇	(2)
第一章 代数式	(2)
第一单元 列代数式	(2)
第二单元 求代数式的值	(11)
章末综合提升	(19)
方法·技巧·策略	
巧用概念,识别代数式(3)/弄清关系,列代数式(3)/直接代入求值法(12)/整体代入求值法(13)/用字母表示数的思想方法(19)/整体代入的思想方法(20)	
第二章 整 式	(27)
第一单元 整 式	(27)
第二单元 整式的加减	(35)
第三单元 幂的运算	(46)
第四单元 整式的乘法	(57)
第五单元 乘法公式	(66)
第六单元 整式的除法	(75)
第七单元 因式分解的方法(一)——提公因式法	(83)
第八单元 因式分解的方法(二)——运用公式法	(90)
第九单元 因式分解的方法(三)——分组分解法与 $x^2 + (a+b)x + ab$ 型的分解法	(100)
章末综合提升	(108)
方法·技巧·策略	
理解概念,巧作判断(29)/注意符号,变形多项式(31)/巧用概念,识别同类项(37)/括号若改变:负变正不变(38)/整式加减的实质:合并同类项(38)/巧化简再求值(40)/巧作恒等变形,转化为同底数幂(47)/根据题目特点,巧妙解决幂的乘方运算(48)/巧妙变形,简化计算(49)/巧用法则,合理变形(50)/巧用法则,计算单项式乘法(58)/巧用转化,解决单项式与多项式的乘法(59)/理解法则,合理运用(60)/巧用平方差公式,化简、计算(67)/完全平方公式中的“整体思想”(68)/应用公式变形,整体求值(69)/按步骤,细心计算(75)/巧用转化,谨防漏项(76)/综合运用所学法则,解决整式混合运算(77)/利用概念,判断变形是否为因式分解(84)/理解概念,巧找公因式(84)/提公因式,分解多项式(85)/巧用分解因式,简化计算(86)/巧用平方差,分解多项式(92)/巧用完全平方公式,分解多项式(93)/综合运用公式,分解多项式(93)/分组后能用提公因式法分解因式(101)/分组后运用公式法分解因式(102)/对二次三项式 $x^2 + (a+b)x + ab$ 的分解(103)/幂的运算(108)/乘、除法的运算(110)/公式的运用(111)/因式分解(112)	

第三章 分式	(120)
第一单元 分式的有关概念	(120)
第二单元 分式的基本性质	(128)
第三单元 分式的运算与求值	(141)
章末综合提升	(155)

方法·技巧·策略

理解概念,巧作判断(121)/分类归纳,善于总结(121)/活用性质、注意符号(129)/类比分
数、化简分式(132)/类比分式乘除,学好分式乘除(142)/学好分式加减法,通分是关键(144)/
理清运算顺序,灵活进行分式混合运算(145)/学好分式运算,重在实际应用(147)/分式有意义
及分式值为零的条件(156)/分式运算中的常用技巧(156)/分式求值中的常用技巧(158)

专题提升篇	(165)
-------------	-------

第一单元 专题思想方法	(165)
-------------------	-------

方法·技巧·策略

用字母表示数的数学思想(165)/概括、归纳的数学思想(166)/转化思想与逆向思维(168)/
数形结合的思想(172)/整体思想(173)

第二单元 专题中考热点	(179)
-------------------	-------

方法·技巧·策略

列代数式新题型——规律探究题(179)/代数式及代数式的求值问题(181)/整式的运算与
求值(182)/因式分解及应用(183)/分式的运算(184)



首席寄语

■专题导引

一个两位数,我们如果知道十位数字和个位数字分别是7、8,我们能立刻说出这个数是78;如果知道十位数字和个位数字分别是 a 、 b ,你会表示这个两位数吗?要想知道答案,请跟我们一起来学习代数式吧!



本专题要学习的整式与分式统称代数式.其中整式包括整式的加减、乘

除运算及因式分解,而因式分解与整式乘法是两个互逆的变换,在这两个变形中,乘法公式的应用最为广泛.分式包括分式的定义、分式的基本性质以及分式的运算,分式运算的实质是通分与约分的过程,其中分式的基本性质是分式运算的依据.本部分内容既是对数的概括与抽象,又是学习方程、不等式和函数的基础,用字母代替数、用整式与分式代替具体的数学算式,并能按运算顺序进行运算,是本专题的核心内容.

