

高等学校机械工程及自动化
机械设计制造及其自动化



专业系列教材

控制工程基础

学习指导与习题详解

王积伟 张祖顺 王蕊 编著



高等教育出版社

高等学校机械工程及自动化
机械设计制造及其自动化

专业系列教材

控制工程基础学习指导 与习题详解

王积伟 张祖顺 王 蕊 编著

高等教育出版社

内容简介

本书为王积伟、吴振顺主编《控制工程基础》教材的配套教材，其体系、内容、章节与教材完全一致。除第8章外每章均设有内容提要、学习目的、重点与难点、要点精述和习题详解等5部分。

本书适用于高等工科院校机械类各专业，可供大学本科生和报考普通硕士研究生与工程硕士等的读者学习、复习之用。

图书在版编目(CIP)数据

控制工程基础学习指导与习题详解/王积伟，张祖顺，王蕊编著. —北京：高等教育出版社，2004.5

ISBN 7-04-013989-8

I. 控... II. ①王... ②张... ③王... III. 自控控制理论-高等学校-教学参考资料 IV. TP13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第012288号

策划编辑 龙琳琳 责任编辑 陈大力 封面设计 刘晓翔 责任绘图 尹文军
版式设计 金伟 责任校对 殷然 责任印制 孔源

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经销 新华书店北京发行所
印刷 北京星月印刷厂

开本 787×1092 1/16
印张 15
字数 360 000

版次 2004年5月第1版
印次 2004年5月第1次印刷
定价 20.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

王积伟、吴振顺主编《控制工程基础》是高等学校机械工程及自动化(机械设计制造及其自动化)专业系列教材之一,也是教育部新世纪网络课程的主要参考书,2002年列入普通高等教育“十五”国家级规划教材。

目前,控制工程基础已经作为高等工科院校机械工程及自动化专业必修的技术基础课程而普遍开设,同时许多学校部分专业也将其列为普通硕士研究生和工程硕士入学考试的科目之一。为了帮助本科生学好这门课程,满足报考普通硕士研究生和工程硕士等读者的需求,作者在总结几十年教学经验的基础上,紧密结合课程教学大纲和硕士研究生入学考试大纲,精心组织编著了本书。

本书在编写过程中,遵循学以致用原则,力求简练、准确、循循善诱,并给读者以适当的自主学习空间。

本书为王积伟、吴振顺主编《控制工程基础》的配套教材,其体系与教材完全一致,内容与教材密切配合,章节与教材全部吻合。除第8章外均设有内容提要、学习目的、重点与难点、要点精述和习题详解等5部分,以方便读者使用。在“要点精述”中简明扼要地对各章节的主要内容作了精辟的阐述,有利于读者对重点、难点内容的深入掌握和对课程的复习与回顾;在“习题详解”中,对教材中的每道习题都作了详细的剖析、诠释和解答,并运用MATLAB等多种方法解题,以拓宽读者的思路。

本书由王积伟、张祖顺、王蕊编著。张祖顺做了许多艰苦、细致的工作。全书由王积伟修改定稿。

由于作者水平和时间所限,书中难免有疏漏和错误,欢迎广大读者批评指正。

作者

2003年8月

目 录

第 1 章 控制系统的基本概念	1	第 5 章 控制系统的设计和校正	163
1.1 内容提要	1	5.1 内容提要	163
1.2 学习目的	1	5.2 学习目的	163
1.3 重点与难点	1	5.3 重点与难点	163
1.4 要点精述	1	5.4 要点精述	163
1.5 习题详解	2	5.5 习题详解	169
第 2 章 数学模型	7	第 6 章 线性离散系统与 Z 变换	186
2.1 内容提要	7	6.1 内容提要	186
2.2 学习目的	7	6.2 学习目的	186
2.3 重点与难点	7	6.3 重点与难点	186
2.4 要点精述	7	6.4 要点精述	186
2.5 习题详解	14	6.5 习题详解	191
第 3 章 时域分析法	61	第 7 章 状态空间分析法	202
3.1 内容提要	61	7.1 内容提要	202
3.2 学习目的	61	7.2 学习目的	202
3.3 重点与难点	61	7.3 重点与难点	202
3.4 要点精述	61	7.4 要点精述	202
3.5 习题详解	67	7.5 习题详解	209
第 4 章 频域分析法	94	第 8 章 控制系统的应用和分析	234
4.1 内容提要	94	8.1 内容提要	234
4.2 学习目的	94	8.2 学习目的	234
4.3 重点与难点	94	8.3 重点与难点	234
4.4 要点精述	94	参考文献	235
4.5 习题详解	102		

