NUMERICAL ANALYSIS OF STRUCTURAL DYNAMICS

结构动力实用数值分析

◎庞 苗 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

结构动力实用数值分析

庞　苗　编著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构动力实用数值分析/庞苗编著. —杭州:浙江大学出版社,2008. 9

ISBN 978-7-308-06247-3

Ⅰ. 结… Ⅱ. 庞… Ⅲ. 土木工程—结构动力分析 Ⅳ. TU311. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 154364 号

结构动力实用数值分析

庞 苗 编著

责任编辑 石国华
封面设计 俞亚彤
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(网址: http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
排 版 星云光电图文制作工作室
印 刷 临安市曙光印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 6.75
字 数 156 千
版 印 次 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-06247-3
定 价 15.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

内容简介

本书以结构动力学理论为基础，系统地介绍了结构动力数值分析的实用方法，包括单自由度系统、多自由度系统相关线性、非线性动力数值分析方法，结构减振控制数值分析方法，能量分析方法等，并以实际结构数值模型为背景，结合作者的相关研究成果，给出了相关结构动力数值分析的实际应用。

本书可作为高等学校土木工程相关专业本科高年级或研究生结构动力数值分析部分的教学参考书，也可供相关技术人员、科研人员参考。

前　言

随着计算技术及数值分析方法的进步，结构动力数值分析已成为土木工程结构设计分析领域中一门不可或缺的技术，同时也是科研工作者进行科学研究的有力工具，学习并掌握工程结构动力数值分析技术对今后的学习及工作非常有益。

本书以结构动力学理论为基础，系统地介绍了结构动力数值分析的实用方法，包括Newmark-β法、Wilson-θ法、直接积分法及相关非线性分析方法、结构减振控制数值分析及常用算法、结构减振控制能量分析方法等，并以实际结构数值模型为背景，给出了相关结构动力数值分析应用实例。

本书的内容共分五章，第一、二章作为入门，详细介绍了单自由度系统、多自由度系统结构动力反应的实用线性、非线性数值分析方法、数值模型的近似简化方法等；第三章重点介绍了结构减振控制分析及常用算法；第四章主要介绍了结构减振控制的能量分析方法；最后，第五章结合作者的相关研究成果，给出了相关结构动力数值分析的实际应用。建议读者在阅读过程中，将结构动力学基本知识结合数值分析方法程序设计进行，这对深入理解结构动力数值分析的方法将大有帮助。

本书在编写出版过程中，得到了浙江大学出版社的大力支持，美国 University of Utah 土木工程系 Kevin W. 教授在本书编写过程中给予了很大的支持，研究生任斌、高洪伟等为本书翻译、整理了许多有益的文献资料，作者在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，书中难免有许多不足之处甚至错误，热忱欢迎专家和读者批评指正。

编著者

2008 年 8 月 25 日

目　录

第一章 单自由度系统动力反应数值分析

1.1 概 述

单自由度动力系统有许多种形式，其中，弹簧—质点系统是最常采用的典型单自由度系统模型。根据牛顿第二定律，动力系统受到的外力总和应等于其惯性力，即

$$\sum F = F_s + F_d + F_e = -kx - c\dot{x} + F_e = m\ddot{x} \tag{1.1}$$

其中，F 表示系统的外力；F_s、F_d 及 F_e 分别表示系统恢复力、阻尼力及外部激励力；x 表示单自由度系统质点的相对位移，它是时间 t 的函数；m、k、c 分别表示系统的质量、刚度和阻尼系数。将式(1.1)移项，可得

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_e(t) \tag{1.2}$$

式(1.2)就是系统的动力平衡方程，一般称为系统的运动方程。式(1.2)是一个常系数线性二阶微分方程。该系统的动力响应需结合系统的初值条件求解。通常采用质点的初始位移，$x(0)=x_0$ 和初始速度 $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ 求解。

该线性二阶微分方程的解包含两部分：齐次解 $x_h(t)$ 和特解 $x_p(t)$。当系统不受外部作用力时，齐次解 $x_h(t)$ 满足相应的齐次微分方程

$$m\ddot{x}_h(t) + c\dot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0 \tag{1.3}$$

齐次解的响应为初始条件（初始位移 x_0 和初始速度 $\dot{x}_0$）的函数。非齐次解（特解）的响应 $x_p(t)$ 为外部作用力的函数，满足微分方程

$$m\ddot{x}_p(t) + c\dot{x}_p(t) + kx_p(t) = F_e(t) \tag{1.4}$$

根据微分方程理论，原式的通解 $x(t)$ 为齐次解 $x_h(t)$ 和特解 $x_p(t)$ 之和，即 $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$，且满足