■中考命题规律

虽然教材对整式的运算、分式的运算要求不是很高,但在中考中,整式的计算与化简(包括因式分解)、分式的运算仍是考查重点.其中幂的运算性质多以同底数幂的乘除、幂的乘方、积的乘方及分式的乘方综合考查.分式的化简与计算是必考内容,另外还有因式分解、列代数式等也是必考内容,题目多以填空、选择或解答的形式出现.

■学习应试策略

1. 在书写代数式时,要注意代数式的书写要求,规范书写.
2. 在幂的运算中,要分清同底数幂的乘除法、幂的乘方、积的乘方等运算法则.
3. 在进行整式加减的学习中,关键要理解何为同类项及同类项的合并法则.
4. 要理解分式的基本性质,掌握通分与约分的方法,才能熟练地进行分式的四则运算.
5. 分式的化简求值要注意步骤条理、清晰、完整,化简后再代入求值.
6. 因式分解的学习不宜过难,但基本的方法应该掌握,乘法公式在因式分解中应用广泛,因此乘法公式要牢固掌握并灵活运用.

[单元提升篇]

第一章 代数式



课程标准要求

1. 理解用字母表示数的意义及一些简单代数式的实际背景或几何意义.
2. 能分析简单问题的数量关系,并用代数式表示.
3. 能按代数式要求的运算顺序,求代数式的值.

第一单元

列代数式

知识清单精解

考点1 代数式的有关概念

用运算符号把数和表示数的字母连接而成的式子叫做代数式,单独的一个数或一个字母也是代数式.

注意:代数式中含有加、减、乘、除、乘方等运算符号,不含有等号或不等号.

考点2 怎样列代数式

把实际问题中与数量有关的词语用代数式表示出来,就是列代数式.列代数式的关键是抽象出实际问题中的数量关系.

(1)要认真审题,仔细分析问题中基本术语的含义.例如:和、差、积、商;大、小、多、少;几倍、几分之几;增加、增加到、减少、减少到;扩大、缩小;除、除以等等.

(2)要注意题目的语言叙述所直接或间接表示的运算顺序,一般在列代数式时,是先读后写.如 a 表示甲数, b 表示乙数,用代数式表示:①甲、乙两数的平方和,“平方和”是指先平方,后求和,即 $a^2 + b^2$;②甲、乙两数的和的平方,“和的平方”是指先求和,后平方,即 $(a+b)^2$.

(3)要弄清题中的数量关系的运算顺序,注意正确使用表明运算顺序的括号.

(4)列代数式时,应注意代数式书写格式的规定.

(5)在同一问题中,不同的数量,必须用不同的字母来表示.如甲、乙两数的和减去甲、乙两数的积.在这个问题中,甲数和乙数必须用不同的字母来表示,即甲数用 a 表示,乙数不能再用 a 表示.

考点3 代数式的书写格式

(1)在代数式中出现的乘号,通常简写作“ $\cdot$ ”或者省略不写,如 $a \times b$ 应写成 $a \cdot b$ 或 ab .

(2)数字与字母相乘时,数字应写在字母前面,乘号写作“ $\cdot$ ”或省略不写.如 $x \times 3$ 应写作 $3 \cdot x$ 或 $3x$.

(3)带分数与字母相乘时,应先把带分数化成假分数后再与字母相乘.如 $x \times 3\frac{1}{2}$ 应写作 $\frac{7}{2} \cdot x$ 或 $\frac{7}{2}x$.

(4)数字与数字相乘,一般仍用“ $\times$ ”号,通常不用“ $\cdot$ ”,也不能省略不写.

(5)在代数式中出现除法运算时,一般按照分数的写法来写,被除数作分子,除数作分母,“ $\div$ ”号转化为分数线.如 $4 \div x$ 应写作 $\frac{4}{x}$.

