

21世纪全国高等院校通用教材辅导用书

微积分 学习指导

MATHS

编著 顾国章



中国财政经济出版社

21 世纪全国高等院校通用教材辅导丛书

微积分学习指导

顾国章 编著

中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学习指导/顾国章编著. —北京: 中国财政经济出版社,
2008. 7

(21 世纪全国高等院校通用教材辅导丛书)

ISBN 978 - 7 - 5095 - 0654 - 7

I. 微… II. 顾… III. 微积分 - 高等学校 - 教学参考资料
IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 057760 号

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: jiaoyu@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100142

发行电话: 88190616 88190655 (传真)

北京财经印刷厂印刷

787×960 毫米 16 开 20.5 印张 338000 字

2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月北京第 1 次印刷

定价: 26.00 元

ISBN 978 - 7 - 5095 - 0654 - 7 / O · 0013

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

目 录

目 录

第一章 函数	(1)
一、本章主要内容	(1)
二、典型例题分析	(9)
三、练习题	(24)
四、练习题答案	(27)
第二章 极限与连续	(29)
一、本章主要内容	(29)
二、典型例题分析	(36)
三、练习题	(55)
四、练习题答案	(61)
第三章 导数与微分	(63)
一、本章主要内容	(63)
二、典型例题分析	(68)
三、练习题	(90)
四、练习题答案	(96)
第四章 中值定理与导数的应用	(99)
一、本章主要内容	(99)
二、典型例题分析	(103)
三、练习题	(128)

四、练习题答案	(133)
第五章 积分学	(136)
一、本章主要内容	(136)
二、典型例题分析	(144)
三、练习题	(182)
四、练习题答案	(191)
第六章 无穷级数	(194)
一、本章主要内容	(194)
二、典型例题分析	(202)
三、练习题	(221)
四、练习题答案	(228)
第七章 空间解析几何初步	(231)
一、本章主要内容	(231)
二、典型例题分析	(235)
三、练习题	(242)
四、练习题答案	(244)
第八章 多元函数微积分	(246)
一、本章主要内容	(246)
二、典型例题分析	(255)
三、练习题	(288)
四、练习题答案	(295)
第九章 微分方程初步	(298)
一、本章主要内容	(298)
二、典型例题分析	(303)
三、练习题	(317)
四、练习题答案	(320)

第一章 函数

一、本章主要内容

1. 函数

(1) 一元函数的定义: 对于某一变化过程中的两个变量 x 和 y , 如果当变量 x 在其变化范围 D_f 中任意取定一个数值时, 按照一定的对应法则, 变量 y 总有一个唯一的数值与它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y=f(x), x \in D_f$.

(2) 函数 $f(x)$ 的 5 个因素.

- i) 自变量 x , 被认为是主动变化的变量;
- ii) 定义域 D_f , 表示自变量 x 的变化范围;
- iii) 因变量 y , 在同一变化过程中, 被认为是随着自变量 x 的变化而作相应变化的变量;
- iv) 对应规则 f , 刻画因变量怎样随自变量 x 的取值而取唯一确定的对应值 $f(x)$ 的规则;
- v) 值域 R_f , 因变量 y 的变化范围.

上面 5 个因素中, 定义域和对应规则是两个最重要的因素, 当两个函数的定义域相同并且对应规则相同时, 那么就称这两个函数相等.

(3) 函数定义域的确定. 分为两种情形:

- 第一种情形是可以依据问题的背景, 来明确给定自变量的变化范围;
- 第二种情形是给出了一个函数表达式, 但对自变量的取值范围没有事先给出, 这时, 函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量取值范围.

(4) 函数定义域、值域表示. 函数的定义域、值域分别是自变量、因变量变化的范围, 一般用区间表示. 如果变量在区间的左(右)端点

取到值, 则称该区间是左闭(右闭)的, 否则是左开(右开)的.

(5) 邻域. 以 x_0 为中心的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ ($\delta > 0$) 邻域, 以 $N(x_0, \delta)$ 记之. 称点 x_0 为该邻域的中心、 δ 为该邻域的半径. 分析函数在某点 x_0 的性质与邻域 $N(x_0, \delta)$ 的概念是分不开的.

