

周玉刚 奚定华 杨安澜 黄汉禹 主编

高中数学

解 题 辞 典

(立体几何

平面解析几何)

广东教育出版社

解題辭典

广东教育出版社

粤新登字03号

高中数学解题辞典

(立体几何 平面解析几何)

周玉刚 黄汉禹 主编
莫定华 杨安澜

*

广东教育出版社出版发行

广东省新华书店经销

韶关新华印刷厂印刷

(韶关市新华北路50号)

787×1092毫米32开本 25印张 530,000字

1995年8月第1版 1995年8月第1次印刷

印数 1—3000册

ISBN7-5406-3396-4/G·3164

定价 22.50元

如发现印装质量问题，影响阅读，请与本厂联系调换。

编写说明

《中学生解题辞典》丛书是根据国家教育委员会最新修订的《全日制数学教育大纲》的精神编写的。近期出版的有《初中数学解题辞典》、《高中数学解题辞典(代数·三角)》、《高中数学解题辞典(立体几何·平面解析几何)》等。

近期出版的这几种数学解题辞典，编写的宗旨在于为初、高中学生，中学数学教师，高等师范院校数学系(科)学生，自学数学的知识青年，职工干部以及数学爱好者提供一套中学数学基本概念完整、技能技巧灵活多样的工具书。我们认为数学的“双基”是解题的根据，是解题思路的源泉，离开了它，解题就成了无本之木，无源之水。因此，各册均按知识内容，先将“双基”以词条的形式，集中列于各章之首，为读者查阅有关概念、公式、定理提供方便。然后，将题目的类型、解题的思路、基本技能和方法，集中系统地叙述。为使读者更快、更好地提高解题能力，切实掌握解题方法，以开拓解题思路，培养能力、发展智力。我们在一种类型的例题叙述以后，随即提出“注意”、“说明”、“研究”和“思考”等项，用于指明解题的注意事项，阐述解题的一般规律，研究解题的思路和方法，并及时提供思考训练的机会。

本套书由周玉刚、黄汉禹、奚定华、杨安澜等同志主编。

本册立体几何篇由黄汉禹同志主编，平面解析几何篇由奚定华同志主编。杨安澜同志审读了全稿，最后由周玉刚同志修改定稿。参加编写、绘图和誊写的还有毛国全、陈肇曾、周

滔、欧建群、张万富等同志。书稿编成后，周国华、苏德敏同志阅读了全稿，复做了书中全部思考题。上海市数学会副理事长、上海师范大学数学系应制夷教授热情地审阅了全稿，并为这套辞书写了序言。在此，我们谨向上述诸同志表示深深的谢意。

限于我们的水平，书中谬误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

1990年12月于上海

序 言

正当我准备来美讲学的前夕，收到本辞书主编热情送来的书稿。在听取作者对这套辞书编辑意图的详细介绍之后，我挤出时间见缝插针阅读了全稿，感触尤深。

众所周知，中学教育是基础教育，而数学又是基础教育中的一门工具学科，它是学习科学技术和其他知识的重要基础。我们培养的人应具备哪些数学基础知识？又该如何培养学生解决数学问题的能力呢？作者们抓住这两个关键问题，潜心研究本手册的编写体例，先将中学数学基础知识以词条的形式，按内容进行系统整理，如同词典一样，使人翻阅时一目了然；然后分类叙述解题的基本技能和方法。书中后一部分，更以题材丰富、结构新颖、叙述严谨、解法合理、技巧灵活等为其特色，足见作者们丰富的教学经验与深厚的业务根底。作者还在适当的地方加入“注意”、“说明”、“思考”、“研究”等专项，将读者的思维步步引向深处，这对培养和发展读者的思维能力极有帮助。相信，本辞典的出版必将成为广大数学爱好者的良师益友。特为序。

应制夷

1987年9月于爱我华大学

目 录

立体几何篇

| | |
|---|----|
| 一、直线和平面 | 3 |
| (一)基本概念、定理、公式 | 3 |
| 1.平面及其基本性质(3) | |
| 2.异面直线(5) | |
| 3.直线和平面平行(7) | |
| 4.直线和平面垂直(8) | |
| 5.直线和平面斜交(9) | |
| 6.平面和平面平行(10) | |
| 7.二面角(11) | |
| 8.平面和平面垂直(11) | |
| (二)基本技能和方 法 | 12 |
| 1.平面的性质(12) | |
| (1)平面的确定 (2)点线共面问题 (3)画 截面 (4)空间作图问题 (5)利用平面的性质解题 | |
| 2.异面直线(34) | |
| (1)空间两条直线的位置关系 (2)空间直线位置 关系与空间图形的画法 (3)异面直线的判定 (4)异面直线所成的角 (5)异面直线的距离 | |
| 3.直线和平面的平行(53) | |
| (1)直线和平面平行的判定 (2).直线和平面 平行的性质 (3) | |