(6)在一些实际问题中,表示某一数量的代数式往往是有单位名称的,如果代数式是积或商的形式,就将单位名称写在式子的后面即可;如果代数式是和或差的形式,则必须把代数式用括号括起来,再将单位名称写在式子的后面,如 $(a+b)$ 厘米.



技巧1 巧用概念,识别代数式

代数式是用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子,这种式子是不含等号或不等号的;另外单独一个数或字母也是代数式.

例1 指出下列各式中哪些是代数式,哪些不是代数式.

$$(1)3x-2; (2)x=0; (3)\pi; (4)2>1; (5)s=vt; (6)\frac{1}{2}.$$

分析: (2)(5)含有等号,是等式; (4)含有不等号,是不等式; 故(2)(4)(5)都不是代数式.

解: (1)(3)(6)都是代数式,其余不是.

方法技巧总结: 判断是否是代数式,关键是了解代数式的概念,注意代数式与等式、不等式的区别:等式含有等号,不等式含有不等号,而代数式不含等号,也不含不等号.

技巧2 弄清关系,列代数式

列代数式的关键是理清题目中表示的运算关系,分清运算顺序.

例 2 用代数式表示:

- (1) 比 x 的 3 倍少 1 的数;
- (2) 比 a 的平方多 2 的数;
- (3) x 的 20% 与 y 的平方的和;
- (4) m 除以 m 与 n 的差.

解: (1) $3x-1$; (2) a^2+2 ; (3) $20\%x+y^2$; (4) $\frac{m}{m-n}$.

方法技巧总结: 列代数式的关键是正确分析和、差、积、商、倍、分、大、小、多、少等数学概念和有关知识. 如: “除”与“除以”是两个不同的概念, 句子中都会出现“的”字, 可抓住“的”字, 分清句子的层次, 逐层分析, 弄清题目中的数量关系的运算顺序, 并正确使用括号.



抽象概括能力

能力点拨: 在给出一定的条件(可以是有规律的算式、图形或图表), 然后根据要求认真分析, 仔细观察, 大胆猜想, 概括得出结论, 并有加以验证的能力.

本讲的命题方向注重考查列代数式, 多以规律探究性问题为主, 有的配以图示, 解决这类问题时, 要注意细心观察, 认真总结规律并加以验证所得结论的正确性.

考例 1 (2007·潍坊) 观察下列等式:

$$\begin{aligned} 16-1 &= 15; \\ 25-4 &= 21; \\ 36-9 &= 27; \\ 49-16 &= 33; \\ \dots \end{aligned}$$

用自然数 n (其中 $n \geq 1$) 表示上面一系列等式所反映出来的规律是: _____.

解析: 从一系列等式的左边看, 都为两完全平方数的差的形式: ① 4^2-1^2 , ② 5^2-2^2 , ③ 6^2-3^2 , ④ 7^2-4^2 , 且前一个底数比后一个均大 3, 因此左边可用代数式表示为 $(n+3)^2-n^2$; 右边①式可写成 3×5 , ②式可写成 3×7 , ③式可写成 3×9 , 因此右边可用代数式表示为 $3(n+3+n)$, 即 $3(2n+3)$. 可得出规律: $(n+3)^2-n^2=3(2n+3)$ ($n \geq 1$).

答案: $(n+3)^2-n^2=3(2n+3)$

方法技巧总结: 解决此题的关键是观察各式, 总结规律.

考例 2 图 1-1-1 由火柴棒排出一列图形中, 第 n 个图形由 n 个正方形组成:

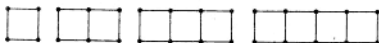


图 1-1-1

通过观察你可以发现: 第 4 个图形中, 火柴棒有 _____ 根, 第 n 个图形中, 火柴

棒有_____根.

解析:我们可以从第一个图形开始把 n (表示第 n 个图形)与火柴棒的根数对应列出:

n	火柴数
$n=1$	$4=4+(1-1)\times 3$
$n=2$	$7=4+(2-1)\times 3$
$n=3$	$10=4+(3-1)\times 3$
$n=4$	$13=4+(4-1)\times 3$
.....	

第 n 个图形时,火柴数应为 $4+3(n-1)$.

