顶尖系列

高中

人教A版

顶尖课课练

数学（必修4）

福建人民出版社

顶尖系列

高中

人教A版

顶尖课课练

数学（必修4）

江苏工业学院图书馆
藏书章

福建人民出版社

主　编

张鹏程（福建师范大学数学与计算机科学学院中学数学教学研究室主任）

编写人员（按姓氏笔画排序）

方秦金　叶文榕　叶青柏　汤锦德　李新岳　陆集宁　陈　言　陈　腾
陈中峰　陈天雄　陈蓓璞　卓道章　林　风　林　婷　林元武　林嘉慧
姚承佳　柯跃海　赵祥枝　倪政翔　黄　雄　黎　强

顶尖课课练数学（必修4）（人教A版）

DINGJIAN KEKELIAN SHUXUE

出　　版：福建人民出版社
地　　址：福州市东水路76号　　**邮政编码：**350001
电　　话：0591-87604366（发行部）　87521386（编辑室）
网　　址：http://www.fjpph.com
发　　行：福建省新华书店
印　　刷：人民日报社福州印务中心
地　　址：福州市鼓屏路33号　　**邮政编码：**350001
开　　本：787毫米×1092毫米　1/16
印　　张：9.75
字　　数：242千字
版　　次：2008年8月第1版　　2008年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-211-05788-7
定　　价：16.60元

本书如有印装质量问题，影响阅读，请直接向承印厂调换

版权所有，翻印必究

编写说明

“顶尖课课练”（原“高中步步高”）根据课程标准，配合各版本教材进行编写。丛书以课为训练单位，以单元为测试单位建构编写体系，符合教学规律，体现课改精神。丛书不仅关注学生夯实基础知识、基本技能，还关注学生学习的自主性、探究性、合作性；不仅关注培养学生学会学习、学会反思、学会自我激励，还关注培养学生学习过程中情感、态度和价值观的形成。

为了使本丛书在理念上与最新教改理念、精神相吻合，我们在本套丛书的编写过程中，坚持“三参与”原则，即颇有造诣的课程研究专家参与，深谙当前基础教育课程改革的教研员参与和具有丰富教学实践经验的一线特、高级教师参与，从而使本丛书在质量上得到充分保证。

“顶尖课课练”按章（或单元）进行编写，每一章（或单元）一般设：“学习目标”、“要点透析”、“方法指津”、“自我评估”、“探究应用”、“拓展视野”、“归纳整合”、“单元质量检测卷”等栏目。

“学习目标”是根据各章（或单元）应达到的目标提出具体要求。“要点透析”是以课程标准为基准，以相应版本的教材为落脚点，较详细地分析本章（或单元）内容的重点、难点。“方法指津”通过对精选的经典题目的解析和点拨，拓展学生的思路，提升发散思维能力，掌握科学的学习方法。“自我评估”在题目设计上，特别注重吸收全国各地出现的最新题型，同时注重知识的现代化，以激活学生已有的知识、经验和方法。题目既注重基础性，又强调自主性、参与性、实践性、合作性。“探究应用”特别注重吸收密切联系生产、生活实际的有趣题目，加强探究性习题的训练。“拓展视野”对本章（或单元）知识进行拓展，通过对一些典型的探究型、开放型的题目进行解析和点拨，使学生对章（或单元）内、学科内、学科间知识结构的关系得以把握和拓展。“归纳整合”以树形图、方框图或表格等形式对本章（或单元）知识进行梳理、归纳、整合，使学生对整章（或单元）知识间的逻辑关系有个清楚的认识。经过系统的训练后，通过“单元质量检测卷”与“模块质量检测卷”对所学内容进行评价与总结。由于不同学科及不同版本的教材各有特点，因此，上述栏目及其写法允许根据实际需要适当调整，灵活掌握。“质量检测卷”和“部分参考答案”一般做成活页的形式，以方便使用。

“顶尖课课练”实现了引导学生从预习到课外阅读全程自主学习的编写理念。我们在栏目设置上创设了科学的整合模式，将“知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观”三维目标分层次地融入书中，激发学生的自主性，使学生的自主学习效果达到最优化，促进学生的全面发展。