直线和平面平行的作图问题

4. 直线和平面的垂直(62)

(1) 直线和平面垂直的判定 (2) 直线和平面垂直的性质 (3) 直线和平面垂直的作图问题 (4) 平面的垂线和斜线 (5) 三垂线定理及其应用

5. 平面和平面平行(90)

(1) 平面和平面平行的判定 (2) 平面和平面平行的性质 (3) 平面和平面平行的作图问题

6. 二面角、平面和平面的垂直(101)

(1) 二面角的平面角 (2) 平面和平面垂直的判定 (3) 平面和平面垂直的性质 (4) 平面和平面垂直的作图问题 (5) 图形的折叠问题

7. 三面角和多面角(156)

(1) 三面角 (2) 多面角

二、多面体和旋转体 167

(一) 基本概念、定理、公式 167

1. 棱柱体(167)

2. 棱锥体(169)

3. 棱台体(171)

4. 正多面体(173)

5. 圆柱体(175)

6. 圆锥体(176)

7. 圆台体(178)

8. 球体(179)

(a) 9. 其他几何体(182)

(二) 基本技能和 方法 182

1. 多面体(183)

(b) (1) 棱柱 (2) 棱锥 (3) 棱台

2. 旋转体(223)
- (1) 圆柱 (2) 圆锥 (3) 圆台 (4) 球
3. 多面体和旋转体的体积(247)
- (1) 棱柱、圆柱的体积 (2) 棱锥、圆锥的体积 (3) 棱台、圆台的体积 (4) 拟柱体 (5) 球、球缺 (6) 旋转面和旋转体
4. 几何体的相接和相切(301)
5. 几何体中的最大值和最小值问题(327)
- (1) 几何体表面上两点的最短路线问题 (2) 面积、体积的极值问题
6. 正多面体(355)
- (1) 正多面体 (2) 欧拉公式

平面解析几何篇

- 一、直线369
- (一)基本概念、定理、公式369
1. 坐标法(369)
2. 有向线段(369)
3. 定比分点(370)
4. 直线的方程(372)
5. 两条直线的位置关系(377)
6. 直线系(379)
- (二)基本技能和方法380
1. 有向线段(380)
2. 线段的定比分点(383)
3. 用解析法证明简单的平面几何问题(388)
4. 直线的方程(394)

(1) 直线的倾斜角和斜率 (2) 求直线的方程

5. 两条直线的位置关系(403)

(1) 两条直线的平行和垂直 (2) 两条直线所成的角 (3) 点到直线的距离 (4) 三线共点

6. 用解析法证明直线形的问题(417)

7. 求有关直线的轨迹方程(429)

8. 求二元一次不等式表示的区域(433)

9. 直线型经验公式(437)

二、圆锥曲线 439

(一) 基本概念、定理、公式 439

1. 曲线和方程(439)

2. 圆(440)

3. 椭圆(443)

4. 双曲线(446)

5. 抛物线(448)

6. 圆锥曲线的切线和法线(452)

(二) 基本技能和方法 453

1. 曲线和方程(453)

(1) 有关曲线和方程概念的问题 (2) 充要条件 (3) 由曲线求方程 (4) 方程的曲线 (5) 两条曲线的交点

2. 圆(466)

(1) 求圆的方程 (2) 直线和圆的位置关系 (3) 圆的切线方程 (4) 两圆的位置关系 (5) 有关圆的证明问题 (6) 有关圆的轨迹问题

3. 椭圆、双曲线和抛物线(495)

(1) 求椭圆、双曲线和抛物线的标准方程 (2) 椭圆、双曲线和抛物线的顶点、焦点、轴、离心率和准线 (3) 利用椭圆、双曲

线和抛物线的定义解题 (4) 直线和椭圆、双曲线、抛物线的位置关系 (5) 椭圆、双曲线和抛物线的弦 (6) 椭圆、双曲线和抛物线的切线 (7) 最大值和最小值问题 (8) 证明题 (9) 轨迹题

三、坐标变换621

(一) 基本概念、定理、公式621

1. 坐标轴的平移 (621)

2. 坐标轴的旋转 (622)

3. 二元二次方程的化简公式 (623)

(二) 基本技能和方法626

1. 利用平移公式求点的坐标 (626)

(1) 已知点的原坐标, 求点的新坐标 (2) 已知点的新坐标, 求点的原坐标 (3) 已知点的原坐标和新坐标, 求新坐标系原点的原坐标

2. 利用平移公式求曲线的方程 (628)

(1) 已知曲线的原方程, 求曲线的新方程 (2) 已知曲线的新方程, 求曲线的原方程

3. 平移坐标轴, 化简方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A 、 C 不同时为零) (630)

4. 求方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A 、 C 不同时为零) 所表示曲线的焦点、顶点坐标和准线方程 (632)

5. 求对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线方程 (634)