答案: $13; 4+3(n-1)$

方法技巧总结:根据已知条件,把对应的数据列出来,发现规律是关键,每增加一个正方形,实际增加了3根火柴棒.



1. 考点导航

考点	考点要求
代数式的概念	理解代数式的概念,会识别式子是否为代数式.
列代数式	①能用字母表示数,按要求或运算顺序写成用代数式表示的形式. ②掌握代数式的书写要求,按格式书写.

2. 规律点津

从近几年的中考看,本讲内容在中考中常以填空或选择形式出现,考查内容以列代数式为主,考题也由简单的列代数式逐渐向规律探究性问题过渡,既考查了本单元知识,又考查了学生的抽象概括能力.

例 ① (2003·宁夏)买单价为 a 元的体温计 n 个,付出 b 元,应找回的钱数是_____.

答案: $(b-an)$ 元

例 ② (2005·重庆)如图1-1-2,在图(1)中,互不重叠的三角形共有4个,在图(2)中,互不重叠的三角形共有7个,在图(3)中,互不重叠的三角形共有10个,……,则在第 n 个图形中,互不重叠的三角形共有_____个(用含 n 的代数式表示).

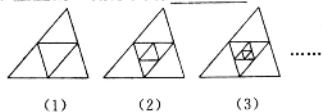


图 1-1-2

【例】图(1)中互不重叠的三角形个数为4;图(2)中互不重叠的三角形个数为7
 $=4+3\times 1$;图(3)中互不重叠的三角形个数为 $10=4+6=4+3\times 2$;可以看出自图
 (2)开始后面的图中互不重叠的三角形的个数等于图(1)中互不重叠的三角形个数+
 $3\times(\text{图号}-1)$ 个,即第 n 个图中互不重叠的三角形共有 $[4+3(n-1)]$ 个 $= (3n+1)$
 个,故得答案 $3n+1$. 答案: $3n+1$

【例3】(2006·哈尔滨)某商场四月份的营业额为 a 万元,五月份的营业额为
 $1.2a$ 万元,如果按照相同的月增长率计算,该商场六月份的营业额为_____万元.

解析:由题意可知五月份比四月份增长了 $0.2a$ 万元, $\frac{0.2a}{a}=20\%$,因此增长率为
 20% ,故六月份的营业额为: $a(1+20\%)^2$ 或 $1.2a(1+20\%)$,化简可得 $1.44a$.

答案: $1.44a$

【例4】(2007·烟台)观察下列各式: $\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$,
 $\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$,……请你将发现的规律用含自然数 $n(n\geq 1)$ 的等式表示出来:

解析:比较等式的左边及右边,易发现规律为 $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

答案: $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$

规律总结:从以上考题可见,对列代数式的考查以规律探究性问题较多,或与一
 元二次方程相联系综合考查.解决这类问题的关键是认真观察总结,并对结论做验
 证,确认其正确性.

3. 策略技巧

解决本讲考题的关键是掌握代数式的书写方法,理清题目中的数量关系,探求题
 目隐含的规律,然后写成代数式表示的形式.

【例5】A、B两地之间的公路全长为100千米,某人从A地到B地每小时走 x
 千米,用代数式表示:

- (1)某人从A地到B地需要走多少小时?
- (2)如果每小时多走4千米,某人从A地到B地需要走多少小时?
- (3)速度变化后,某人从A地到B地比原来少用多少小时?

分析:根据路程=速度 $\times$ 时间,灵活变形可知,(1) $\frac{100}{x}$;(2) $\frac{100}{x+4}$;(3) $\frac{100}{x}-\frac{100}{x+4}$.

解:(1)某人从A地到B地需要走 $\frac{100}{x}$ 小时;

(2)如果每小时多走4千米,需要走 $\frac{100}{x+4}$ 小时;

(3)速度变化后,比原来少用 $(\frac{100}{x}-\frac{100}{x+4})$ 小时.

方法技巧总结:应用问题要写单位,特别是当列出的代数式是和或差的形式时,要把代数式用括号括起来后再写单位.