第 1 章 控制系统的基本概念

1.1 内容提要

本章主要阐述控制系统的工作原理、组成及其分类和对控制系统的基本要求。

1.2 学习目的

1. 搞清控制系统的工作原理、组成及其分类。
2. 理解对控制系统的基本要求。
3. 了解控制工程的发展概况。

1.3 重点与难点

1.3.1 重点

控制系统的工作原理。

1.3.2 难点

确定系统的输入量和输出量，寻找反馈通道。

1.4 要点精述

1.4.1 控制系统的工作原理

首先检测输出量的实际值，将实际值与给定值(输入量)进行比较得出偏差值，再用偏差值产生控制调节信号去消除偏差。

这种基于反馈原理，通过检测偏差再纠正偏差的系统称为反馈控制系统。它是一种闭环控制系统。

输入量是指作用于被控对象或系统输入端的物理量、信息或信号。

输出量是指呈现于被控对象或系统输出端的物理量、信息或信号。

输入量是因，输出量是果，它们之间是一种因果关系。

1.4.2 闭环控制系统的组成

闭环控制系统一般由给定元件、反馈元件、比较元件、放大元件、执行元件及校正元件等组成。其中校正元件是为保证控制质量，使系统获得良好的动、静态性能而加入系统的，但是否需要视系统实际情况而定。

1.4.3 控制系统的分类

1. 按有无反馈作用可分为开环控制系统、闭环控制系统和半闭环控制系统 3 类。

- 按输入量的特征可分为恒值控制系统、程序控制系统和随动控制系统 3 类。
- 按系统中传递信号的性质可分为连续控制系统和离散(数字)控制系统 2 类。
- 按系统部件的物理属性可分为机械、电气、机电、液压、气动、热力等控制系统。

1.4.4 对控制系统的基本要求

对控制系统的基本要求是稳定、精确、快速,也就是稳、准、快 3 个字。系统稳定是保证控制系统正常工作的先决条件。

1.5 习题详解

题 1-1 什么是闭环控制系统的基本工作原理?

解:

如果系统的输出端和输入端之间存在反馈回路,将输出量的实测值回授到输入端,与给定值(输入量)进行比较,得出偏差,用此偏差作为新的控制信号产生控制调节作用,进一步减小偏差,使实际输出量进一步接近给定值,如此不断地反馈循环控制,以达到使偏差减少至规定限度内(有差调节)或直至消除误差(无差调节)之目的。这种系统称为闭环控制系统。负反馈控制原理是构成闭环控制(负反馈控制)系统的核心。

题 1-2 试举出几个日常生活中的开环控制和闭环控制系统,并说明它们的工作原理。

解:

(1) 开环控制系统

照明灯开关控制,按时间规律控制的全自动洗衣机,家用电烤箱,微波炉控制,电风扇调速控制系统等。

现以电风扇调速系统为例,简述其工作原理(见图 1.1)。

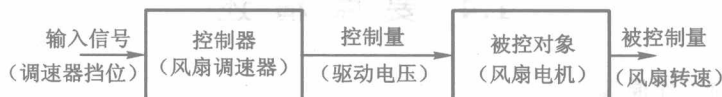


图 1.1 题 1-2 电风扇转速开环控制系统

根据当时室内环境温度将调速器调节手柄置于适当位置。调速器实际上是一只可变电感器,从电路原理上看,该电感与风扇电动机绕组回路串联后接到交流市电上,起到串联分压的作用。风扇为风机类负载,可通过调压方式进行调速。

当调节手柄置于较高速位置时,调速器电感量较小,其上交流压降较低而电动机电枢电压较高,产生的电磁力矩较大,因而风扇可达到较高的转速。

当调节手柄置于较低速位置时,调速器电感量较大,其上交流压降较高而电动机电枢电压较低;产生的电磁力矩较小,因而风扇只能达到较低的转速。

由以上分析可知,实际上风扇的转速具体为每分钟多少转并不清楚,也没有采用传感器将风扇转速转换为控制量反馈到输入端来进一步产生控制调节作用,所以为开环控制系统。

(2) 闭环控制系统

坐便器的水箱水位的自动控制,电冰箱温度控制,空调器室温控制,以及日常生活中人类

行为动作的约束控制等。

1) 以空调器控制过程为例(见图 1.2)