本丛书在编写过程中引用了一些作者的作品，在此，对这些作者表示感谢，对一部分未署名的作品的作者表示歉意，并请与我们联系。由于编写时间仓促，书中难免存在不足之处，恳望读者不吝赐教，以便我们今后不断努力改进。

编　者

目录 CONTENTS

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

学习目标

1. 了解任意角的概念，了解象限角的概念，掌握终边相同的角的表示法.
2. 了解弧度制，能进行弧度与角度的互化.

要点透析

1. 讲象限角时要注意，如果角的顶点不与坐标原点重合，或者角的始边不与 x 轴的正半轴重合，则不能判断角在哪一个象限.

2. 与角 α 终边相同的角的一般形式为 $\alpha+k\cdot 360°$，要注意：①$k\in\mathbf{Z}$；②α 是任意角；③终边相同的角大小不一定相等；④终边相同的角有无数多个，它们相差 360°的整数倍.

3. 准确区分锐角，0°～90°的角，小于 90°的角，第一象限角.

锐角是 $0°<\alpha<90°$ 的角；0°～90°的角是 $0°\leqslant\alpha<90°$ 的角；小于 90°的角是 $\alpha<90°$ 的角，显然其中包括 0°角和负角；第一象限角是 $\{\alpha\mid k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 所表示的角.

4. 不管是以“弧度”还是以“度”为单位，角的大小都是一个与半径的大小无关的定值，用弧度为单位表示角时，常常把“弧度”两字省略不写，一些特殊角的度数与弧度数的互相换算，以后经常用到，必须熟练掌握.

5. 用弧度制表示角时不能与角度制混用，比如 $\alpha=2k\pi+30°$ $(k\in\mathbf{Z})$，$\beta=k\cdot 360°+\frac{3\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 都是不对的.

1.1.1 任 意 角

方法指津

例 1 在 0°到 360°范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们是第几象限角.

(1) 650°；(2) $-950°12'$.

分析 关键是如何把 β 表示成：$\beta=\alpha+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$，其中 $0°\leqslant\alpha<360°$，则 β 与 α 的终边相同，而 α 在 0°到 360°范围内，判断 α 是第几象限角就方便了.

解 (1) $\because 650°=290°+360°$ （其中 $\alpha=290°$，$k=1$），

$\therefore$在 0°到 360°范围内与 650°角终边相同的角是 290°，它是第四象限角.

(2) $\because -950°12' = 129°48' - 3 \times 360°$　（其中 $\alpha = 129°48'$，$k = -3$），

$\therefore$ 在 $0°$ 到 $360°$ 范围内与 $-950°12'$ 角终边相同的角是 $129°48'$，它是第二象限角.

例 2　若角 α 的终边和函数 $y = -|x|$ 的图象重合，求角 α 的集合.

分析　关键是熟练画出函数 $y = -|x|$ 的图象.

解　作函数 $y = -|x|$ 的图象，如图 1-1 所示.

$\because$ 在 $0° \sim 360°$ 范围内，$\alpha = 225°$ 或 $\alpha = 315°$，

$\therefore \alpha$ 的集合为

$\{\alpha \mid \alpha = 225° + k \cdot 360°$ 或 $\alpha = 315° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}\}$

$= \{\alpha \mid \alpha = (2k+1) \cdot 180° + 45°$ 或 $\alpha = 2(k+1) \cdot 180° - 45°,\ k \in \mathbf{Z}\}$

$= \{\alpha \mid \alpha = n \cdot 180° - (-1)^n \cdot 45°,\ n \in \mathbf{Z}\}$.

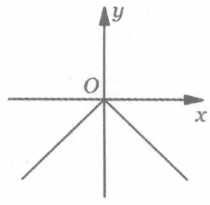

图 1-1

例 3　写出终边在如图 1-2 所示的阴影部分内（不包括边界）的角 α 的集合.

