二十一世纪普通高等教育系列教材

线性代数

XIANXINGDAISHU

主编 ◉ 张万芹

CUCP 中国传媒大学出版社

二十一世纪普通高等教育系列教材

线性代数

XIANXINGDAISHU

主　编　张万芹　吴　刚　陈付贵

副主编　刘　娟　崔红新　胡乔林

编　者　张万芹　吴　刚　陈付贵

刘　娟　崔红新　胡乔林

马宝林　陈玉珍　赵　磊

赵营峰　潘全香

CUCP 中国传媒大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张万芹主编．—北京：中国传媒大学出版社，2008.6

ISBN 978-7-81127-323-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．张…　Ⅲ．线性代数—高等学校—教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 086634 号

线性代数

主　　编	张万芹
责任编辑	赵晓磊
责任印制	曹　辉
出 版 人	蔡　翔
出版发行	中国传媒大学出版社(原北京广播学院出版社) 北京市朝阳区定福庄东街 1 号　邮编　100024 电话:010-65450532　65450528　传真:010-65779405 http://www.cucp.com.cn
经　　销	新华书店总店北京发行所
印　　刷	北京市通县华龙印刷厂
开　　本	787×1092mm　1/16
印　　张	13.25
版　　次	2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81127-323-6/O·323　　**定　　价**:25.00 元

前言

FOREWORD

为了适应高等教育的需要，培养和造就更多实用型、创新型的复合型人才，根据教育部的相关规定，我们在听取广大一线教师的教学建议后，特邀请和组织了一批优秀教师和业内专家编撰了《线性代数》这本教材。

线性代数是普通高等院校开设的一门重要的基础课，在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着广泛的应用。

本书汲取了多位具有丰富教学经验的一线教师的教学思想、方法，在内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂；在概念的引入、理论的分析和例题的演算等环节上尽可能多地反映代数与数学建模结合的思想，力求做到论述详尽、易懂，内容适用、够用，便于读者自学使用。

本书注重对基本概念、基本理论和基本方法的阐述，力求简洁、清晰，强调直观和应用背景，着重讲解方法的运用技巧，融思想性、科学性和实用性于一体。既便于学生接受，又便于实际教学。书中例题与习题的取材注重启发性、应用性和综合性，注重培养学生分析具体问题和解决实际问题的能力，以期达到抛砖引玉、举一反三之效。本书具有以下特色：

一、实例教学，增强学生建立数学模型的意识并提高其解决实际问题的能力；

二、淡化抽象的概念与定理，讲解深入浅出，便于学生自学；

三、每章最后都附有相关的背景知识和数学史的相关内容，增强了趣味性，有助于学生深入理解课本知识；

四、全书重视例题和习题的设计和搭配，除配有巩固课程的作业外还选配了部分能力提高题，有助于学生复习、巩固并提高。

全书共六章，参考学时为 54 学时。各章参考学时分别为：第一章行列式共用 8 学时，第二章矩阵及其运算共用 10 学时，第三章线性方程组与向量组

的线性相关性共用 14 学时，第四章向量空间共用 8 学时，第五章相似矩阵及二次型共用 14 学时。注有“*”的内容可根据专业的需要自行删减。

本书在编写出版过程中得到了中国传媒大学出版社、河南科技学院教务处和数学系领导及全体教师的大力支持和帮助，在此表示深深的谢意！

鉴于编者的水平有限，书中内容、体例、结构不当甚至错误之处在所难免，敬请各位专家、学者不吝赐教，欢迎读者批评指正以便再版时修订。

编　者

CONTENTS 目录

第1章　行列式

历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具. 特别是在本门课程中，它是学习矩阵、线性方程组与向量组的线性相关性等内容的一种重要工具.