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= m(\ddot{x}_h + \ddot{x}_p) + c(\dot{x}_h + \dot{x}_p) + k(x_h + x_p) \\ &= (m\ddot{x}_h + c\dot{x}_h + kx_h) + (m\ddot{x}_p + c\dot{x}_p + kx_p) \\ &= 0 + F_e(t) \\ &= F_e(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2 结构动力分析的状态空间法

状态空间法求解系统动力响应是解决工程结构动力分析问题的主要手段之一。具体

的结构工程学应用范围包括:建筑物中采用的人造阻尼器、建筑物中安装的基础隔振装置以及为减少地震和风振响应而采用的结构减振控制方法等。

状态空间法采用位移和速度作为独立变量来分析系统响应,这两个变量组成的向量称为系统的“状态”。式(1.2)给出的动力平衡方程写成标准形式为

$$\ddot{x}(t)+2\zeta\omega_n\dot{x}(t)+\omega_n^2x(t)=F_e(t)/m \tag{1.6}$$

其中,ζ 为系统的阻尼比;ω_n 为系统无阻尼自振频率。定义

$$\boldsymbol{z}(t)=\begin{Bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

它满足式(1.6)的如下等效形式

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}}(t)&=\begin{Bmatrix}\dot{x}(t)\\ \ddot{x}(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\zeta_n\omega_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ F_e(t)/m\end{Bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\zeta_n\omega_n\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t)+\begin{Bmatrix}0\\ F_e(t)/m\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{1.8}$$

定义

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\zeta_n\omega_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{Bmatrix}0\\ F_e(t)/m\end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

式(1.8)可化为

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{F}(t) \tag{1.10}$$

式(1.10)为一阶线性矩阵微分方程,称为连续状态空间的运动方程。它与式(1.6)所示的二阶线性微分方程等价。尽管式(1.10)是矩阵形式的微分方程,解该方程的方法与解相应的代数一阶线性微分方程方法相同。因此,一般来说对于任何满足时间 $t\geqslant t_0$ 的解(其中 t_0 表示系统发生振动的初始时刻),都可以写成

$$\boldsymbol{z}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{z}(t_0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_{t_0}^{T}e^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{F}(s)\mathrm{d}s \tag{1.11}$$

其中 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 定义为

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots \tag{1.12}$$

如果在初始时刻($t_0=0$),给定系统初始条件,则式(1.11)可写成

$$\boldsymbol{z}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}_0+\int_0^{T}e^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{F}(s)\mathrm{d}s \tag{1.13}$$

其中

$$\boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{z}(0)=\begin{Bmatrix}x(0)\\ \dot{x}(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_0\\ \dot{x}_0\end{Bmatrix} \tag{1.14}$$

式(1.13)可以看做齐次解和特解的组合,第一项为考虑初始条件的齐次解;第二项为特解,以对施力函数在时域积分的形式给出。当系统处于初始时刻(初始位移或初始速度)时,该特解的值为零,因有

$$\boldsymbol{z}_p(0)=\int_0^0 e^{\boldsymbol{A}(t-s)}F(s)\mathrm{d}s=e^{\boldsymbol{A}t}(0)=0 \tag{1.15}$$

矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 通常称为状态传递矩阵,它和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数相同。对单自由度系统,为 2×2

阶的。当给定时间 t、固有频率 ω_n 以及临界阻尼比 ζ 时，计算 e^{At} 的解析式可采用数值方法求解[式(1.12)]。同时，也可以采用理论分析导出其精确解，现以 2×2 阶的传递矩阵为例，介绍如下。

首先考虑最简单的情况。当指数函数的指数是对角阵时，可以将指数分配给对角阵的每一项，即

$$\exp\begin{bmatrix}\lambda_1 t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 t & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\tag{1.16}$$

为证明这一关系，将式(1.16)的等号左边用式(1.12)给出的形式进行指数级数展开。因为指数级数展开的每一项都包含一个特定次数的对角阵幂积(与自身相乘一定次数的矩阵)，进行这项运算就可以将对角阵的每一项都化为该特定次数幂的形式。然后将展开式的每一项相加，结果就是式(1.16)等号右边的表达式形式。具体如下：

$$\begin{aligned}\exp\begin{bmatrix}\lambda_1 t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 t & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n t\end{bmatrix}&=\boldsymbol{I}+\begin{bmatrix}\lambda_1 t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 t & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n t\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\lambda_1 t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 t & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n t\end{bmatrix}^2+\cdots\\
&=\boldsymbol{I}+\begin{bmatrix}\lambda_1 t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 t & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n t\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\lambda_1^2 t^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^2 t^2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 t^2\end{bmatrix}+\cdots\\
&=\begin{bmatrix}1+\lambda_1^2 t+\frac{1}{2!}\lambda_1^2 t^2+\cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1+\lambda_2^2 t+\frac{1}{2!}\lambda_2^2 t^2+\cdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1+\lambda_n^2 t+\frac{1}{2!}\lambda_n^2 t^2+\cdots\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1.17}$$

