常微分方程

焦宝聪　王在洪　时红廷　编著

清华大学出版社

常微分方程

焦宝聪　王在洪　时红廷　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书分为7章：基本概念，一阶方程的初等积分法，一阶方程的一般理论，高阶微分方程，微分方程组，定性理论与稳定性理论初步，差分方程. 内容取材精练，注重概念实质的揭示、定理思路的阐述、应用方法的介绍和实际例子的分析，并配合内容引入了数学软件. 每章配有习题，全部计算题都有答案，个别证明题有提示.

本书可用作师范院校、理工科大学的数学类各专业的教科书和部分理工科其他专业的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/焦宝聪，王在洪，时红廷编著. —北京：清华大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-302-17761-6

Ⅰ. 常… Ⅱ. ①焦… ②王… ③时… Ⅲ. 常微分方程—高等学校—教材 Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第104954号

责任编辑：佟丽霞
责任校对：王淑云
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社　　　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　**印　张**：18.25　**字　数**：343千字
版　次：2008年8月第1版　　**印　次**：2008年8月第1次印刷
印　数：1～4000
定　价：29.80元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：024655—01

前　言

常微分方程理论研究已经有300多年的历史，它是近代数学中的重要分支；同时，由于它与实际问题有着密切的联系，因此，它又是近代数学中富有生命力的分支之一. 对于数学，特别是数学的应用，常微分方程所具有的重大意义主要在于：很多物理与技术问题可以化归为常微分方程的求解问题，如自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究、化学反应过程稳定性的研究等. 此外，常微分方程在生态学、人口学、经济学等许多其他领域中也有重要的应用. 这些问题都可以化为求常微分方程的解，或者化为研究解的性质的问题.

本书是在作者多年教学实践和教学研究的基础上，吸取国内外同类教材的精华编写而成. 全书分为7章，前5章作为基本内容，后2章可根据实际情况灵活选用. 根据常微分方程课程的特点及高等师范院校的培养目标，我们在编写本教材时有以下几点考虑：

1. 力图实现“少而精”的原则，注重数学思想的培养、基本方法的训练，尽量从几何直观入手，注意概念实质的揭示以及近代数学观点的渗透.

本课程中方程类型多、解法各异. 我们在内容取材上力图精练，注意分析不同类型方程及其解法的特点. 例如，在一阶方程的初等积分法中，以变量可分离方程、线性方程、全微分方程为主线；在高阶微分方程（组）中，以线性齐次微分方程（组）为主线，强调数学变换的思路、技巧及各种方法之间的内在联系.

对一阶常微分方程的一般理论，我们重点介绍毕卡存在唯一性定理，对定理的条件、结论与证明方法进行较为细致的分析，注意概念实质的揭示、定理证明思路的阐述，以及其中所包含的数学思想分析. 对常系数线性齐次微分方程组的求解方法，我们选用矩阵指数法，基解矩阵的计算采用了较新的普兹方法，既可避免读者接受这部分知识的困难，又使读者熟悉向量、矩阵及矩阵指数函数的应用.

微分方程及其解的几何解释、平面定常系统的奇点一直是教学的难点. 我们从

几何直观入手，采用数学软件介绍相关例题的方向场、相图. 教学实践表明，采用数学软件处理这部分内容，可避免读者接受这部分知识的困难，读者可以应用数学软件进行数学实验，有助于对相关概念实质的理解.

为使读者了解近代常微分方程的重要分支——定性理论的基本思想和方法，为进一步的学习打下基础，我们在第 6 章中对定性、稳定性理论作了简要介绍.

2. 力图体现“师范教育特色”，重视对有关基础知识的联系、巩固与深化.

本书从某些内容的选取、某些重要问题的提出与解决、例题与习题的配备等方面，都注意加强与有关的初等数学及高等数学的结合. 例如，通过应用微分方程来求解某些函数方程；结合一阶方程图像解法与数学分析中的函数作图；重视高阶线性微分方程(组)理论与高等代数中线性方程组、线性空间理论的联系；考虑到实际应用及高中新课程标准中有差分方程模块，在本书中特别加入了差分方程内容. 为了使学生了解微分方程的历史文化，本书简要介绍了微分方程的产生背景、发展过程及关键性的代表人物.