本章讨论行列式的概念、性质及运算方法，主要包括以下几个问题：

- 排列的定义、逆序数的求法及对换的概念；
- 二阶、三阶行列式的概念；
- n 阶行列式的定义；
- n 阶行列式的性质及运算方法；
- 行列式按行(列)展开原理、拉普拉斯定理及它们的应用；
- 克莱姆法则.

1.1　排列和逆序

1.1.1　排列和逆序

定义 1.1.1　由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个没有重复数字的 n 元有序数组，称为一个 n 级排列，简称**排列**，记为 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$. $1\ 2\ \cdots\ n$ 称为**自然排列**. n 级排列总共有 $n!$ 个.

注意　n 级排列必须取到 $1,2,\cdots,n$ 这连续的 n 个自然数中的每一个数.

例如　2 级排列共有 2 种：12　21

3 级排列共有 6 种：123 132 213 231 312 321

定义 1.1.2　在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)$ 中，若数 $i_s > i_t$，则称数 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数.

设在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 中比 $i_s(s=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_s 前面的数共有 s_i 个，则 i_s 的逆序的个数为 s_i，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的

逆序数，即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

例 1.1.1 求下列排列的逆序数

(1)3241，(2)13524，(3)$n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1$.

解 (1)因为 3 排在首位，故其逆序的个数为 0；

在 2 的前面比 2 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；

在 4 的前面比 4 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；

在 1 的前面比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3.

易见所求排列的逆序数为

$$N(3241) = 0+1+0+3=4.$$

(2)同理

$$N(13524) = 0+0+0+2+1=3.$$

(3)同理

$$N(n\ n-1 \cdots 2\ 1) = 0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.1.3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如 例 1.1.1 中排列 3241 是偶排列，13524 是奇排列. 而对排列 $n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1$，当 $n=4k, n=4k+1$ 时，该排列为偶排列；当 $n=4k+2, 4k+3$ 时，该排列为奇排列. 自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 是一个偶排列，其逆序数为零.

1.1.2 对换

定义 1.1.4 把一个排列$(i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)$中某两个数 i_s, i_t 的位置互换，而其余数不动，得到另一个排列$(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$，这样的变换称为一个**对换**，记为$(i_s, i_t)$. 将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

例如 对排列 1234 施以对换(1,4)后得到排列 4231.

对换有如下性质：

定理 1.1.1 任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变.

这就是说，经过一次对换，奇排列变为偶排列，偶排列变为奇排列.

证明 先看相邻对换的情况.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$，显然，$a_1, \cdots, a_l, b_1, \cdots, b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a、b 两元素的逆序数变化情况为：

当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.

所以，排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再看一般情况.

设排列为 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$，对它做 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$；再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性也不同.

习题 1.1

求下列排列的逆序数，并确定排列的奇偶性：

(1)351426；　　(2)7135246；

(3)215479683；　　(4)$135\cdots(2n-1)246(2n-2)\cdots(2n)$.

1.2 二、三阶行列式

1.2.1 二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中，x_1,x_2 代表未知量，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$代表未知量的系数，b_1,b_2 代表常数项. 用消元法从(1.2.1)式中消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

同样地，从(1.2.1)式中消去 x_1，得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

x_1,x_2 即为方程组(1.2.1)的解.

为便于叙述和记忆，我们引入二阶行列式的概念.

定义 1.2.1 我们称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2.2}$$

为二阶行列式，其中数 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 叫做行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**. 元素的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和，

这种计算方法称为行列式的“对角线法则”.

如下式所示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**次对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积.

注意　把排列与逆序的定义结合起来，我们观察到二阶行列式每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号. 本节后面讨论的三阶行列式也有同样的规律.

由此规则：

当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1.2.1)的解就唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.2.3}$$

其中分母 D 是由方程组(1.2.1)的系数所确定的二阶行列式，即系数行列式. x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组有类似的规律性，请同学们学习时注意比较.