例 6 (2007·威海)观察下列等式: $39 \times 41 = 40^2 - 1^2$; $48 \times 52 = 50^2 - 2^2$; $56 \times 64 = 60^2 - 4^2$; $65 \times 75 = 70^2 - 5^2$; $83 \times 97 = 90^2 - 7^2$;请你把发现的规律用字母表示出来: $m \cdot n =$ _____.

解析:从所给的式子可以看出:右边都是平方差的形式,①式中 $40 = \frac{39+41}{2}$; $1 = \frac{41-39}{2}$; ②式中 $50 = \frac{48+52}{2}$, $2 = \frac{52-48}{2}$. 以下规律相同,故右边可写成 $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-m}{2}\right)^2$. **答案:** $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-m}{2}\right)^2$

方法技巧总结:从所给式子中发现规律,再按规律写成代数式的形式.

题组优化训练

■ 误区突破题组

误区一 等式或不等式不能混淆为代数式

1. 在① $-3x+y$, ② 0 , ③ $x-1>3$, ④ m 中属于代数式的有()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 以下各式不是代数式的是()

- A. 0 B. $3x^2+2x-y$ C. $a+b=b+c$ D. $\frac{1}{x+y}+2$

误区二 乘除法时代数式的书写易错

3. (2007·中考模拟)下列代数式书写规范的有()

- ① $(a+b)h \div 2$; ② $1\frac{1}{2}x$; ③ $a2$; ④ $6 \times a$; ⑤ $-\frac{n}{m}$; ⑥ $3a - \frac{4}{b}$.

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

4. 下列说法正确的是()

- A. x 的 $1\frac{1}{2}$ 倍列代数式表示是 $1\frac{1}{2}x$ 或 $x \cdot 1\frac{1}{2}$

- B. $a + \frac{c}{b}$ 与 $\frac{c}{a+b}$ 的读法都是 a 加 b 分之 c

- C. 5 不是代数式

- D. $x \neq b$ 不是代数式

■ 综合创新题组

综合一 代数式的意义

5. 下列说法不正确的是()

- A. $3a+8$ 的意义是 $3a$ 与 8 的和

- B. $4(m+3)$ 的意义是 4 与 $m+3$ 的积

- C. a^2-2b 的意义是 a 的平方与 b 的差的 2 倍

- D. a^2+b^2 的意义是 a 与 b 的平方和

6. 下列说法中, 错误的是()

- A. 代数式 $x^2 + y^2$ 的意义是 x 与 y 的平方和
 B. 代数式 $5(x+y)$ 的意义是 5 与 $x+y$ 的积
 C. x 的 5 倍与 y 的和的一半, 用代数式表示是 $5x + \frac{y}{2}$
 D. x 的 $\frac{1}{2}$ 与 y 的 $\frac{1}{3}$ 的差, 用代数式表示是 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$

综合二 列代数式

7. 设某数为 x , 则比某数大 20% 的数用代数式表示为()

- A. $x - 20\%$ B. $20\%x$ C. $(1 + 20\%)x$ D. $120x$

8. 有一个两位数, 十位数字是 x , 个位数字是 y , 如将它们交换位置, 得到的新数是()

- A. xy B. $10x + y$ C. yx D. $10y + x$

9. 有一项工程甲单独做 x 天完成, 乙单独做 y 天完成, 两人合作 4 天后, 还剩下()工程没有完成.

- A. $\frac{4}{x} + \frac{4}{y}$ B. $1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{y}$ C. $1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{y}$ D. $1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

10. 某音像商店出租光盘, 每张光盘在出租后前两天收租金 0.8 元, 以后每天收租金 0.5 元, 那么一张光盘出租 n 天 (n 是大于 2 的整数), 应收租金_____元.

11. 三个连续奇数, 中间一个是 n , 其余两个分别是_____, _____, 这三个奇数的倒数的和是_____.

创新 列代数式的应用

12. (2006·十堰) 用火柴棒按如图 1-1-3 中的方式搭图形, 按照这种方式搭下去, 搭第 n 个图形需_____根火柴棒.



图 1-1-3

13. (2006·济宁市) 结合生活中的实例, $(1 - 15\%)x$ 可以解释为_____.