3. 力图体现“以人为本”，尽量做到符合学生的认知规律，注意启发性.

我们将微分方程的初等积分法分散在第 2,4,5 各章，在例题与习题的配备上注意搭好台阶，反复巩固，这将有助于学生牢固掌握基本理论以及基本解法；对微分方程的典型应用实例，如微分方程在物理学、生态学、人口学、经济学中的应用，我们把重点放在建立数学模型和说明解的实际意义上，这将有助于培养学生分析解决实际问题的能力，启迪学生的创新思维.

为配合教师进行多媒体教学，还将出版与本书配套的电子教案.

本书的编写得到了首都师范大学教务处教材建设经费的支持；首都师范大学数学科学学院也给予了大力支持；在使用原讲义的过程中，吴雅萍教授、酒全森教授提出过许多宝贵意见，清华大学出版社的佟丽霞编辑为本书的出版付出了许多心血. 在此，我们谨向他们表示衷心的感谢. 我们也殷切希望读者对本书中的缺点和错误提出批评指正.

编　者

2008 年 6 月于首都师范大学数学科学学院

目　录

第1章 基本概念

微分方程是含有自变量、未知函数及其导数(或微分)的方程.微分方程源于实践,在实践中有广泛而深入的应用.在自然科学和技术中的许多领域,例如物理学、化学、生物学、自动控制和电子技术等,大量的问题都可以用微分方程加以描述.同样,在社会科学方面,例如人口学、生态学等,微分方程也可用来描述人口变化的过程和物种的变化规律.微分方程也与数学的其他分支存在密切的联系.几何学是常微分方程理论的丰富源泉,常微分方程也是研究几何学的有力工具.

本章将通过几个具体的例子,简单介绍微分方程的建立过程,并给出一些基本概念.

1.1 微分方程的例子

在应用数学方法研究物体的变化规律时,反映运动规律的量与量之间的关系(函数)往往不能直接写出来,却比较容易建立这些变量和它们的导数之间的关系式,即微分方程.

例 1.1.1 自由落体运动

设质量为 m 的物体,只受重力的作用,在距离地面 s_0 处,以初速度 v_0 下落,试求其运动规律.

解 如图 1.1 建立坐标系.取物体下落时所沿垂直于地面的直线为 s 轴,s 轴与地面的交点 O 为坐标原点,垂直地面向上的方向为正方向.设物体在 t 时刻的位置坐标为 $s(t)$.这样,物体在 t 时刻的速度 $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$,加速度 $a(t)=\dfrac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}$.物体在下落过程中只受重力作用且方向与规定的正方向相反,根据牛顿第二定律可以得出

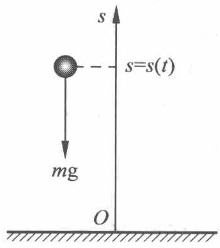

图 1.1

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

其中 g 表示重力加速度,即

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g. \tag{1.1.1}$$

这是一个含有未知函数 $s(t)$ 的二阶导数的微分方程. 显然,物体的运动状态还与物体的初始状态,即 $t=0$ 时的位置和速度有关,故 $s(t)$ 还要满足条件

$$s(0)=s_0,\quad s'(0)=v_0. \tag{1.1.2}$$

于是,求落体运动规律的问题就归结为求方程(1.1.1)满足初始条件(1.1.2)的未知函数的问题.

□

例 1.1.2 R-L 电路

如图 1.2 所示的 R-L 电路,电感 L,电阻 R 及电源电压 E 均为正的常数. 试建立当电键闭合后电路中的电流 I 所满足的微分方程.