由以上推导可见，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化非常重要。这可以利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量对其进行对角化。

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1 和 λ_2，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2$，则根据矩阵特征值问题的性质可知，它们满足

$$\boldsymbol{A\Phi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\Phi}_1,\quad \boldsymbol{A\Phi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\Phi}_2\tag{1.18}$$

设对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为含有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值作为对角项的特征值矩阵，矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为以 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

作为列向量的特征向量矩阵，即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=[\boldsymbol{\Phi}_1\quad \boldsymbol{\Phi}_2] \tag{1.19}$$

由式(1.18)可得

$$\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\Phi}_1\quad \boldsymbol{\Phi}_2]=[\boldsymbol{\Phi}_1\quad \boldsymbol{\Phi}_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{T\Lambda} \tag{1.20}$$

将式(1.20)右乘 $\boldsymbol{T}^{-1}$，得

$$\mathbf{A}=\boldsymbol{T\Lambda T}^{-1} \tag{1.21}$$

故有

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots\\
&=\boldsymbol{TT}^{-1}+(\boldsymbol{T\Lambda T}^{-1})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{T\Lambda T}^{-1})(\boldsymbol{T\Lambda T}^{-1})t^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{T\Lambda T}^{-1})(\boldsymbol{T\Lambda T}^{-1})(\boldsymbol{T\Lambda T}^{-1})t^3+\cdots\\
&=\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Lambda}t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{\Lambda}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{\Lambda}t)^3+\cdots\right)\boldsymbol{T}^{-1}\\
&=\boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{T}^{-1}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

由以上推导可见，求解单自由度系统的状态传递矩阵 $e^{\mathbf{A}t}$ 的解析式，首先要求解 $\mathbf{A}$ 的所有特征值和特征向量。为此，可令$(\mathbf{A}-\lambda\boldsymbol{I})$矩阵的行列式为 0，即

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -\omega^2 & -2\zeta\omega_{\rm n}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\zeta\omega_{\rm n}\lambda+\omega_{\rm n}^2=0 \tag{1.23}$$

求解得到 $\mathbf{A}$ 的所有特征值和特征向量后，即可根据式(1.22)求得状态传递矩阵 $e^{\mathbf{A}t}$ 的解析表达式。

1.3 Newmark-β 法

Newmark-β 法数值解法的基本思想是，先将结构反应和激励荷载项在时间域上离散化，递推求解，即已知 t_k 时刻系统的响应和力的所有信息，递推求解 t_{k+1} 时刻的相应物理量(位移、速度、加速度等)。通常联立积分形式的方程求解。

考虑单自由度系统的动力微分方程

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F_{\rm e}(t) \tag{1.24}$$

$$\ddot{x}(t)+2\zeta\omega_{\rm n}\dot{x}(t)+\omega_{\rm n}^2x(t)=F_{\rm e}(t)/m \tag{1.25}$$

联立另两个积分式

$$\dot{x}(t)=\frac{{\rm d}x(t)}{{\rm d}t},\quad \ddot{x}(t)=\frac{{\rm d}\dot{x}(t)}{{\rm d}t}=\frac{{\rm d}^2x(t)}{{\rm d}t^2} \tag{1.26}$$

考虑到求解精度要求，通常不采用式(1.26)所示的微分形式的方程，而采用积分形式的方程来求解。采用积分形式的方程求解的优势在于，能够在计算区域内获得较高的计算精度。式(1.26)可写为

$$\dot{x}(t)=\dot{x}(t_0)+\int_{t_0}^{T}\ddot{x}(s)\mathrm{d}s,\quad x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{T}\dot{x}(s)\mathrm{d}s \tag{1.27}$$

令

$$t_{k+1}=t,\quad t_k=t_0,\quad \Delta t=t_{k+1}-t_k$$

则式(1.27)可写为

$$\dot{x}_{k+1}=\dot{x}_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\ddot{x}(s)\mathrm{d}s,\quad x_{k+1}=x_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot{x}(s)\mathrm{d}s \tag{1.28}$$

为了把式(1.28)中的被积函数离散化，需将连续的加速度函数 $\ddot{x}(t)$ 离散化。把连续函数离散化的方法有很多种，结构工程中经常用到的三种形式为恒加速度法、恒平均加速度法和线性加速度法。

(1)恒加速度法就是假设在时间区间 t_k 到 t_{k+1} 内加速度为常数，在整个时间区间内加速度的值取 t_k 时刻的加速度。即

$$\ddot{x}(t)=\ddot{x}(t_k)=\ddot{x}_k,\quad t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1} \tag{1.29}$$