14. (1) 如图 1-1-4(1) 所示, 是日历中任意圈出的一竖列上相邻的三个数, 设中间的一个数为 a , 则这三个数的和为_____. (用含 a 的代数式表示)

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

(1)

日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

(2)

图 1-1-4

(2)如图 1-1-4(2)所示,是 2007 年 5 月份的日历,用一个矩形在日历中任意圈出

4 个数 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 请用一个等式表示 a, b, c, d 之间的关系.

15. 某城市为了加强公民的节水意识,制定了以下用水标准:每户每月用水未超过 7 立方米时,每立方米收费 1.00 元和 0.20 元的城市污水处理费;超过 7 立方米的部分每立方米收费 1.50 元和 0.40 元的城市污水处理费.某户月用水量为 x 立方米,问这个月水费是多少元?



题组答案详解

1. C 点拨:①②④三个属代数式,③含不等号,不是代数式.
2. C 点拨:C 选项中含有等号,是等式,不是代数式,它的左右两边是代数式.

题组规律

判断一个式子是否是代数式,要严格按概念判断,即用运算符号把数与字母或字母与字母连结起来的式子是代数式,单独一个数或一个字母也是代数式.

3. B 点拨:只有⑤⑥两个正确.

点拨:①不规范,“÷”应改为用分数线,即 $\frac{1}{2}(a+b)h$;②不规范,带分数应化为假分数,即 $\frac{3}{2}x$;③不规范,数与字母相乘,数应写在字母的前面,即 $2a$;④不规范,数与字母相乘,乘号省略不写.

4. D 点拨:A. 代数式书写不规范,应为 $\frac{3}{2}x$. B. $a + \frac{c}{b}$ 的读法为 a 与 c 除以 b 商的和, $\frac{c}{a+b}$ 的读法为 c 除以 a 与 b 和的商;C. 5 应该是代数式.

题组规律

书写代数式时要注意代数式的书写要求,见知识清单考点 3.

5. C 点拨: $a^2 - 2b$ 的意义是 a 的平方与 b 的 2 倍的差.
6. C 点拨: x 的 5 倍与 y 的和的一半,用代数式表示应为: $\frac{5x+y}{2}$,而 $5x + \frac{y}{2}$ 表示 x 的 5 倍与 y 的一半的和.

题组规律

对于代数式的意义,关键是要理清各数量之间的运算顺序.

7. C 点拨:A. $x - 20\%$ 表示比 x 小 20%,故 A 错;B. $20\%x$ 表示 x 的 20%;C. $(1 + 20\%)x$ 是 $x + 20\%x$ 的简写,是 x 与 x 的 20% 的和,故 C 正确;D. $120x$ 是 x

的120倍,故D错.

点拨:本题的关键是搞清20%指的是 x 的20%.

8. D 点拨:十位数字为 y ,即有 y 个10,个位数字为 x ,则此数为 $10y+x$.

9. C 点拨:把工作总量看做单位“1”,甲单独做 x 天完成,每天完成 $\frac{1}{x}$,乙单独做

y 天完成,每天完成 $\frac{1}{y}$,甲、乙四天共完成 $\frac{4}{x} + \frac{4}{y}$,还剩 $1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{y}$ 没完成.

10. $0.8+0.5(n-2)(n>2)$ 点拨:出租 n 天后的租金应是前2天的0.8元加上以后 $(n-2)$ 天的租金 $(n-2) \times 0.5$ 元,故应收租金 $[0.8+0.5(n-2)]$ 元.

11. $n-2, n+2, \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}$

点拨:每相邻两个奇数之间相差2,互为倒数的乘积为1.

题组规律

列代数式时,首先要弄清题目中所给数量关系,再按要求用运算符号连结;其次还要注意所列代数式必须符合代数式的书写要求.

12. $6n+6$ 点拨:第①图为12根,②图在①图的基础上加6根,③图在②图的基础上加6根,因此①图中, $12=12+6 \times 0$,②图中 $18=12+6 \times 1$,③图 $24=12+6 \times 2, \dots$,故第 n 个为: $12+6(n-1)$,即 $6n+6$.

13. 2005年全国浪费水资源为 x ,2006年减少了15%,则2006年全国浪费水资源为 $(1-15\%)x$.