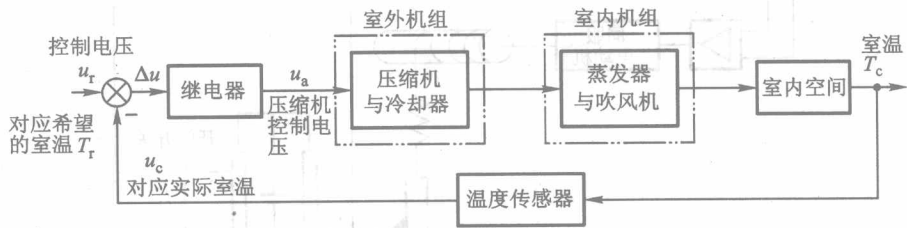


图 1.2 题 1-2 空调器室温闭环控制系统方框图

系统的任务是保持密闭的室内空间的温度 T_c 等于给定的温度 $T_r \pm \Delta T$ 。室内空间是被控对象，室内温度 T_c 是被控量，温控器设定的温度值对应于室内机组的控制电压 u_r (与希望的室温 T_r 值对应) 是给定值。

温度传感器将测量点的温度转换为电压信号 u_c ，与设定值相比较，利用偏差电压 Δu (表征实际温度 T_c 与希望温度 T_r 的偏差) 控制继电器。当 Δu 大到一定程度时，继电器接通，压缩机启动，将蒸发器中的高温低压气态制冷剂送经室外机组的冷却器散热；降温后的低温低压制冷剂被压缩成低温高压液态输送进入室内机组的蒸发器，急速降压扩散成气体，吸收室内空气的热量，为了加快热交换的速度，用吹风机将蒸发器附近的冷空气迅速扩散开，使室内温度均匀下降；而高温低压制冷剂又被吸入室外机组的冷却器与室外空气进行热交换，以降低其温度。如此循环流动，使室内温度不断降低，当室温 T_c 降低到 $T_r \pm \Delta T$ 的范围内， Δu 减小到一定程度时，继电器断开，压缩机停止。

2) 以人伸手取物为例(见图 1.3)

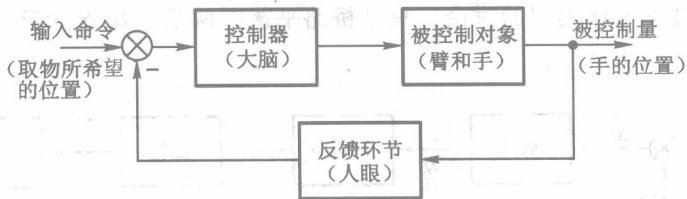


图 1.3 题 1-2 人取物闭环控制系统框图

手期望的位置是取物的位置，它通过人眼送入大脑，手到达的实际位置是系统输出量，它通过人眼反馈到大脑。大脑首先对人手位置和期望抵达的位置进行比较，如不符，则得出偏差信号。信号大小与位置差有关。根据此偏差，大脑发出控制信息，通过神经系统驱使手臂与手向期望位置靠拢。如此循环控制使位置偏差值逐渐减小，直至手与物足够接近，最后取到物为止，完成了闭环控制。

通过以上分析可知，在该系统中人眼起到位置监测器的作用，大脑相当于比较控制器，手、臂是被控对象，被控量是手的位置与动作。

题 1-3 仓库大门自动控制系统的原理如图 1.4 所示。试说明自动控制大门开启和关闭

的工作原理，并画出系统框图。

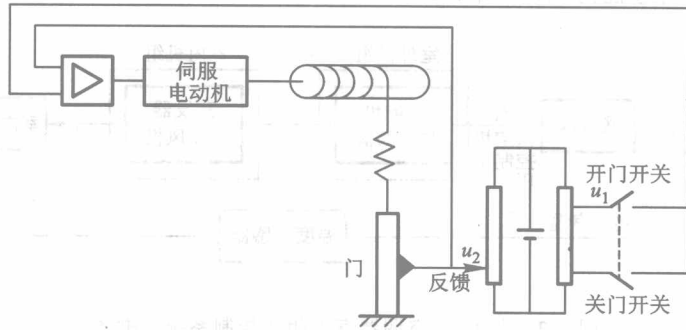


图 1.4 题 1-3 图(主教材中图 1.8)