根据式(1.28)，可解得系统的速度和位移，即

$$\dot{x}_{k+1}=\dot{x}_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\ddot{x}_k\mathrm{d}t=\dot{x}_k+\ddot{x}_k\Delta t \tag{1.30}$$

$$x_{k+1}=x_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}[\dot{x}_k+\ddot{x}_k(t-t_k)]\mathrm{d}t=x_k+\dot{x}_k\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{x}_k(\Delta t)^2 \tag{1.31}$$

注意到，式(1.30)和(1.31)的右侧仅包括 t_k 时刻的信息。

(2)恒平均加速度法假设在时间区间 t_k 到 t_{k+1} 内加速度均为常数，且加速度的值等于 t_k 到 t_{k+1} 时刻加速度的平均值，即

$$\ddot{x}(t)=\frac{1}{2}[\ddot{x}(t_k)+\ddot{x}(t_{k+1})]=\frac{1}{2}(\ddot{x}_k+\ddot{x}_{k+1}),\quad t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1} \tag{1.32}$$

类似地，根据式(1.28)，可得速度和位移分别为

$$\dot{x}_{k+1}=\dot{x}_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{2}(\ddot{x}_k+\ddot{x}_{k+1})\mathrm{d}t=\dot{x}_k+\frac{1}{2}\ddot{x}_k\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{x}_{k+1}\Delta t \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\dot{x}_k+\frac{1}{2}(\ddot{x}_k+\ddot{x}_{k+1})(t-t_k)\right]\mathrm{d}t\\&=x_k+\dot{x}_k\Delta t+\frac{1}{4}\ddot{x}_k(\Delta t)^2+\frac{1}{4}\ddot{x}_{k+1}(\Delta t)^2\end{aligned} \tag{1.34}$$

(3)线性加速度法假设加速度在时间区间 t_k 到 t_{k+1} 内呈线性变化，即

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t)&=\ddot{x}(t_k)+\left[\frac{\ddot{x}(t_{k+1})-\ddot{x}(t_k)}{t_{k+1}-t_k}\right](t-t_k)\\&=\ddot{x}_k+\left(\frac{\ddot{x}_{k+1}-\ddot{x}_k}{t_{k+1}-t_k}\right)(t-t_k),\quad t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}\end{aligned} \tag{1.35}$$

此时，速度和位移为

$$\dot{x}_{k+1}=\dot{x}_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\ddot{x}_k+\left(\frac{\ddot{x}_{k+1}-\ddot{x}_k}{t_{k+1}-t_k}\right)(t-t_k)\right]\mathrm{d}t=\dot{x}_k+\frac{1}{2}\ddot{x}_k\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{x}_{k+1}\Delta t \tag{1.36}$$

$$x_{k+1}=x_k+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\dot{x}_k+\ddot{x}_k(t-t_k)+\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{x}_{k+1}-\ddot{x}_k}{t_{k+1}-t_k}\right)(t-t_k)^2\right]\mathrm{d}t$$

$$=x_k+\dot{x}_k\Delta t+\frac{1}{3}\ddot{x}_k(\Delta t)^2+\frac{1}{6}\ddot{x}_{k+1}(\Delta t)^2 \tag{1.37}$$

结构工程中最常用的数值积分方法之一——Newmark-β 法，是上述三种情况的统一，取三个瞬时方程的形式为

$$\ddot{x}_{k+1}+2\zeta\omega_n\dot{x}_{k+1}+\omega_n^2x_{k+1}=F_{k+1}/m \tag{1.38}$$

$$\dot{x}_{k+1}=\dot{x}_k+(1-\delta)\Delta t\,\ddot{x}_k+\delta\Delta t\,\ddot{x}_{k+1} \tag{1.39}$$

$$x_{k+1}=x_k+\dot{x}_k\Delta t+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(\Delta t)^2\ddot{x}_k+\alpha(\Delta t)^2\ddot{x}_{k+1} \tag{1.40}$$

这里 F_{k+1} 是连续函数 $F_e(t)$ 的离散形式。注意到，前述连续的加速度函数离散化方法，可根据式(1.38)～(1.40)分别概括为如下三种情况：

- 恒加速度法：$\delta=0$，　$\alpha=0$；
- 恒平均加速度法：$\delta=1/2$，　$\alpha=1/4$；
- 线性加速度法：$\delta=1/2$，　$\alpha=1/6$。

将式(1.39)和(1.40)代入式(1.38)，得

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_{k+1}+2\zeta\omega_n[\dot{x}_k+(1-\delta)\Delta t\,\ddot{x}_k+\delta\Delta t\,\ddot{x}_{k+1}]\\&+\omega_n^2\left[x_k+\dot{x}_k\Delta t+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(\Delta t)^2\,\ddot{x}_k+\alpha(\Delta t)^2\,\ddot{x}_{k+1}\right]=F_{k+1}/m\end{aligned} \tag{1.41}$$