(6) 函数的三种常用表示法.

i) 表格法. 表格法的优点是, 通过表格可以直接从自变量的值找到对应的函数值, 但表中所列数据相对不完全, 用表格法表示的函数也不便于理论分析;

ii) 图像法. 图像法利用曲线来表示 x 与 y 的对应关系, 比较直观;

iii) 公式法. 用数学公式表示自变量和因变量之间的相互关系是比较常用的方法, 公式法的优点是简明准确, 便于理论分析, 但是公式法表示的函数不够直观, 若与其他方法结合起来讨论, 其效果更加明显.

用公式法表示函数时, 经常会碰到分段函数, 所谓分段函数就是在自变量变化的不同范围内用不同式子来表示的函数. 要注意的是, 对分段函数, 求不同范围内 x 的函数值, 应该用相应范围内的公式.

2. 隐函数、反函数和复合函数

(1) 隐函数的定义. 由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数.

(2) 反函数.

i) 反函数的定义. 设变量 x 与 y 之间存在函数关系 $y = f(x)$, 如果对于其值域 R_f 中的任意一个 y 值, 在其定义域 D_f 内, x 都有唯一确定的值与之对应, 这时确定了 y 是 x 的函数, 同时也确定了 x 是 y 的函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$. 称函数 $x = f^{-1}(y)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数. 习惯上把函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$.

并不是每一个函数都存在反函数. 例如函数 $y = x^2$, 其定义域 D_f 为 $(-\infty, +\infty)$, 值域 R_f 为 $[0, +\infty)$. 对于值域中的任意一个 y 值, 在定义域内有两个数 x 和 $-x$ 与之对应. 由反函数的定义, 函数 $y = x^2$ 在它的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内不存在反函数. 但是, 当满足一定条件时函数 $y = f(x)$ 一定存在反函数.

ii) 反函数存在定理. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 R_f , $y = f(x)$ 是 D_f 上的严格单调增加(减少)函数. 那么, 一定存在 $y = f(x)$

的反函数 $y=f^{-1}(x)$, 反函数的定义域为 R_f , 值域为 D_f , 并且 $y=f^{-1}(x)$ 是 R_f 上的严格单调增加 (减少) 函数.

一个函数和它的反函数之间具有这样一个性质: 函数 $y=f(x)$ 的图像与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 复合函数的定义: 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=g(x)$, 并且 $g(x)$ 的值域 R_g 全部或部分在 $f(u)$ 的定义域 D_f 内, 于是 y 通过 u 成为 x 的函数, 记为 $y=f(g(x))$, 称 $y=f(g(x))$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数, 其中 u 称作中间变量.

与将几个基本初等函数复合构成一个复合函数的过程相反, 还要求能将一个复合函数熟练地分解成几个基本初等函数.

3. 函数的特性

(1) 有界性: 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 其中 (a, b) 是 $f(x)$ 的定义域或定义域内的一部分, 若存在正数 M , 使得当 x 取 (a, b) 内的任何一个值时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界. 否则, 就称 $f(x)$ 在 (a, b) 内无界. (a, b) 内有界函数的曲线一定处于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

(2) 单调性: 给定函数 $y=f(x)$, 区间 (a, b) 是 $f(x)$ 的定义域或定义域内的一部分, 对于 (a, b) 内的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 若总成立 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加 (减少) 的. 若总成立 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是严格单调增加 (减少) 的.

在 (a, b) 内严格单调增加 (减少) 的函数, 其曲线随着 x 的增加而上升 (下降).

(3) 奇偶性: 给定函数 $y=f(x)$, 若对于其定义域 D_f 中的任意的 x , $-x$ 也在 D_f 中, 且满足 $f(-x)=f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是偶函数. 如果对于其定义域 D_f 中的任意的 x , $-x$ 也在 D_f 中, 且满足 $f(-x)=-f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的曲线关于 y 轴对称, 奇函数的曲线关于原点对称.