分析　通常有两种办法，一是区间的两端都用正角，一是区间的两端分别是一个负角和一个正角，但都应从小到大，即按逆时针方向旋转，如图 1-2，应将 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转到 OB 即可.

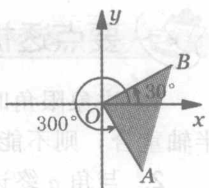

图 1-2

解　解法一：区间的两端均用正角表示，即

$\{\alpha \mid 300° + k \cdot 360° < \alpha < 390° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

解法二：区间的左右两端分别用负角和正角表示，即

$\{\alpha \mid k \cdot 360° - 60° < \alpha < k \cdot 360° + 30°,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

自我评估

1. 下列命题中正确的是（　　）.

A. 终边相同的角一定相等　　B. 相等的角终边一定相同

C. 第二象限的角比第一象限的角大　　D. 小于 $90°$ 的角都是锐角

2. 在 ① $170°$，② $470°$，③ $-960°$，④ $-1600°$ 这四个角中，属于第二象限角的是（　　）.

A. ①　　B. ①②　　C. ①②③　　D. ①②③④

3. 若 θ 是第四象限角，则 $180° - \theta$ 是（　　）.

A. 第一象限的角　　B. 第二象限的角

C. 第三象限的角　　D. 第四象限的角

4. 与 $45°$ 角终边在一条直线上的角可表示为（　　）.

A. $\{\alpha \mid \alpha = 45° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbf{Z}\}$　　B. $\{\alpha \mid \alpha = 135° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha \mid \alpha = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}\}$　　D. $\{\alpha \mid \alpha = -45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}\}$

5. 若角 2α 与 $140°$ 角的终边相同，则 $\alpha =$ ________________.

6. 与 $1\,000°$ 角终边相同且绝对值最小的角是 ________________.

7. 已知 $0° < \beta < 360°$，且角 β 的 7 倍角的终边与角 β 的终边重合，求角 β.

8. 分别写出终边在下列阴影部分内的角的集合.

(1)

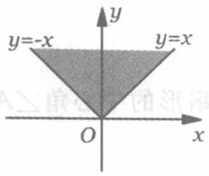

图 1-3

(2)

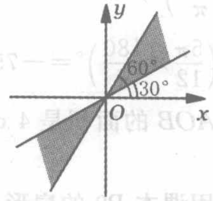

图 1-4

9. 已知角 β 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的正半轴重合，若角 β 的终边与过原点及点 $P(\sqrt{3},\ 1)$ 的直线重合，写出 β 的集合；当 $-360°<\beta<360°$ 时，求 β 的值.

探究应用

10. 若将时钟拨慢 5 min，则时针转了________度，分针转了________度.

11. 若角 θ 的终边与 $168°$ 角的终边相同，求在 $[0°,\ 360°)$ 内终边与 $\dfrac{\theta}{3}$ 角的终边相同的角.

1.1.2 弧　度　制

方法指津

例 1　(1) 将 $112°30'$ 化为弧度；(2) 将 $-\dfrac{5\pi}{12}$ rad 化为度.

分析　弧度与角度的互化，只要根据 $180°=\pi$ rad 就可以进行换算了.

解　(1) $\because 1°=\dfrac{\pi}{180}$ rad，

$\therefore 112°30'=\dfrac{\pi}{180}\times 112.5\ \text{rad}=\dfrac{5\pi}{8}$ rad.

（2）$\because 1\ \text{rad}=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$，

$\therefore -\dfrac{5\pi}{12}\ \text{rad}=-\left(\dfrac{5\pi}{12}\times\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=-75^\circ$.

例 2 已知扇形 AOB 的面积是 4 cm^2，它的周长是 8 cm，求扇形的中心角$\angle AOB$及弦 AB 的长.

分析 本题可应用课本 P9 的扇形公式求解.

解 设扇形的弧长为 l，半径为 R，则有

$$\begin{cases} l+2R=8, \\ \dfrac{1}{2}lR=4, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} l=4, \\ R=2. \end{cases}$$

$\therefore$扇形的中心角$\angle AOB=\dfrac{l}{R}=\dfrac{4}{2}=2$，弦 $AB=2\cdot 2\sin 1=4\sin 1$.