合并同类项得

$$\begin{aligned}(1+2\zeta\omega_n\delta\Delta t+\omega_n^2\alpha(\Delta t)^2)\ddot{x}_{k+1}=&-\omega_n^2x_k-(2\zeta\omega_n+\omega_n^2\Delta t)\dot{x}_k\\&-\left[2\zeta\omega_n(1-\delta)\Delta t+\omega_n^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(\Delta t)^2\right]\ddot{x}_k+F_{k+1}/m\end{aligned} \tag{1.42}$$

解之得

$$\ddot{x}_{k+1}=-\frac{\omega_n^2}{\beta}x_k-\frac{(2\zeta\omega_n+\omega_n^2\Delta t)}{\beta}\dot{x}_k-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\ddot{x}_k+\frac{F_{k+1}}{m\beta} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}\beta&=(1+2\zeta\omega_n\delta\Delta t+\omega_n^2\alpha(\Delta t)^2)\\\gamma&=2\zeta\omega_n(1-\delta)\Delta t+\omega_n^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(\Delta t)^2\end{aligned} \tag{1.44}$$

式(1.43)代入式(1.39)和(1.40)，可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_{k+1}=&-\left(\frac{\omega_n^2\delta\Delta t}{\beta}\right)x_k+\left[\frac{\beta-2\zeta\omega_n\delta\Delta t+\omega_n^2\delta(\Delta t)^2}{\beta}\right]\dot{x}_k\\&+\left[\frac{\beta\Delta t-\delta(\beta+\gamma)\Delta t}{\beta}\right]\ddot{x}_k+\left(\frac{\delta\Delta t}{m\beta}\right)F_{k+1}\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned}x_{k+1}=&\left[\frac{\beta-\omega_n^2\alpha(\Delta t)^2}{\beta}\right]x_k+\left[\frac{\beta\Delta t-2\zeta\omega_n\delta(\Delta t)^2+\omega_n^2\delta(\Delta t)^3}{\beta}\right]\dot{x}_k\\&+\left[\frac{\frac{1}{2}\beta(\Delta t)^2-\alpha(\beta+\gamma)(\Delta t)^2}{\beta}\right]\ddot{x}_k+\left(\frac{\alpha(\Delta t)^2}{m\beta}\right)F_{k+1}\end{aligned} \tag{1.46}$$

综上所述，根据 t_k 时刻的所有信息和 F_{k+1} 就可从上述各式得到 t_{k+1} 时刻系统的动力响应。将式(1.43)、(1.45)及(1.46)写成矩阵形式，即

$$\begin{Bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{N}} F_{k+1} \tag{1.47}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \beta - -\omega_{\mathrm{n}}^2 \alpha (\Delta t)^2 & \beta \Delta t - 2\zeta\omega_{\mathrm{n}} \delta (\Delta t)^2 + \omega_{\mathrm{n}}^2 \delta (\Delta t)^3 & \frac{1}{2}\beta(\Delta t)^2 - \alpha(\beta+\gamma)(\Delta t)^2 \\ -\frac{\omega_{\mathrm{n}}^2 \delta \Delta t}{\beta} & \beta - 2\zeta\omega_{\mathrm{n}} \delta \Delta t + \omega_{\mathrm{n}}^2 \delta (\Delta t)^2 & \beta \Delta t - \delta(\beta+\gamma)\Delta t \\ -\omega_{\mathrm{n}}^2 & -2\zeta\omega_{\mathrm{n}} - \omega_{\mathrm{n}}^2 \Delta t & -\gamma \end{bmatrix} \boldsymbol{H}_{\mathrm{N}}$$

$$= \left(\frac{1}{m\beta}\right) \begin{Bmatrix} \alpha (\Delta t)^2 \\ \delta \Delta t \\ 1 \end{Bmatrix}$$

下标 N 表示 Newmark-β 法，为简化式(1.47)，令

$$q_k = \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix} \tag{1.48}$$

可得

$$\boldsymbol{q}_{k+1} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{q}_k + \boldsymbol{H}_{\mathrm{N}} F_{k+1} \tag{1.49}$$

注意到，对于具有恒定时间步 Δt 的线性系统以及确定的 α 和 δ 值，矩阵 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{N}}$ 只需计算一次。