(4) 周期性: 给定函数 $y=f(x)$, 若存在一个正数 l , 对于定义域内任意的 x , $x+l$ 也在定义域内, 且 $f(x+l)=f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数, 并称 l 为 $y=f(x)$ 的周期.

周期函数的曲线有这样的特点, 对应于自变量在某一区间取值的曲线, 当区间在数轴上每右移或左移一固定距离 l (周期) 时是重复出现的.

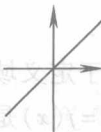
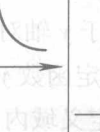
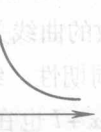
4. 基本初等函数及其图形、特性

(1) 常数函数. 形如 $y=c$ (c 是常数) 的函数叫常数函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 它的图像是过点 $(0, c)$ 且平行于 x 轴的直线.

(2) 幂函数. 形如 $y=x^\alpha$ (α 是实常数) 的函数叫幂函数. 幂函数的定义域要看 α 是什么数而定.

$y=x^\alpha$ ($\alpha=1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}$) 是最常见的幂函数, 表 1-1 列出了这些幂函数的定义域、值域、图像、奇偶性和单调性. 对幂函数 $y=x^\alpha$, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 不论 α 取什么实数, $y=x^\alpha$ 不是周期函数, 且在其定义域是无界的.

表 1-1

函数	$y=x$	$y=x^{1/2}$	$y=x^2$	$y=x^{-1}$	$y=x^{-1/2}$	$y=x^3$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
奇偶性	奇	非奇非偶	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	单调增加	单调增加	$(-\infty, 0)$ 单调减少 $(0, +\infty)$ 单调增加	$(-\infty, 0)$ 单调减少 $(0, +\infty)$ 单调减少	单调减少	单调增加
图像						

(3) 指数函数. 形如 $y = a^x$ ($a \neq 1, a > 0$) 的函数叫指数函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$.

指数函数的图像是经过 y 轴上的点 $(0, 1)$ 的下降曲线或上升曲线. 如果 $0 < a < 1$, 由于 $y = a^x$ 在其定义域上单调减少, 因此曲线是下降的; 如果 $a > 1$, 由于 $y = a^x$ 在其定义域上单调增加, 因此曲线是上升的 (图 1-1).

指数函数 $y = a^x$ 不具有周期性和奇偶性, 在其定义域上也是无界的.

另外, $y = a^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图像关于 y 轴对称 (图 1-2).

常用的指数函数是 $y = e^x$, $e = 2.71828\cdots$, e 是无理数.

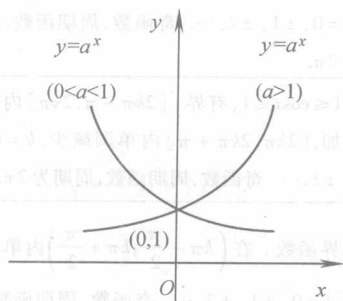


图 1-1

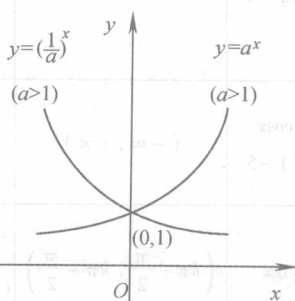


图 1-2

(4) 对数函数. 形如 $y = \log_a x$ ($a \neq 1, a > 0$) 的函数称为对数函数, 其定义域是 $(0, +\infty)$, 值域是 $(-\infty, +\infty)$. 对数函数是指数函数 $y = a^x$ 的反函数, 所以它们的图像关于直线 $y = x$ 对称 (图 1-3).

对数函数 $y = \log_a x$ 不具有周期性和奇偶性, 在其定义域内也是无界的. 另外, $y = \log_a x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的图像关于 x 轴对称.

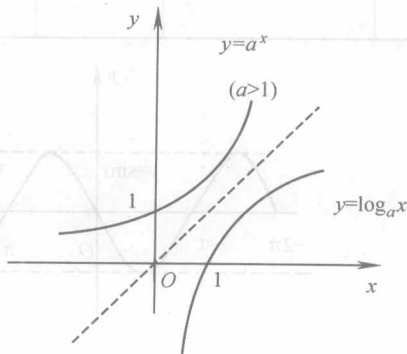


图 1-3

常用的对数函数是以 e 为底的对数: $y = \log_e x$, 称为自然对数, 通常记为 $y = \ln x$.