解：

如大门原来是打开的，这时将开门开关闭合，作为位置检测器的测量桥路的两个输出端，其左端活动臂的位置由大门的位置决定，此时接至上方，输出电压为 u_2 ；其右端通过开关也接至上方，输出电压为 u_1 。从图中可看出，此时测量桥路平衡 $u_1 = u_2$ ， $\Delta u = u_2 - u_1 = 0$ ，输出电压为 0，控制系统不动作。

如大门原来是关闭的，则测量桥路左输出端位于下方，而右端接至上方，电桥因不平衡 ($u_2 \neq u_1$) 而产生控制信号 Δu 。 Δu 的大小反映了实际位置与期望位置的差距，在接通的瞬间 Δu 达到最大，经过电压放大后，用以改变拖动电动机的转速和转向，并通过传动装置鼓轮控制大门的开启。随着大门开度的加大 u_2 下降，偏差信号 Δu 逐步减小，当大门完全打开时，测量桥路左输出端移至上方与右输出端成对称位置，桥路平衡。此时 $u_2 = u_1$ ，使 $\Delta u = 0$ ，导致拖动电动机控制信号为 0，电动机停转，传动装置也停止运动，此时大门已按要求打开了。

大门关闭的控制过程可作类似的讨论，只是桥路平衡时两输出端皆位于桥路下方。系统框图如图 1.5 所示：

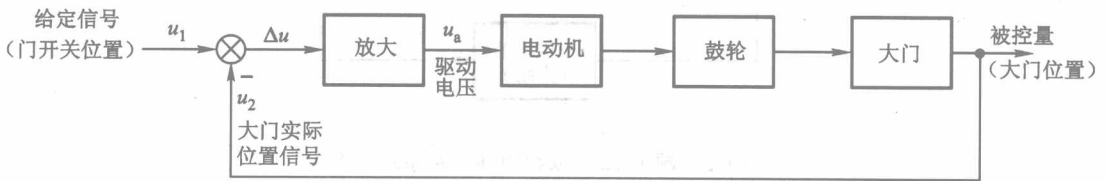


图 1.5 题 1-3 大门开闭闭环控制系统

题 1-4 图 1.6 为两个液位控制系统，试分别绘出其组成框图，并说明其工作原理。

解：

图 1.6 a) 系统组成框图如图 1.7 所示，工作原理如下。

该系统的控制任务是将液面维持在一定高度。从图中可见，水箱是被控对象，水箱液位是被控量，浮子顶杆的长度(表征液位的期望值 h')是给定量。杠杆平衡时，控制进水阀门位于某一位置而具有一定开度，使水箱中输入水量与流出水量相等，从而使液位保持在希望高度 h 上。

当液位降低时，浮子位置也随着降低，通过杠杆机构使阀门开度增大，进入水箱的水流量增大，这时水箱液面上升，浮子位置随之上升，使阀门开度增加量减小，进水增加量减小，直至系统处于新的平衡状态。反之，若水箱液位上升，则系统会自动减小阀门开度，从而减少流入水量，使液位降低，直至达到新的平衡位置。可见此为连续控制系统。

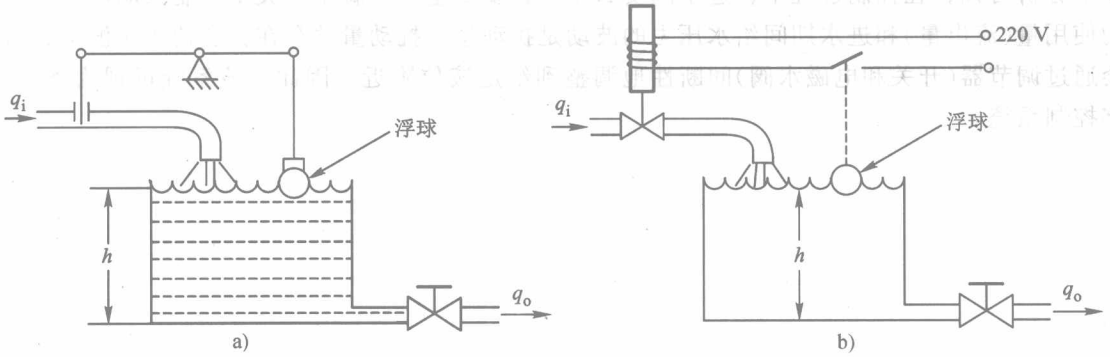


图 1.6 题 1-4 图(主教材中图 1.9)