6. 利用旋转公式求点的坐标 (639)

(1) 已知点的原坐标, 求点的新坐标 (2) 已知点的新坐标, 求点的原坐标 (3) 已知点的原坐标和新坐标, 求旋转角

7. 利用旋转公式求曲线的方程 (641)

(1) 已知曲线的原方程, 求曲线的新方程 (2) 已知曲线的新方程, 求曲线的原方程 (3) 已知曲线的原方程和新方程, 求旋转

角

8. 旋转坐标轴, 化简二元二次方程 (644)
9. 一般二元二次方程类型的判别 (647)
10. 一般二元二次方程的化简 (648)
11. 求方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A 、 B 、 C 不同时为零) 所表示曲线的焦点、顶点坐标和准线方程 (654)
12. 圆锥曲线系 (657)
13. 求圆锥曲线的方程 (660)

四、参数方程、极坐标..... 664

(一) 基本概念、定理、公式..... 664

1. 参数方程 (664)

2. 极坐标 (667)

(二) 基本技能和方法..... 673

1. 求轨迹的参数方程 (673)

2. 化曲线的参数方程为普通方程 (687)

3. 化曲线的普通方程为参数方程 (694)

4. 画参数方程表示的曲线 (698)

5. 参数方程表示的曲线的交点 (701)

6. 直线参数方程的应用 (704)

(1) 有关两点间距离的问题 (2) 有关线段中点的问题 (3) 求圆锥曲线的切线方程和切线长

7. 圆锥曲线参数方程的应用 (724)

(1) 求动点的轨迹方程 (2) 证明圆锥曲线的性质 (3) 有关最大值和最小值的问题 (4) 其他计算问题

8. 点的极坐标 (740)

(1) 已知点的极坐标, 在极坐标系中画出对应的点 (2) 已知极

坐标系中的点，求它的极坐标 (3) 对称点的极坐标 (4) 已知两点的极坐标，求它们之间的距离 (5) 已知三角形三顶点的极坐标，求它的面积

9. 求轨迹的极坐标方程 (745)

(1) 直接法 (2) 间接法

10. 画极坐标方程的曲线 (754)

11. 极坐标方程表示的曲线的交点 (760)

12. 极坐标和直角坐标的互化 (763)

13. 圆锥曲线的极坐标方程 (767)

(1) 判别圆锥曲线的类型 (2) 求圆锥曲线的极坐标方程 (3)

已知圆锥曲线的极坐标方程，求 e 、 p 、 a 、 b 、 c 的值 (4) 圆锥曲线极坐标方程的应用

14. 等速螺线 (782)

立体几何篇

一、直线和平面

(一) 基本概念、定理、公式

1. 平面及其基本性质

【平面】 面是体的界，任何一种几何体的表面，都是面，不外乎是平面或者曲面。平面的概念，就是从客观存在的体的表面，如平静的水面、桌面等抽象得到的。

平面和直线一样，是只能描述而不能加以定义的最原始的概念。和直线的无限性一样，数学中所说的平面也是无限延展着的。

【平面的基本性质】

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图1-1-1)。

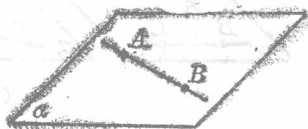


图1-1-1

点A在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$ ，点A在平面 α 外，记作 $A \notin \alpha$ ；直线 a 在平面 α 内，记作 $a \subset \alpha$ 。

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有

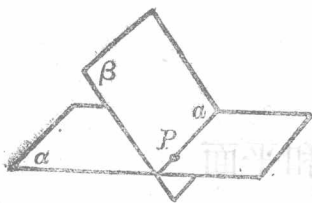


图1-1-2

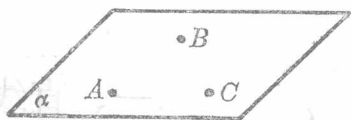


图1-1-3

一条通过这个点的公共直线(图1-1-2)。

平面 α 与平面 β 相交于直线 a , 可记作 $\alpha \cap \beta = a$ 。

公理3 经过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面(图1-1-3)。

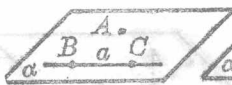
过 A 、 B 、 C 三点的平面又可记作“平面 ABC ”。

根据上述公理, 可推出下面的推论。

推论1 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面[图1-1-4(1)]。

推论2 经过两条相交直线, 有且只有一个平面[图1-1-4(2)]。

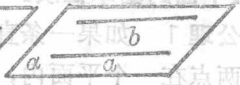
推论3 经过两条平行直线, 有且只有一个平面[图1-1-4(3)]。



(1)



(2)



(3)

图1-1-4

【斜二测画法】

(1) 在已知图形中取互相垂直的轴 Ox 、 Oy 。画直观图时, 把它画成对应的轴 $O'x'$ 、 $O'y'$, 使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°), 它们确定的平面表示水平平面。