(5) 三角函数. 主要是指正弦函数 $y = \sin x$, 余弦函数 $y = \cos x$, 正切函数 $y = \tan x$, 余切函数 $y = \cot x$, 它们的定义域、值域、图像和它们的特性见表 1-2.

表 1-2

函数及图像	定义域	值域	主要特性
$y = \sin x$ 见图 1-4	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	$-1 \leq \sin x \leq 1$, 有界. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加, $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 奇函数, 周期函数, 周期为 2π .
$y = \cos x$ 见图 1-5	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	$-1 \leq \cos x \leq 1$, 有界. $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 内单调增加, $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 内单调减少, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 偶函数, 周期函数, 周期为 2π .
$y = \tan x$ 见图 1-6	$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$(-\infty, +\infty)$	无界函数. 在 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 奇函数, 周期函数, 周期为 π .
$y = \cot x$ 见图 1-7	$(k\pi, k\pi + \pi)$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$(-\infty, +\infty)$	无界函数. 在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 奇函数, 周期函数, 周期为 π .

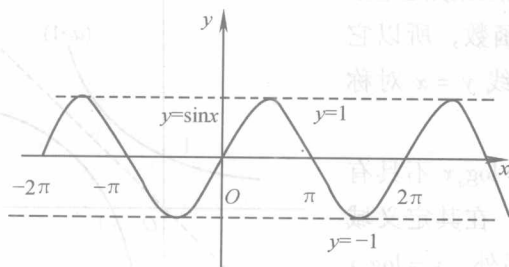


图 1-4

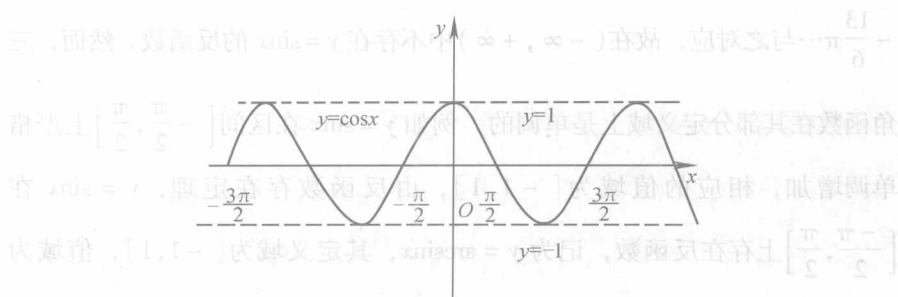


图 1-5

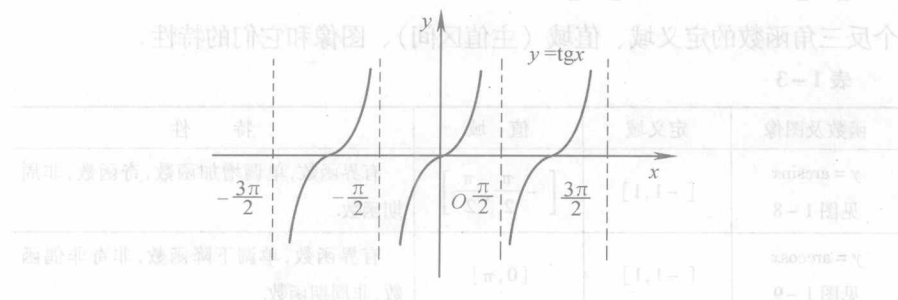


图 1-6

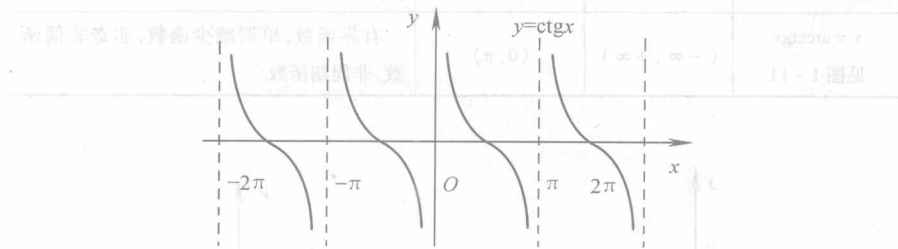


图 1-7

(6) 反三角函数. 主要指反正弦函数 $y = \arcsin x$, 反余弦函数 $y = \arccos x$, 反正切函数 $y = \operatorname{arctg} x$ 和反余切函数 $y = \operatorname{arctg} x$, 它们分别是三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ 和 $y = \operatorname{ctg} x$ 的反函数.