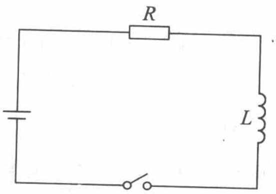

图 1.2

解 根据基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律,在闭合回路中,所有支路上电压的代数和等于零. 注意到电流经过电阻 R 的电压是 RI,而经过电感 L 的电压是 $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. 因此,

$$E-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-RI=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}.$$

另外,$I=I(t)$ 还应满足条件 $I(0)=0$.

□

例 1.1.3 一个几何问题

求一平面曲线,使其上任一点的切线在纵坐标轴上的截距等于切点的横坐标.

解 设所求的平面曲线为 $y=y(x)$. 显然,不易直接求出 $y(x)$ 的表达式,但是可以根据曲线所具有的性质,建立 $y(x)$ 所满足的关系式.

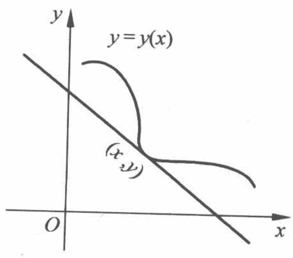

图 1.3

如图 1.3,设过所求曲线上任一点 (x,y) 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

其中 (X,Y) 表示切线上的任一点. 因此,切线在纵坐标轴上的截距为 $y-xy'$. 由题意可以得到

$$y - xy' = x. \tag{1.1.3}$$

这是一个含有未知函数 $y(x)$的一阶导数的微分方程. 于是,所求问题就转化为求满足微分方程(1.1.3)的函数的问题. □

例 1.1.4　解函数方程

设函数 $\phi(t)$在 $t=0$ 处可导,且具有性质

$$\phi(t+s) = \frac{\phi(t)+\phi(s)}{1-\phi(t)\phi(s)}, \tag{1.1.4}$$

试求此函数.

解　等式(1.1.4)是一个函数方程,为了便于求出函数 $\phi(t)$,可以先把它转化为微分方程. 首先在式(1.1.4)中令 $t=s=0$,则

$$\phi(0) = \frac{2\phi(0)}{1-\phi^2(0)}.$$

因此

$$\phi(0) = 0. \tag{1.1.5}$$

又因为

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{\phi(t+s)-\phi(t)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[\frac{\phi(t)+\phi(s)}{1-\phi(t)\phi(s)} - \phi(t)\right] \\ &= (1+\phi^2(t))\lim_{s\to 0}\left[\left(\frac{\phi(s)-\phi(0)}{s}\right)\left(\frac{1}{1-\phi(t)\phi(s)}\right)\right],\end{aligned}$$

所以

$$\phi'(t) = \phi'(0)(1+\phi^2(t)). \tag{1.1.6}$$

这是一个含有未知函数 $\phi(t)$一阶导数的微分方程. 于是,求解函数方程(1.1.4)就转化为求满足条件(1.1.5)和微分方程(1.1.6)的函数问题. □

在初等数学中,我们知道正切函数 $\phi(t)=\tan t$ 满足等式(1.1.4). 反过来要问:具备性质(1.1.4)的函数是否一定为正切函数? 对于指数函数、对数函数及幂函数等基本初等函数,同样可以提出类似的反问题. 在下一章,可以很容易回答这些问题.

从上面的例子可以看出,微分方程与许多问题之间有密切的联系,我们常常可以把所研究的问题转化为求微分方程满足特定条件解的问题. 当然,在运用微分方程解决实际问题的过程中,首先要建立微分方程. 一般来说,这是一个比较困难的步骤. 因为这不仅需要一定的数学知识,还需要掌握与问题相关的专业知识. 在以后各章节中,我们还将介绍若干实际问题,以进一步提高解决实际问题的能力.

习题 1.1

1. 一质量为 m 的物体，从高度 s_0 处以初速度 v_0 铅直向上抛出，设空气阻力的大小与速度的大小成正比，但方向相反. 试求物体运动所满足的微分方程，并写出初始条件.

2. 一高温物体在 20℃的恒温介质中冷却，根据牛顿冷却定理，在冷却过程中物体降温速度与其所在介质的温差成正比. 已知物体的初始温度为 u_0，试求物体的温度 $u(t)$所满足的微分方程，并写出初始条件.