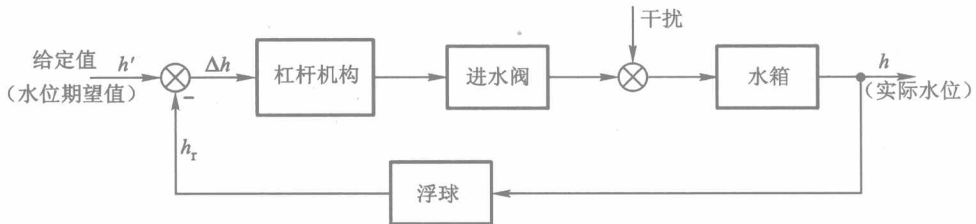


图 1.7 图 1.6 a) 的方框图

由上述分析可知，水的使用量(流出量)和给水压力的波动是扰动量，扰动量的存在会使水位波动，最终会通过调节器(杠杆机构)调整到给定液位(附近)。

图 1.6b) 所示系统的组成框图如图 1.8 所示，工作原理如下。

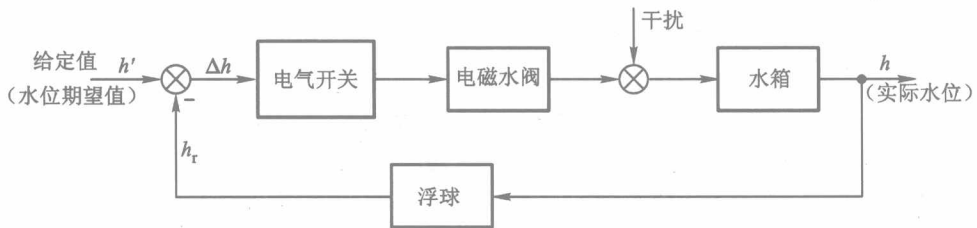


图 1.8 图 1.6b) 的方框图

该系统的控制任务是将液面维持在一定高度。从图中可见，水箱是被控对象，水箱液位是被控量，浮球拉杆的长度(表征液位的期望值 h') 是给定量。这些与图 1.6 a) 基本相同，但控制原理的差别较大。

电磁阀不通电时，控制阀门关闭(此时水位在 h 附近)，随着水的流出液位降低，浮子位

置也随着降低。低到一定程度时，在浮球拉杆的带动下电磁阀开关闭合，阀门完全打开，开始进水(须保证进水量大于用水量)，这样液位逐步升高，水位又重新恢复到 h 高度，并继续有所升高，直至拉杆顶开电磁阀开关，阀门重新关闭。

随着水的流出，液位又开始下降，如此周而复始，使水位保持在 $h \pm \Delta h$ 的高度上。通过以上分析可知，在控制过程中，进水阀要么全开，要么全闭，属于开关量控制或间断控制。水的使用量(流出量)和进水期间给水压力的波动是扰动量。扰动量的存在，会使水位波动，最终会通过调节器(开关和电磁水阀)间断性地调整到给定液位附近。因此，该系统可视为离散/数字控制系统。