请注意反三角函数值域的确定. 由于三角函数是周期函数, 对于函数值域上的每一个 y 值, 对应着无穷多个实数 x , 所以三角函数在整个定义域

里不存在反函数. 比如, 正弦函数 $y = \sin x$, 对于 $y = -\frac{1}{2}$, x 有 $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$,

$-\frac{13}{6}\pi \cdots$ 与之对应, 故在 $(-\infty, +\infty)$ 中不存在 $y = \sin x$ 的反函数. 然而, 三

角函数在其部分定义域上是单调的. 例如 $y = \sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调增加, 相应的值域为 $[-1, 1]$, 由反函数存在定理, $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上存在反函数, 记为 $y = \arcsin x$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 我们称 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 为 $y = \arcsin x$ 的主值区间. 表 1-3 列出了 4 个反三角函数的定义域、值域 (主值区间)、图像和它们的特性.

表 1-3

函数及图像	定义域	值域	特性
$y = \arcsin x$ 见图 1-8	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	有界函数, 单调增加函数, 奇函数, 非周期函数.
$y = \arccos x$ 见图 1-9	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	有界函数, 单调下降函数, 非奇非偶函数, 非周期函数.
$y = \arctg x$ 见图 1-10	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	有界函数, 单调增加函数, 奇函数, 非周期函数.
$y = \operatorname{arccot} x$ 见图 1-11	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	有界函数, 单调减少函数, 非奇非偶函数, 非周期函数.

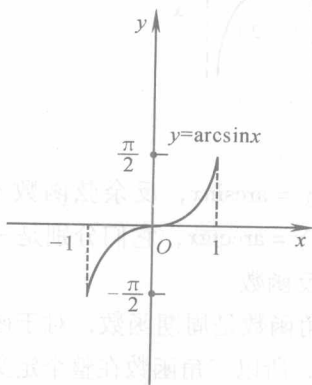


图 1-8

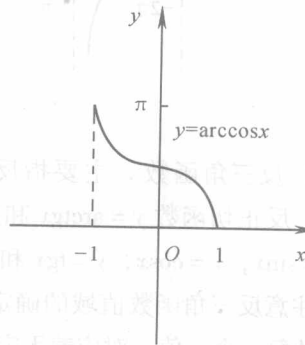


图 1-9

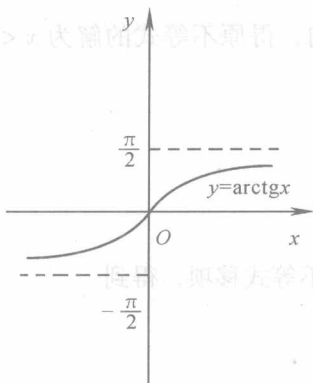


图 1-10

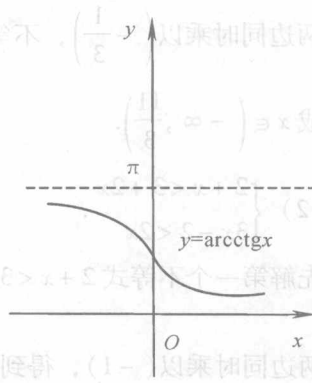


图 1-11

5. 初等函数

初等函数是由常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数 6 种基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算而得到的函数.

6. 建立简单问题的函数关系.

二、典型例题分析

例 1 求解下列不等式或不等式组.