3. 已知曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项，试求曲线所满足的微分方程.

4. 设函数 $\varphi(t)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义且不恒为零，$\varphi'(0)$存在，并且具有性质

$$\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s),$$

试求 $\varphi(t)$所满足的微分方程，并写出初始条件.

1.2 基本概念

1.2.1 常微分方程和偏微分方程

在微分方程中，如果未知函数是一元函数，则称该方程为**常微分方程**；如果未知函数是多元函数，则称该方程为**偏微分方程**.

例如，微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-g, \tag{1.2.1}$$

$$y-xy'=x, \tag{1.2.2}$$

$$y'=1+y^2 \tag{1.2.3}$$

都是常微分方程. 微分方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u, \tag{1.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.2.5}$$

都是偏微分方程.

一个微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数 n 称为该微分方程的**阶**. 当 $n=1$ 时，称为一阶微分方程；当 $n\geqslant 2$ 时，称为高阶微分方程. 例如，方程(1.2.1)

是二阶常微分方程，方程(1.2.2)和方程(1.2.3)都是一阶常微分方程，方程(1.2.4)是一阶偏微分方程，方程(1.2.5)是二阶偏微分方程.

本书主要讨论常微分方程. 为方便起见，今后有时把常微分方程简称为微分方程或方程.

一阶常微分方程的一般形式可表示为

$$F(x,y,y')=0. \tag{1.2.6}$$

如果由式(1.2.6)可以解出 y'，则得到方程

$$y'=f(x,y). \tag{1.2.7}$$

称式(1.2.6)为一阶隐方程，式(1.2.7)为一阶显方程. 类似地，n 阶隐方程的一般形式可表示为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0; \tag{1.2.8}$$

n 阶显方程的一般形式为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

其中 F 及 f 分别是它们所依赖变元的已知函数.

如果方程(1.2.8)的左端为未知函数及其各阶导数的一次有理整式，则称它为**线性微分方程**，否则，称它为**非线性微分方程**. 例如，方程(1.2.1)、(1.2.2)是线性微分方程，方程(1.2.3)是非线性微分方程. n 阶线性微分方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=q(x),$$

其中 $a_0(x),a_1(x),\cdots,a_n(x)$ 及 $q(x)$ 为 x 的已知函数，且 $a_0(x)\neq 0$.

1.2.2　解和通解

微分方程的主要问题之一是要求出其中的未知函数，此函数就称为微分方程的解. 确切地说，有以下定义.

定义 1.2.1　设函数 $y=\phi(x)$ 在区间 I 上有直到 n 阶的导数，如果把 $y=\phi(x)$ 及其各阶导数代入方程(1.2.8)后，能使等式

$$F(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))=0$$

在 I 上恒成立，则称函数 $y=\phi(x)$ 为方程(1.2.8)的一个**解**.

由定义 1.2.1 可以直接验证：

(1) 函数 $s=-\dfrac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2, t\in(-\infty,+\infty)$ 是方程(1.2.1)的解，其中 c_1，c_2 为任意常数.

(2) 函数 $y=\tan x, x\in(-\pi/2,\pi/2)$ 是方程(1.2.3)的一个解；并且 $y=\tan(x-c), x\in(c-\pi/2,c+\pi/2)$ 也是该方程的解，其中 c 为任意常数.

从上面两个例子可以看出，一个微分方程可能有无穷多个解，而且各个解的定

义区间是可以互不相同的.

由于微分方程的解是函数,而函数的表达式有显式 $y=\phi(x)$、隐式 $\Phi(x,y)=0$ 及参数形式 $x=\phi_1(t)$,$y=\phi_2(t)$等,故其解就有相应的多种表示形式.