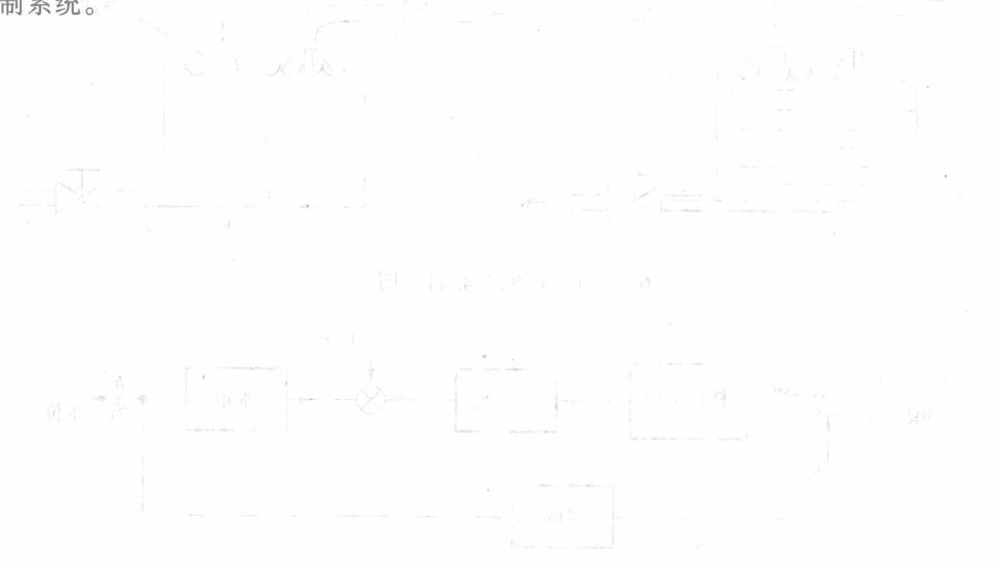


图 10-1 离散控制系统方框图

图 10-2 所示为水箱液位控制系统的离散控制方框图。图中，水箱液位控制系统的离散控制方框图，其输入为给定的液位高度 h ，经过比较器与反馈信号进行比较，产生偏差信号，该偏差信号经采样保持器、零阶保持器、离散化变换器、数字控制器、数模转换器、电磁阀驱动器等环节，控制电磁阀的开闭，从而实现对水箱液位的控制。



图 10-2 水箱液位控制系统的离散控制方框图

图 10-3 所示为水箱液位控制系统的离散控制方框图。图中，水箱液位控制系统的离散控制方框图，其输入为给定的液位高度 h ，经过比较器与反馈信号进行比较，产生偏差信号，该偏差信号经采样保持器、零阶保持器、离散化变换器、数字控制器、数模转换器、电磁阀驱动器等环节，控制电磁阀的开闭，从而实现对水箱液位的控制。

第2章 数学模型

2.1 内容提要

本章主要阐述控制系统数学模型的基本概念、时域模型——运动微分方程和复数域模型——传递函数的建立、数学模型的图示法——方框图和信号流图的建立步骤与方法；介绍拉氏变换与拉氏反变换。

2.2 学习目的

1. 了解建立系统数学模型的一般步骤。
2. 掌握拉氏变换和反变换的方法。
3. 掌握建立系统数学模型的各种方法(包括时域、复数域,解析式、图示式)。
4. 了解非线性数学模型线性化的方法。
5. 熟悉各种不同物理属性控制系统数学模型的建立过程。

2.3 重点与难点

2.3.1 重点

传递函数概念的建立、典型环节和控制系统传递函数的推导。

2.3.2 难点

实际物理系统,特别是机械系统传递函数的推导。

2.4 要点精述

2.4.1 系统数学模型

系统数学模型是描述系统输入、输出量以及内部各变量之间关系的数学表达式,它揭示了系统结构及参数与其性能之间的内在关系。

2.4.2 系统运动微分方程的建立

1. 建立步骤

- (1) 分析系统的工作原理和信号传递变换的过程,确定系统和各元件的输入、输出量。
- (2) 从系统的输入端开始,按照信号传递变换过程,依据各变量所遵循的物理学定律,依次列出各元件、部件的动态微分方程。
- (3) 消去中间变量,得到一个描述系统输入、输出变量之间关系的微分方程。

(4) 写成标准形式。将与输入量有关的项放在等式右侧，与输出量有关的项放在等式的左侧，且各阶导数项按降幂排列。

2. 系统运动微分方程的性质

(1) 物理本质不同的系统，可以有相同的数学模型。反之，同一数学模型可以描述物理性质完全不同的系统。

(2) 系统微分方程的阶次等于系统中所包含的独立储能元件的个数。

(3) 运动微分方程描述的系统动态特性是系统的固有特性，它取决于系统的结构及其参数。

3. 系统按其运动微分方程分类

(1) 用线性微分方程描述的系统为线性系统。线性系统服从叠加原理。

(2) 用非线性微分方程描述的系统为非线性系统。

根据微分方程的系数是常数还是时间的函数，线性系统和非线性系统各自又可分为定常系统或时变系统。

4. 单输入、单输出 n 阶线性定常系统微分方程的一般形式

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x_o}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_o}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx_o}{dt} + a_n x_o(t) \\ = b_0 \frac{d^m x_i}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_i}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dx_i}{dt} + b_m x_i(t) \quad (n \geq m) \end{aligned} \quad (2.1)$$