- (1) $\frac{x+3}{2} > \frac{3x-1}{3}$; (2) $\begin{cases} 2+x < 3+2x \\ 3x-2 < 2x \end{cases}$;
 (3) $4x^2 + 12x + 9 < 0$; (4) $2x^2 + x - 1 < 0$.

解 求函数定义域时, 往往要求解不等式, 从而得到自变量的取值范围.

- (1) $\frac{x+3}{2} > \frac{3x-1}{3}$. 不等式两边同时乘以 6, 得到

$$3(x+3) > 2(3x-1);$$

两边去括号, 移项得

$$-3x > -11.$$

上式两边同时乘以 $\left(-\frac{1}{3}\right)$, 不等号改变方向, 得原不等式的解为 $x < \frac{11}{3}$,

或写成 $x \in \left(-\infty, \frac{11}{3}\right)$.

$$(2) \begin{cases} 2+x < 3+2x \\ 3x-2 < 2x \end{cases}$$

先解第一个不等式 $2+x < 3+2x$, 对该不等式移项, 得到

$$-x < 1,$$

上式两边同时乘以 (-1) , 得到

$$x > -1;$$

再解第二个不等式 $3x-2 < 2x$, 对该不等式移项, 得到

$$x < 2.$$

综合不等式 $x > -1$ 和 $x < 2$, 得到不等式组的解为 $-1 < x < 2$, $x \in (-1, 2)$.

(3) $4x^2 + 12x + 9 < 0$. 这是一元二次不等式. 因为 $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$, 不管 x 取什么实数, $(2x+3)^2 \geq 0$ 总是成立, 即所给不等式无解.

(4) $2x^2 + x - 1 < 0$. 因为 $2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$, 所以原不等式化为

$$(x+1)(2x-1) < 0,$$

上述不等式与下列两个不等式组同解,

$$(i) \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases}, (ii) \begin{cases} x+1 < 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases},$$

不等式组(i)的解为 $-1 < x < \frac{1}{2}$, 而不等式组(ii)无解, 所以不等式 $2x^2 + x - 1 < 0$ 的解为 $-1 < x < \frac{1}{2}$, 或 $x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

例2 用区间表示满足所给不等式解 x 的范围.

$$(1) |x| > |x-1|; \quad (2) 0 < |x| \leq 2;$$

$$(3) |x-2| < \varepsilon (\varepsilon > 0); \quad (4) |x+1| \geq 2.$$

解 所给不等式都是绝对值不等式, 用区间表示满足不等式的 x 的集合, 需要求解这些绝对值不等式, 这时一般要用到下列两个结果:

1°若 $|x| < \varepsilon$, 则 $-\varepsilon < x < \varepsilon$;

2°若 $|x| > \varepsilon$, 则 $x > \varepsilon$ 或 $x < -\varepsilon$;

(1) $|x| > |x-1|$. 原不等式可改写为

$$-|x| < x-1 < |x|,$$

若 $x < 0$, 则有 $x < x-1 < -x$, 由 $x < x-1$, 得到 $0 < -1$, 不合理, 故 x 不可能小于零;

若 $x > 0$, 则有 $-x < x-1 < x$, 由 $x-1 < x$, 得到 $-1 < 0$; 由 $-x < x-1$, 得到 $x > \frac{1}{2}$.

由于 $x=0$ 不满足原不等式, 所以, 所给不等式的解为 $x > \frac{1}{2}$, 即 $x \in$

$(\frac{1}{2}, +\infty)$ (图 1-12 (a)).

(2) $0 < |x| \leq 2$. 由 $0 < |x| \leq 2$ 的左边不等式 $0 < |x|$ 可知, $x \neq 0$; 由 $|x| \leq 2$ 可得到 $-2 \leq x \leq 2$. 所以, 不等式的解为 $-2 \leq x < 0$ 或 $0 < x \leq 2$, 即 $x \in [-2, 0)$ 或 $x \in (0, 2]$ (图 1-12 (b)).

从题 (2) 可知, $|x| \leq \varepsilon$ 与 $0 < |x| \leq \varepsilon$ 的解是不同的, $|x| \leq \varepsilon$ 的解中包含了 $x=0$ 点, 而 $0 < |x| \leq \varepsilon$ 的解中没有包含 $x=0$ 点.