求解过程中必须注意数值计算的稳定性。在 Newmark-β 法中，恒平均加速度法因其较高的数值计算稳定性，在结构动力计算中最常用。

应注意的另一问题是数值计算精度，研究表明，减小积分时间步步长将提高计算精度。通常取时间步步长 $\Delta t \leqslant T_n/10$ 时可得到非常精确的结果。例如，对于具有 0.5s 自然振动周期的单自由度系统，数值分析的时间步步长常取不大于 0.05s。在结构地震反应数值分析中，常取时间步步长 0.01s 或 0.02s 即可达到满意的计算精度。

1.4　Wilson-θ 法

结构动力分析常用的另一种数值方法是 Wilson-θ 法。该法假设当时间从 t 增加到 $t+\theta\Delta t$时，加速度为线性变化，其中 θ 的值通常不是整数，且大于 1.0。根据这一假设，把式(1.39)和(1.40)中的 Δt 用 $\theta\Delta t$ 代换，同时令 $\delta=1/2$ 和 $\alpha=1/6$，可得

$$\ddot{x}_{k+\theta} + 2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\ \dot{x}_{k+\theta} + \omega_{\mathrm{n}}^2 x_{k+\theta} = F_{k+\theta}/m \tag{1.50}$$

$$\dot{x}_{k+\theta} = \dot{x}_k + \frac{1}{2}\ \ddot{x}_k \theta \Delta t + \frac{1}{2}\ \ddot{x}_{k+\theta} \theta \Delta t \tag{1.51}$$

$$x_{k+\theta} = x_k + \dot{x}_k \theta \Delta t + \frac{1}{3}\ \ddot{x}_k \theta^2 (\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\ \ddot{x}_{k+\theta} \theta^2 (\Delta t)^2 \tag{1.52}$$

其中，力函数 $F_{k+\theta}$ 可由 F_k 到 F_{k+1} 线性外推得到，即

$$F_{k+\theta}=F_k+\frac{t_{k+\theta}-t_k}{t_{k+1}-t_k}(F_{k+1}-F_k)=F_k+\frac{\theta\Delta t}{\Delta t}(F_{k+1}-F_k)=F_k+\theta(F_{k+1}-F_k) \tag{1.53}$$

类似地，将式(1.51)、(1.52)代入式(1.50)，可得

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_{k+\theta}+2\zeta\omega_n\left(\dot{x}_k+\frac{1}{2}\ddot{x}_k\theta\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{x}_{k+\theta}\theta\Delta t\right)\\&\quad+\omega_n^2\left[x_k+\dot{x}_k\theta\Delta t+\frac{1}{3}\ddot{x}_k\theta^2(\Delta t)^2+\frac{1}{6}\ddot{x}_{k+\theta}\theta^2(\Delta t)^2\right]=F_{k+\theta}/m\end{aligned} \tag{1.54}$$

整理得

$$\begin{aligned}\left(1+\zeta\omega_n\theta\Delta t+\frac{1}{6}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2\right)\ddot{x}_{k+\theta}=&-\omega_n^2x_k-(2\zeta\omega_n+\omega_n^2\theta\Delta t)\dot{x}_k\\&-\left[\zeta\omega_n\theta\Delta t+\frac{1}{3}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2\right]\ddot{x}_k+F_{k+\theta}/m\end{aligned} \tag{1.55}$$

将式(1.53)代入式(1.55)，并求解 F_{k+1}，可得

$$\ddot{x}_{k+\theta}=-\left(\frac{\omega_n^2}{\beta}\right)x_k-\left(\frac{2\zeta\omega_n+\omega_n^2\theta\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\ddot{x}_k+\frac{1}{m\beta}[F_k+\theta(F_{k+1}-F_k)] \tag{1.56}$$

其中

$$\beta=1+\zeta\omega_n\theta\Delta t+\frac{1}{6}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2$$

$$\gamma=\zeta\omega_n\theta\Delta t+\frac{1}{3}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2 \tag{1.57}$$

在时间步 t_k，动力平衡方程满足

$$F_k/m=\ddot{x}_k+2\zeta\omega_n\dot{x}_k+\omega_n^2x_k \tag{1.58}$$

将式(1.58)代入式(1.56)，可得

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{k+\theta}=&-\left(\frac{\omega_n^2}{\beta}\right)x_k-\left(\frac{2\zeta\omega_n+\omega_n^2\theta\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\ddot{x}_k\\&+\frac{1}{\beta}(1-\theta)(\ddot{x}_k+2\zeta\omega_n\dot{x}_k+\omega_n^2x_k)+\frac{\theta F_{k+1}}{m\beta}\end{aligned} \tag{1.59}$$

整理得

$$\ddot{x}_{k+\theta}=-\left(\frac{\theta\omega_n^2}{\beta}\right)x_k-\left(\frac{2\zeta\omega_n\theta+\omega_n^2\theta\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k-\left(\frac{\gamma-1+\theta}{\beta}\right)\ddot{x}_k+\frac{\theta F_{k+1}}{m\beta} \tag{1.60}$$