点拨:本题为开放题,答案不唯一,可有其他解释.

14. (1) $3a$ 点拨:由表中圈出的三个数可发现依次大7,设中间一个是 a ,则另两个为 $a-7$ 与 $a+7$,故它们的和为 $3a$.

(2) $a+d=b+c$.

15. 解:当 $x \leq 7$ 时, $x+0.20x=1.2x$ (元);当 $x > 7$ 时, $(1+0.20) \times 7 + 1.5(x-7) + 0.4(x-7) = (1.9x-4.9)$ 元.

题组规律

这类列代数式题,难度稍大,在列代数式的过程中,需探究其中规律,而这类问题也是中考的重要考点,解决这类问题的关键是认真观察总结及仔细分析各数量关系,理清题意.

附录

用字母表示数的意义

(1)在某地,人们发现某种蟋蟀叫的次数与温度之间有如下近似关系,记录蟋蟀每分钟叫的次数,用这个次数除以7,然后再加上3,就得到当时的温度.温度($^{\circ}\text{C}$)

与蟋蟀每分钟叫的次数之间的关系是:温度=蟋蟀每分钟叫的次数 $\div 7+3$,用字母表示这一关系为: $t=\frac{a}{7}+3$.其中 t 表示温度, a 表示蟋蟀每分钟叫的次数.

(2)观察图形 1-1-5 并填表:

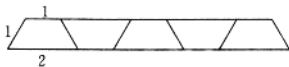


图 1-1-5

梯形的个数	1	2	3	4	5	6	...	n
周长	5	8	11	14				

从图 1-1-5 可得:当个数为 5 时,周长为 17,当个数为 6 时,周长为 20.

2 个梯形时,周长为 $5+(4-1)$;

3 个梯形时,周长为 $5+(4-1)+(4-1)$;

4 个梯形时,周长为 $5+(4-1)+(4-1)+(4-1)$;

...

当 n 个梯形时,周长为 $5+3(n-1)=5+3n-3=3n+2$.

通过解答以上两个问题,我们可以发现用字母表示数,能揭示存在于一类问题中的共性和普遍性,使人们清楚地认识数量之间的关系.用字母表示数不仅为数学表示和交流提供有效的途径,而且为解决问题提供了重要的工具.如果我们能用字母表示,那也是我们在数学的道路上的一次大的飞跃,努力吧!

第二单元

求代数式的值



考点 1 代数式的值的概念

用数值代替代数式中的字母,按照代数式的运算符号,计算出的结果就是代数式的值.

注意:(1)代数式中的字母在取值时必须保证使取值后的代数式有意义,如在代数式 $\frac{5}{a+3}$ 中,字母 a 不能取 -3 ,因为当 $a=-3$ 时,代数式中的分母为零,没有意义.另外必须保证在取值后字母自身所表示的数量关系有意义,如在某一问题中说某班有 a 人,则 a 只能取正整数.

(2)随着字母取值的不同,代数式的值可能不同,但只要字母的值确定且使代数

式有意义,则代数式的值也确定.

考点2 代数式求值的方法步骤

第一步:用数值代替代数式里的字母,简称为“代入”.

第二步:按照代数式指明的运算顺序计算出结果,简称“计算”.

求代数式的值常用的方法有直接代入法与整体代入法.

说明:(1)代入时,按已知给定的数值,将相应的字母换成数字,其他的运算符号与原来的数字都不能改变.

(2)由于代数式的值是由所含字母的值确定的,所以求代数式的值要注意书写格式,在代入前必须写出“当……时”,表示这个代数式的值是在这种情况下求得的.

(3)如果字母给出的值是分数或负数,乘方时必须加上括号.

方法技巧突破

技巧1 直接代入求值法

把已知的字母的值代入代数式,并按原来的运算顺序计算求值的方法.

例1 根据条件求代数式 $a^2 - 3a + 1$ 的值.

$$(1)a = -5; (2)a = \frac{3}{2}.$$

分析 代数式 $a^2 - 3a + 1$ 的值是由 a 的值确定的,把 a 的值代入代数式,按代数式中的运算关系可求出代数式的值.