式中， a_0, a_1, \dots, a_n 和 b_0, b_1, \dots, b_m 为由系统结构参数决定的实常数。

2.4.3 拉氏变换和反变换

1. 拉氏变换的定义

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.2)$$

式中， s 是复变数， $s = \sigma + j\omega$ 。

2. 几种典型函数的拉氏变换

单位脉冲函数

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (2.3)$$

单位阶跃函数

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (2.4)$$

单位速度函数

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad (2.5)$$

单位加速度函数

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2\right] = \frac{1}{s^3} \quad (2.6)$$

指数函数

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad (2.7)$$

正弦函数

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.8)$$

余弦函数

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (2.9)$$

3. 常用拉氏变换基本定理

(1) 叠加定理

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) \quad (2.10)$$

(2) 微分定理

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \quad (2.11)$$

式中, n ——微分阶数, $n=1, 2, 3, \dots$;
 $f'(0), f''(0), \dots$ ——原函数 $f(t)$ 各阶导数在 $t=0$ 时刻的值。

零初始条件下

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) \quad (2.12)$$

(3) 积分定理

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int \cdots \int f(t) (dt)^n}_n\right] = \frac{1}{s^n} F(s) + \frac{1}{s^{n-1}} f^{-1}(0) + \frac{1}{s^{n-2}} f^{-2}(0) + \cdots + \frac{1}{s} f^{-n}(0) \quad (2.13)$$

式中, n ——积分重数, $n=1, 2, 3, \dots$;
 $f^{-1}(0), f^{-2}(0), \dots$ ——原函数 $f(t)$ 的各次重积分在 $t=0$ 时刻的值。

零初始条件下

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int \cdots \int f(t) (dt)^n}_n\right] = \frac{1}{s^n} F(s) \quad (2.14)$$

(4) 延迟定理

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad (2.15)$$

式中, τ 为延迟时间。

(5) 位移定理

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a) \quad (2.16)$$

式中, a 为实常数。

(6) 初值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.17)$$

(7) 终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2.18)$$

4. 拉氏反变换公式

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (2.19)$$

式中, \mathcal{L}^{-1} 为拉氏反变换的符号。

根据上述公式一般很难直接计算, 通常用部分分式展开法将 $F(s)$ 展开成有理分式函数之和, 然后由拉氏变换表——查出对应的反变换函数, 即得所求的 $f(t)$ 。

(1) $F(s)$ 的极点为各不相同的实数时的拉氏反变换

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (n \geq m) \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &= \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s+p_i} \end{aligned} \quad (2.20)$$

式中, $p_i (i=1, 2, \cdots, n)$ —— $F(s)$ 的极点;

A_i —— 待定系数, 它是 $s = -p_i$ 处的留数, 其求法如下:

$$A_i = [F(s)(s+p_i)]_{s=-p_i} \quad (2.21)$$

则

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s+p_i}\right] = \sum_{i=1}^n A_i e^{-p_i t} \quad (2.22)$$

(2) $F(s)$ 含有一对共轭复数极点时的拉氏反变换

$$F(s) = \frac{A_1 s + A_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{A_3}{s+p_3} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n} \quad (2.23)$$

式中, p_1, p_2 —— 一对共轭复数极点;

$p_i (i=3, 4, \cdots, n)$ —— 各不相同的实数极点;

A_1 和 A_2 可按下式求得

$$[F(s)(s+p_1)(s+p_2)]_{s=-p_1} = [A_1 s + A_2]_{s=-p_1} \quad (2.24)$$

然后按式(2.23)查拉氏变换表便得 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 。

(3) $F(s)$ 中包含有 r 个重极点时的拉氏反变换

$$F(s) = \frac{A_{01}}{(s+p_0)^r} + \frac{A_{02}}{(s+p_0)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_{0r}}{s+p_0} + \frac{A_{r+1}}{s+p_{r+1}} + \frac{A_{r+2}}{s+p_{r+2}} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n} \quad (2.25)$$

式中, p_0 —— 重极点;

$p_{r+1}, p_{r+2}, \cdots, p_n$ —— 各不相同的实数极点。

$A_{01}, A_{02}, \cdots, A_{0r}$ 的求法如下:

$$A_{0r} = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}} [F(s)(s+p_0)^r] \right\}_{s=-p_0} \quad (r=1, 2, \cdots, r) \quad (2.26)$$