当 θ 大于 1 时，t_{k+1} 时刻的响应可以利用线性插值法在区间$(t_k,t_{k+\theta})$中求解得到。即

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{k+1}&=\ddot{x}_k+\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+\theta}-t_k}(\ddot{x}_{k+\theta}-\ddot{x}_k)\\&=\ddot{x}_k+\frac{\Delta t}{\theta\Delta t}(\ddot{x}_{k+\theta}-\ddot{x}_k)=\ddot{x}_k+\frac{1}{\theta}(\ddot{x}_{k+\theta}-\ddot{x}_k)\end{aligned} \tag{1.61}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{k+1}&=\dot{x}_k+\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+\theta}-t_k}(\dot{x}_{k+\theta}-\dot{x}_k)\\&=\dot{x}_k+\frac{\Delta t}{\theta\Delta t}(\dot{x}_{k+\theta}-\dot{x}_k)=\dot{x}_k+\frac{1}{\theta}(\dot{x}_{k+\theta}-\dot{x}_k)\end{aligned} \tag{1.62}$$

$$x_{k+1}=x_k+\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+\theta}-t_k}(x_{k+\theta}-x_k)=x_k+\frac{\Delta t}{\theta\Delta t}(x_{k+\theta}-x_k)=x_k+\frac{1}{\theta}(x_{k+\theta}-x_k) \tag{1.63}$$

将式(1.51)和(1.52)代入式(1.62)和(1.63)，可得

$$\ddot{x}_{k+1}=\ddot{x}_k+\frac{1}{\theta}(\ddot{x}_{k+\theta}-\ddot{x}_k) \tag{1.64}$$

$$\dot{x}_{k+1}=\dot{x}_k+\frac{1}{\theta}(\dot{x}_{k+\theta}-\dot{x}_k)=\dot{x}_k+\frac{1}{2}\ddot{x}_k\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{x}_{k+\theta}\Delta t \tag{1.65}$$

$$x_{k+1}=x_k+\frac{1}{\theta}(x_{k+\theta}-x_k)=x_k+\dot{x}_k\Delta t+\frac{1}{3}\ddot{x}_k\theta(\Delta t)^2+\frac{1}{6}\ddot{x}_{k+\theta}\theta(\Delta t)^2 \tag{1.66}$$

将式(1.59)代入式(1.64)～(1.66)，可得 t_{k+1}时刻系统的响应

$$\ddot{x}_{k+1}=-\left(\frac{\omega_n^2}{\beta}\right)x_k-\left(\frac{2\zeta\omega_n+\omega_n^2\Delta t}{\beta}\right)\dot{x}_k+\left(\frac{\beta\theta-\theta-\gamma-\beta+1}{\beta}\right)\ddot{x}_k+\frac{F_{k+1}}{m\beta} \tag{1.67}$$

$$\dot{x}_{k+1}=-\left[\frac{\frac{1}{2}\omega_n^2\theta\Delta t}{\beta}\right]x_k+\left(\frac{\beta-\zeta\omega_n\theta\Delta t+\omega_n^2\theta(\Delta t)^2}{\beta}\right)\dot{x}_k+\left[\frac{\frac{1}{2}(\beta-\theta-\gamma+1)\Delta t}{\beta}\right]\ddot{x}_k+\left[\frac{\frac{1}{2}\theta\Delta t}{m\beta}\right]F_{k+1} \tag{1.68}$$

$$x_{k+1}=-\left[\frac{\beta-\frac{1}{6}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2}{\beta}\right]x_k+\left[\frac{\beta\Delta t-\frac{1}{3}\zeta\omega_n\theta^2(\Delta t)^2-\frac{1}{6}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^3}{\beta}\right]\dot{x}_k+\left[\frac{\frac{1}{6}(2\beta-\theta-\gamma+1)\theta(\Delta t)^2}{\beta}\right]\ddot{x}_k+\left[\frac{\frac{1}{6}\theta^2(\Delta t)^2}{m\beta}\right]F_{k+1} \tag{1.69}$$