例 1.2.1　用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=-1 \\ 5x_1+3x_2=3 \end{cases}$$

解　计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1,\qquad D_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-6,\qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=11,$$

由公式(1.2.3)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-6,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=11.$$

1.2.2　三阶行列式

解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

求解此方程组，可由前两个方程消去 x_3，得到一个只含 x_1，x_2 的二元方程；再由后两个方程消去 x_3 得到另一个只含 x_1，x_2 的二元方程，这样得到一个含两个未知量的二元线性方

程组. 按照上述解二元线性方程组的方法，消去 x_2，得

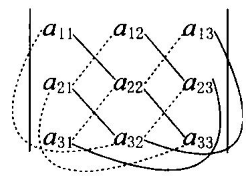
$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{32}-b_3a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$、

把 x_1 的系数记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.2.5}$$

定义 1.2.2　我们称(1.2.5)为**三阶行列式**.

由上述定义可见，三阶行列式是由三行、三列 9 个元素组成的一个符号，展开式是 6 项的代数和，每项是由不同行、不同列的 3 个元素相乘而成，3 项正、3 项负，其中正项是各实线上 3 个元素乘积；负项是各虚线上的 3 个元素的乘积. 即：



这种展开法称为行列式的**实虚线法则**.

注意　(1)对角线法则只适用于二阶和三阶行列式.

(2)三阶行列式每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号.

我们称(1.2.5)式中的 D 为三元线性方程(1.2.4)的**系数行列式**. 根据上面的算法，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq0$，那么该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2.2　解三元线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=4\\x_1-x_2+2x_3=5\\2x_1-x_2+x_3=3\end{cases}$$

解 用对角线法计算行列式，得

$$D=\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&-1&2\\2&-1&1\end{vmatrix}=8,\quad D_1=\begin{vmatrix}4&2&-1\\5&-1&2\\3&-1&1\end{vmatrix}=8,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&5&2\\2&3&1\end{vmatrix}=16,\quad D_3=\begin{vmatrix}3&2&4\\1&-1&5\\2&-1&3\end{vmatrix}=24.$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

习题 1.2

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix}1&\log_b a\\\log_a b&1\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

2. 证明等式

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}.$$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x_1+3x_2=5\\x_1-4x_2=-3\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x_1\cos\theta+x_2\sin\theta=a\\x_1\sin\theta+x_2\cos\theta=b\end{cases}$；　(3) $\begin{cases}2x_1-3x_2+2x_3=-3\\x_1+4x_2-3x_3=6\\3x_1-x_2-x_3=1\end{cases}$.

1.3 n 阶行列式

用对角线法计算二、三阶行列式，虽然简便直观，但对高于三阶的行列式，该方法就

不适用了. 为了求解 $n>3$ 的线性方程组，有必要把二、三阶行列式的概念做进一步推广. 为此，我们先对二、三阶行列式的特点加以总结.

以三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

为例，易见：

(1) 三阶行列式共有 $6=3!$ 项；

(2) 每项都是取自不同行、不同列的 3 个元素的乘积；

(3) 每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号.

所以，三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 1.3.1　由 n 行 n 列、n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 **n 阶行列式**，其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里 a_{ij} 称为行列式的元素，称

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为行列式的一般项.

注意　行列式概念中包含以下内容：

(1) 行列式由 n 行 n 列、n^2 个元素组成；

(2) 行列式由 $n!$ 项求和而成，每项是取自不同行、不同列的 n 个元素乘积，每项各元素行标按自然数顺序排列后就是行列式的一般项形式：

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n};$$

(3) 若行列式每项都写成一般项的形式，其中 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$ 是该项的符号，且列序构成 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$，若此排列为奇排列则此项取负号，若此排列为偶排列则此项取正号，所以行列式项为 $n!$ 项的代数和，它是一个数.

例 1.3.1 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式主对角线上方的元素都为零，我们称它为**下三角行列式**（主对角线下方的元素为零的行列式，称为**上三角行列式**）.