例如,考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}. \tag{1.2.9}$$

容易验证由等式

$$x^2+y^2=1 \tag{1.2.10}$$

所确定的隐函数 $y=y(x)$满足方程(1.2.9).事实上,将该等式两边对 x 求导,可推得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$.这时,称式(1.2.10)为方程(1.2.9)的**隐式解**或**隐式积分**.同样容易验证由参数方程

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in\mathbb{R} \tag{1.2.11}$$

所确定的函数 $y=y(x)$也满足方程(1.2.9).这时,称式(1.2.11)为方程(1.2.9)的**参数式解**.

从上面的例子我们已经看到:在微分方程解的表示式中,可能包含一个或几个任意常数,而且所包含的任意常数的个数恰好与相应的微分方程的阶数相同.我们称这样的解为微分方程的通解.

定义 1.2.2 若 n 阶方程(1.2.8)的解 $y=\phi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,则称它为方程(1.2.8)的**通解**.

所谓 n 个任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是独立的,是指 $\phi,\phi',\cdots,\phi^{(n-1)}$关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的雅可比(Jacobi)行列式

$$\frac{D(\phi,\phi',\cdots,\phi^{(n-1)})}{D(c_1,c_2,\cdots,c_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial c_1} & \frac{\partial\phi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\phi}{\partial c_n}\\ \frac{\partial\phi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\phi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\phi'}{\partial c_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 $\phi^{(k)}(k=1,2,\cdots,n-1)$表示 ϕ 对 x 的 k 阶导数.

类似地,可以定义 n 阶方程(1.2.8)的**隐式通解**(亦称**通积分**)和**参数式通解**.为方便起见,有时我们把方程(1.2.8)不含有任意常数的解 $y=\phi(x)$称为该方程的**特解**.

由定义容易知道 $s=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$ 是方程(1.2.1)的通解,$y=\tan(x-c)$是

方程(1.2.3)的通解.

在求出了通解之后,我们可以由通解求出方程满足某种特定条件的解.例如,从例 1.1.1 中我们知道求自由落体运动规律的问题,就是求二阶方程(1.1.1)满足初始条件(1.1.2)的解的问题.把条件 $s(0)=s_0$,$s'(0)=v_0$ 分别代入

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2,\quad s'(t)=-gt+c_1,$$

可得

$$c_1=v_0,\quad c_2=s_0.$$

这样,方程(1.1.1)满足条件(1.1.2)的解为

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0.$$

对 n 阶方程(1.2.8),其初始条件是指如下的 n 个条件:

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0{}',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0{}^{(n-1)},\tag{1.2.12}$$

其中 x_0 是自变量 x 的某个给定的初值,$y_0,y_0{}',\cdots,y_0{}^{(n-1)}$ 是未知函数及其相关导数的给定的初值.

求微分方程(1.2.8)满足初始条件(1.2.12)的解的问题称为**初值问题**,或**柯西问题**,常记为

$$\begin{cases}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0{}^{(n-1)}.\end{cases}$$

初值问题解的存在唯一性问题是常微分方程理论的一个基本问题,是进一步研究解的其他性质的前提.我们将在第 3 章和第 5 章证明在一定条件下初值问题的解不仅存在而且唯一存在.

1.2.3　积分曲线和积分曲线族

为了便于研究方程解的性质,我们常常可以借助于解的图像.一阶微分方程(1.2.7)的解 $y=\phi(x)$,在 xOy 平面上的图形为一条平面曲线,我们称它为方程(1.2.7)的一条**积分曲线**.方程(1.2.7)的通解 $y=\phi(x,c)$对应于 xOy 平面上的一族曲线,我们称它为方程(1.2.7)的**积分曲线族**.

例如,方程(1.2.9)的通积分为 $x^2+y^2=c^2$,其对应的积分曲线为 xOy 平面上的一族以原点为圆心的同心圆周.

这里提出一个反问题,若已知一个平面曲线族

$$\Phi(x,y,c)=0,\tag{1.2.13}$$

其中 c 为参数,是否存在一个一阶方程,使得曲线族(1.2.13)恰是此微分方程的积分曲线族?为此,在式(1.2.13)中,把 y 看成 x 的函数,对 x 求导得