则

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \left[\frac{A_{01}}{(r-1)!} t^{(r-1)} + \frac{A_{02}}{(r-2)!} t^{(r-2)} + \cdots + A_{0r} \right] e^{-p_0 t} + \\ &A_{r+1} e^{-p_{r+1} t} + A_{r+2} e^{-p_{r+2} t} + \cdots + A_n e^{-p_n t} \end{aligned} \quad (2.27)$$

(4) 用 MATLAB 展开部分分式

$$F(s) = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (2.28)$$

输入 $F(s)$ 分子和分母的系数, 即

$$\begin{aligned} \text{num} &= [b_0 \quad b_1 \cdots b_n] \\ \text{den} &= [1 \quad a_1 \cdots a_n] \end{aligned}$$

命令

$$[r, p, k] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$$

MATLAB 便按下式给出 $F(s)$ 部分分式展开式中的留数、极点和余项:

$$F(s) = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s) \quad (2.29)$$

式中, $p(1) = -p_1, p(2) = -p_2, \cdots, p(n) = -p_n$ —— $F(s)$ 各不相同的极点的负值;

$r(1) = A_1, r(2) = A_2, \cdots, r(n) = A_n$ ——相应极点处的留数;

$k(s)$ ——余项。

如果 $F(s)$ 中包含有重极点, 则部分分式展开式中 will 包括下列诸项:

$$\frac{r(j)}{s-p(j)} + \frac{r(j-1)}{[s-p(j)]^2} + \cdots + \frac{r(j-q-1)}{[s-p(j)]^q}$$

式中, $p(j)$ 为一个 q 重极点。

2.4.4 应用拉氏变换解线性微分方程

用拉氏变换法求解线性微分方程的过程是:

- (1) 对线性微分方程中每一项进行拉氏变换, 使微分方程变为 s 的代数方程;
- (2) 解代数方程, 得到有关变量 s 的拉氏变换表达式;
- (3) 用拉氏反变换得到微分方程的时域解。

2.4.5 传递函数

1. 传递函数的定义

在零初始条件下, 系统输出量的拉氏变换与引起该输出的输入量的拉氏变换之比定义为系统的传递函数。

2. 传递函数的性质

- (1) 传递函数是复数 s 域中的系统数学模型, 是 s 的有理分式函数;
- (2) 传递函数仅取决于系统本身的结构及参数, 而与输入、输出的形式无关;
- (3) 传递函数是由系统微分方程经过拉氏变换得来的, 因此两者可以相互转换;
- (4) 传递函数只适用于单输入、单输出线性定常系统。

3. 传递函数的一般形式

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (n \geq m) \quad (2.30)$$

式中, a_0, a_1, \cdots, a_n 和 b_0, b_1, \cdots, b_m 为由系统结构参数决定的实常数。

4. 系统特性方程、零点和极点。

$$G(s) = \frac{b_0 (s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{a_0 (s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \frac{M(s)}{D(s)} \quad (2.31)$$

$D(s)=0$ 为系统的特性方程, 其根 $s = -p_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为系统的极点。 $M(s)=0$ 的根 $s = -z_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为系统的零点。

把零点、极点表示于复平面上的图形为系统的零、极点分布图, 它与系统传递函数相对应。因此, 它是系统数学模型的一种图示形式。

5. 典型环节传递函数

(1) 比例环节

$$G(s) = K \quad (2.32)$$

(2) 一阶微分环节

$$G(s) = \tau s + 1 \quad (2.33)$$

式中, τ 为时间常数, s 。

(3) 二阶微分环节

$$G(s) = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 \quad (2.34)$$

式中, τ ——时间常数, s ;

ζ ——阻尼比。

(4) 积分环节

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (2.35)$$

(5) 惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.36)$$

式中, T 为时间常数, s 。

(6) 振荡环节

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.37)$$

式中, T ——时间常数, s ;

ω_n ——无阻尼固有频率, rad/s ;

ζ ——阻尼比。

(7) 延迟环节

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad (2.38)$$

式中, τ 为延迟时间, s 。

2.4.6 系统方框图和信号流图

1. 系统方框图

(1) 组成要素

函数方框、求和点和引出线。

(2) 图形特点

- 1) 方框图形象地表示控制系统中信号流向, 但不表示系统的具体物理结构;
- 2) 用方框图可以较直观地分析系统性能, 研究各组成环节对系统性能的影响;
- 3) 同一系统的方框图的形式不是惟一的, 但其所对应的传递函数是惟一的。