解 我们主要考察 D 的展开式中不为零的那些项. 由于第一行除 a_{11} 外其余元素都为零，所以行列式的通项中第一个元素 a_{1j_1} 只能取 a_{11}；而第二个元素 a_{2j_2} 不能选取 a_{21}，这是因为展开式的每一项中不能存在两个同列的元素，故只能选取 a_{22}；同理元素 a_{3j_3} 只能取 a_{33}；…；末行只能选取 a_{nn}. 从而

$$D=(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理有

上三角行列式 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

主对角行列式 $$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

次对角行列式 $$\Lambda=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

如果我们把 n 阶行列式每项的列标按自然顺序排列，则行标是 n 级排列中的某一个排列，这样便得到行列式的另一个定义式

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \tag{1.3.1}$$

因为把 n 阶行列式 D 的一般项

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

的列标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经 N 次对换变成自然排列 $1\ 2\cdots n$ 的同时，相应的行标排列 $12\cdots n$ 经 N 次对换就变成了排列 $j_1j_2\cdots j_n$. 即

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

根据定理 1.1.1 的推论，对换次数 N 与 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性，而 N 与 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 也有相同的奇偶性，从而 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 有相同的奇偶性，所以

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

因此可得(1.3.1)式是行列式的等价定义.

n 阶行列式 D 的一般项还可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.3.2}$$

其中 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 均为 n 级排列.(请同学们自己证明此结论)

例 1.3.2　在 6 阶行列式中，确定下列两项应带的符号：

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；　　　　(2) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

解　(1) 由定义 1.3.1，可得：

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$$

$N(431265)=0+1+2+2+0+1=6$，所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 前面应带正号.

(2)由(1.3.2)式，可得：

行标排列的逆序数 $N(341562)=0+0+2+0+0+4=6$，

列标排列的逆序数 $N(234165)=0+0+0+3+0+1=4$，

所以 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 前面应带正号.

例 1.3.3　利用行列式的定义计算 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解　$D_n=(-1)^{N((n-1)(n-2)\cdots 1)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{nn}$

$=(-1)^{N((n-1)(n-2)\cdots 1)}1\times 2\cdots(n-1)n=(-1)^{N((n-1)(n-2)\cdots 1)}n!$

所以
$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

习题 1.3

1. 确定下列 5 阶行列式的项所带的符号：

(1) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$；　　　　(2) $a_{24}a_{32}a_{15}a_{43}a_{51}$.

2. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

3. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式的值为零.

4. 用行列式定义确定下列行列式的展开式中项 x^3，x^4 的系数.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & x-2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & x & 0 \\ 5 & 3 & 1 & x-1 \end{vmatrix}.$$

5. 利用行列式的定义计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.4 行列式的性质

从上节的学习中我们了解到在计算行列式时，如果行列式为对角形、三角形或是所含有的零元素较多，那么这个行列式的值就比较容易给出. 而对于一般的行列式来讲，这种方法就显得比较繁琐了. 下面将介绍行列式的基本性质，利用这些性质可以大大简化行列式的计算.

定义 1.4.1 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T 或 D'，即

$$\text{若 } D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，\text{则 } D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由定义可知，行列式 D 中第 i 行第 j 列上的元素 a_{ij} 即为 D^T 中的第 j 行第 i 列位置上的元素 a_{ji}.

性质 1.4.1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^T=D$.

证 设 D^T 的第 i 行第 j 列元素为 a'_{ij}，由转置定义 $a'_{ij}=a_{ji}$ 及(1.3.1)式有

$$\begin{aligned} D^T &= \sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a'_{j_11}a'_{j_22}\cdots a'_{j_nn} \\ &= \sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D. \end{aligned}$$

注意　性质 1.4.1 说明行列式的行和列具有同等地位. 因而凡是对行具有的性质，对列也一样具有，反之亦然. 故以下所讨论的行列式性质中，只对行的情况加以证明.