总之，当已知 t_k 时刻结构系统的相关信息(包括位移、速度、加速度)和外部激励 F_{k+1} 时，t_{k+1}时刻的系统响应可根据式(1.67)～(1.69)求解。类似地，式(1.67)～(1.69)可用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{q}_{k+1}=\begin{Bmatrix}x_{k+1}\\ \dot{x}_{k+1}\\ \ddot{x}_{k+1}\end{Bmatrix}=F_{\mathrm{w}}\begin{Bmatrix}x_k\\ \dot{x}_k\\ \ddot{x}_k\end{Bmatrix}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{W}}F_{k+1}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{W}}q_k+\boldsymbol{H}_{\mathrm{W}}F_{k+1} \tag{1.70}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{W}}=\frac{1}{\beta}\begin{bmatrix}\beta-\frac{1}{6}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2 & \beta\Delta t-\frac{1}{3}\omega_n^2\theta^2(\Delta t)^2 & \frac{1}{6}(2\beta-\theta-\gamma+1)\theta(\Delta t)^2\\ -\frac{1}{2}\omega_n^2\theta\Delta t & \beta-\zeta\omega_n\theta\Delta t-\frac{1}{2}\omega_n^2\theta(\Delta t)^2 & \frac{1}{2}(\beta-\theta-\gamma+1)\Delta t\\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n-\omega_n^2\Delta t & \frac{1}{\theta}(\beta\theta-\theta-\gamma-\beta+1)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{W}}=\left(\frac{1}{\mathrm{m}\beta}\right)\begin{Bmatrix}\frac{1}{6}\theta^2(\Delta t)^2\\ \frac{1}{2}\theta\Delta t\\ 1\end{Bmatrix}$$

其中，下标 W 表示 Wilson-θ 法。和上文提到的 Newmark-β 法一样，矩阵 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{W}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{W}}$ 只需计算一次。

注意,Wilson-θ 法的数值求解过程确保了动力系统在 $t+\theta\Delta t$ 时刻满足动力平衡方程,如式(1.50)所示。但是,在求解过程中并没有讨论或施加动态平衡条件。$t+\Delta t$ 时刻的动力平衡方程可验证如下:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_{k+1}+2\zeta\omega_n\dot{x}_{k+1}+\omega_n^2x_{k+1}\\
&=\left[\ddot{x}_k+\frac{1}{\theta}(\ddot{x}_{k+\theta}-\ddot{x}_k)\right]+2\zeta\omega_n\left[\dot{x}_k+\frac{1}{\theta}(\dot{x}_{k+\theta}-\dot{x}_k)\right]+\omega_n^2\left[x_k+\frac{1}{\theta}(x_{k+\theta}-x_k)\right]\\
&=(\ddot{x}_k+2\zeta\omega_n\dot{x}_k+\omega_n^2x_k)+\frac{1}{\theta}[(\ddot{x}_{k+\theta}+2\zeta\omega_n\dot{x}_{k+\theta}+\omega_n^2x_{k+\theta})-(\ddot{x}_k+2\zeta\omega_n\dot{x}_k+\omega_n^2x_k)]\\
&=F_k/m+\frac{1}{\theta}[F_{k+\theta}/m-F_k/m]=F_{k+1}/m
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

显然,只要动力平衡方程式在 t_k 和 $t+\theta\Delta t$ 时刻成立,则动力平衡方程式在 $t+\Delta t$ 时刻就自动成立。因此,该方法可用于求解线性系统的动态响应。

数值研究表明,对于 Wilson-θ 法,当 $\theta\geqslant1.37$ 时能获得稳定的数值计算结果,一般建议采用 $\theta=1.40$。对于数值计算精度,研究表明,当时间步满足 $\Delta t\leqslant(T_n/10)$ 时,可确保计算结果精确,和采用 Newmark-β 法求解的结果相同。

1.5 直接积分法

当外力激励项函数用积分形式给出时,可以采用直接积分法求解得到系统动力响应的数值解。式(1.11)给出了积分形式的状态空间响应的解,即

$$
\boldsymbol{z}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{z}(t_0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_{t_0}^{T}e^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{F}(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.72}
$$

式中

$$
\boldsymbol{z}(t)=\begin{Bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^{\ 2} & -2\zeta\omega_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{Bmatrix}0\\ \dfrac{F_e(t)}{m}\end{Bmatrix}
$$

$$
e^{\boldsymbol{A}t}=e^{-\zeta\omega_d t}\begin{bmatrix}\cos\omega_d t+\left(\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_d t & \dfrac{\sin\omega_d t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\\ -\dfrac{\omega_n\sin\omega_d t}{\sqrt{1-\zeta^2}} & \cos\omega_d t-\left(\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_d t\end{bmatrix} \tag{1.73}
$$

令

$$
t_{k+1}=t,\quad t_k=t_0,\quad \Delta t=t-t_0 \tag{1.74}
$$

则由式(1.72)可得

$$
\boldsymbol{z}_{k+1}=e^{\boldsymbol{A}\Delta t}\boldsymbol{z}_k+e^{\boldsymbol{A}t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}e^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{F}(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.75}
$$

采用直接积分法数值求解的目的是对式(1.75)中的施力函数进行积分。因为该函数通常以离散形式给出,且通常是不确定的(如地震作用),所以在一定的时间间隔内必须对施力函数取近似值。由于这一方法包括了直接积分(计算曲线和坐标轴之间的面积),任