(3) $|x-2| < \varepsilon (\varepsilon > 0)$. 所给绝对值不等式是以点 $x=2$ 为中心、半径为 ε 的邻域 $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ (图 1-12 (c)).

(4) $|x+1| \geq 2$. 所给绝对值不等式与不等式 $x+1 \geq 2$ 或 $x+1 \leq -2$ 同解, 故所求区间为 $[1, +\infty)$ 或 $(-\infty, -3]$ (图 1-12 (d)).

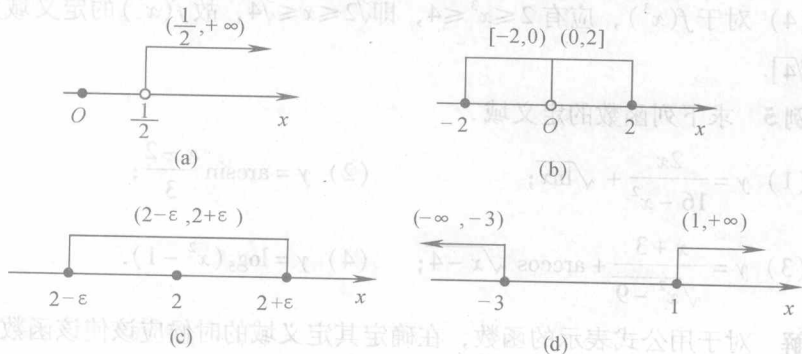


图 1-12

例3 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ -2, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

试求函数 $g(x) = f(2x) + f(x-5)$ 的定义域.

解 要使 $g(x)$ 有意义, 须使 $f(2x)$ 和 $f(x-5)$ 同时有意义. 从已知条件可知, $f(x)$ 的定义域为 $0 \leq x \leq 4$, 故 x 应同时满足不等式 $0 \leq 2x \leq 4$ 和 $0 \leq x-5 \leq 4$, 即 $0 \leq x \leq 2$ 且 $5 \leq x \leq 9$. 显然, 要使 x 同时满足不等式 $0 \leq x \leq 2$ 和 $5 \leq x \leq 9$ 是不可能的, 所以 $g(x)$ 无意义.

例4 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[2, 4]$, 试求下列函数的定义域.

(1) $f(x+1)$; (2) $f(ax)$ ($a > 0$);

(3) $f(\sin x + 1)$; (4) $f(x^3)$.

解 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2, 4]$, 即 $2 \leq x \leq 4$, 所以

(1) 对于 $f(x+1)$, 应有 $2 \leq x+1 \leq 4$, 即 $1 \leq x \leq 3$, 故 $f(x+1)$ 的定义域为 $[1, 3]$;

(2) 对于 $f(ax)$ ($a > 0$), 应有 $2 \leq ax \leq 4$, 即 $\frac{2}{a} \leq x \leq \frac{4}{a}$, 故 $f(ax)$ 的定义域为 $[\frac{2}{a}, \frac{4}{a}]$;

(3) 对于 $f(\sin x + 1)$, 应有 $2 \leq \sin x + 1 \leq 4$, 即 $1 \leq \sin x \leq 3$, 故 $f(\sin x + 1)$ 在 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 上有定义;

(4) 对于 $f(x^3)$, 应有 $2 \leq x^3 \leq 4$, 即 $\sqrt[3]{2} \leq x \leq \sqrt[3]{4}$, 故 $f(x^3)$ 的定义域为 $[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}]$.

例5 求下列函数的定义域.

(1) $y = \frac{2x}{16-x^2} + \sqrt{\ln x}$;

(2) $y = \arcsin \frac{x-2}{3}$;

(3) $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} + \arccos \sqrt{x-4}$;

(4) $y = \log_5(x^2-1)$.

解 对于用公式表示的函数, 在确定其定义域的时候应该使该函数在实数范围内有意义. 所以, 对于形如 $y = \frac{1}{f(x)}$ 的函数, 要求 $f(x) \neq 0$; 对