解 (1)当 $a = -5$ 时,

$$a^2 - 3a + 1 = (-5)^2 - 3 \times (-5) + 1 = 25 - (-15) + 1 = 25 + 15 + 1 = 41.$$

(2)当 $a = \frac{3}{2}$ 时,

$$a^2 - 3a + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = \frac{13}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{5}{4}.$$

警示 代入时分数、负数作底数要加括号.

方法技巧总结 求代数式的值时,第一步只代入不计算;第二步计算,求出代数式的值.

例2 已知 $a = 2b, c = 5a (a \neq 0)$, 求代数式 $\frac{6a+2b-c}{a-4b+c}$ 的值.

分析 给出的条件无具体值,但给出了 a, b, c 之间的关系,把代数式中的 a, b, c 统一换成一个字母,再通过约分即可求得代数式的值.

解法1 $\because a = 2b, c = 5a, \therefore c = 5 \times 2b = 10b.$

$$\text{把 } a = 2b, c = 10b \text{ 代入得 } \frac{6a+2b-c}{a-4b+c} = \frac{6 \times 2b + 2b - 10b}{2b - 4b + 10b} = \frac{4b}{8b} = \frac{1}{2}.$$

解法 2: $\because a=2b, \therefore b=\frac{a}{2}$. 又 $\because c=5a$,

$$\therefore \frac{6a+2b-c}{a-4b+c} = \frac{6a+2 \times \frac{a}{2} - 5a}{a-4 \times \frac{a}{2} + 5a} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}.$$

方法技巧总结:认真体会这种代换的方法,是一种常用的数学解题技巧,应熟练掌握.

技巧 2 整体代入求值法

通过已知与所求结论的对比,整理出两者共同的部分作为切入点,然后整体代入即可.

例 3 (1)当 $3a-b=2$ 时,求 $2b+3-6a$ 的值;

(2)若代数式 $2a^2+3a+1$ 的值为 5,求代数式 $4a^2+6a+8$ 的值.

分析:在(1)中由已知条件求 a 解不出准确值,在(2)中,由已知条件求 a 的值比较麻烦,可把“ $3a-b$ ”“ $2a^2+3a$ ”看做一个整体,再利用运算律将原式进行整理变形,使其成为含“ $3a-b$ ”“ $2a^2+3a$ ”的代数式,再利用整体代入法求代数式的值.

解:(1) $\because 2b+3-6a = -6a+2b+3 = -2(3a-b)+3$,

当 $3a-b=2$ 时, $2b+3-6a = -2(3a-b)+3 = -2 \times 2+3 = -1$.

(2) $\because 2a^2+3a+1=5, \therefore 2a^2+3a=4$.

$\therefore 4a^2+6a+8 = 2(2a^2+3a)+8 = 2 \times 4+8 = 16$.

方法技巧总结:整体代入法的实质就是把“整体”看做一个新的字母,再求关于这个新字母的代数式的值.

例 4 已知 $y=ax^3+bx+c$, 当 $x=0$ 时, $y=-2$; 当 $x=-2$ 时, $y=6$, 求当 $x=2$ 时 y 的值.

分析:由已知条件无法求出 a, b, c 的值,但是可以利用 2 与 -2 互为相反数和代数式中只含 x 的奇次项这些条件,求出 2^3a+2b 这一整体的值,再整体代入求值.

解:当 $x=0$ 时, $y=-2$, 代入得 $c=-2$.

$\therefore y=ax^3+bx-2$. 当 $x=-2$ 时, $y=6$.

$\therefore 6=(-2)^3a+(-2b)-2$, 即 $2^3a+2b=-8$.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, $y=2^3a+2b-2=-8-2=-10$.

方法技巧总结:灵活应用整体思想解题会达到事半功倍的效果.

例 5 先阅读下面的解题过程,再解答后面的题目.

已知代数式 $9-6y-4y^2$ 的值是 7, 求代数式 $2y^2+3y+7$ 的值.

由 $9-6y-4y^2=7$ 得 $-6y-4y^2=7-9$.

即 $4y^2+6y=2, \therefore 2y^2+3y=1$.

$\therefore 2y^2+3y+7=1+7=8$.