例 3 已知角 α 的终边与$\dfrac{\pi}{3}$的终边相同，在$[0,\ 2\pi)$内哪些角的终边与$\dfrac{\alpha}{3}$角的终边相同？

分析 首先角 α 的一般形式为 $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$），$\dfrac{\alpha}{3}$的一般形式为$\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{9}$（$k\in\mathbf{Z}$），然后讨论 k 的取值，使$\dfrac{\alpha}{3}\in[0,\ 2\pi)$.

解 $\because$角 α 的终边与$\dfrac{\pi}{3}$的终边相同，

$\therefore \alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$），$\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{9}$（$k\in\mathbf{Z}$）.

又$\because 0\leqslant\dfrac{\alpha}{3}<2\pi$，$\therefore 0\leqslant\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{9}<2\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）.

当 $k=0$，1，2 时，有$\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{\pi}{9}$，$\dfrac{7\pi}{9}$，$\dfrac{13\pi}{9}$，它们满足条件.

$\therefore$在$[0,\ 2\pi)$内与$\dfrac{\alpha}{3}$的终边相同的角有$\dfrac{\pi}{9}$，$\dfrac{7\pi}{9}$，$\dfrac{13\pi}{9}$.

自我评估

1. -330°的弧度数为（　　）.

A. $-\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $-\dfrac{5\pi}{3}$　　D. $-\dfrac{11\pi}{6}$

2. 已知集合 $A=\{\alpha\mid 2k\pi\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$B=[-4,\ 4]$，则 $A\cap B=$（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $[-4,\ 4]$

C. $[0,\ \pi]$　　D. $[-4,\ -\pi]\cup[0,\ \pi]$

3. 已知集合 $A=\left\{\alpha\mid\alpha=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{\alpha\mid\alpha=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 A 与 B 的关系为（　　）.

A. $A=B$　　B. $A\subseteq B$　　C. $A\supseteq B$　　D. 以上都不对

4. 在半径为 5 的圆中，圆周角为$\frac{2\pi}{3}$的角所对圆弧的长为（　　）.

A. $\frac{4\pi}{3}$　　B. $\frac{20\pi}{3}$　　C. $\frac{10\pi}{3}$　　D. $\frac{50\pi}{3}$

5. 半径为 4 cm 的扇形，若它的周长等于弧所在的半圆周的长，则这个扇形的面积是____________ cm^2.

6. 将弧度化为角度，或将角度化为弧度：

(1) $\frac{4\pi}{3}=$________；　　(2) $-\frac{7\pi}{8}=$________；

(3) $36°=$________；　　(4) $-105°=$________.

7. 计算：

(1) $\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$；　　(2) $5\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{4}$.

8. (1) 把 $112°30'$ 化为弧度；(2) 把 $-\frac{5}{12}\pi$ rad 化为度.

9. 一扇形周长为 20 cm，当扇形的圆心角 α 等于多少弧度时，这个扇形的面积最大？并求此扇形的最大面积.

探究应用

10. 已知集合 $M=\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\}$，试确定集合 M，N，P 之间的关系.

11. 直径为 12 cm 的轮子，以 400 r/min 的速度做逆时针旋转，求：

（1）轮周上一固定点每 1 s 转过的弧度数；

（2）轮周上一固定点转动 500°所经过的距离.

1.2　任意角的三角函数

学习目标

1. 借助单位圆理解任意角的三角函数（正弦、余弦、正切）的意义，了解利用角 α 终边上任意一点的坐标定义任意角的三角函数.

2. 掌握公式一：终边相同的角的同一三角函数的值相等.

3. 理解和掌握单位圆中的三角函数线，它是数形结合的有效工具.

4. 理解同角三角函数的基本关系式：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.

要点透析

1. 本节将三角函数的自变量从锐角推广到任意角，任意角的三角函数都是以角为自变量，以单位圆上的点的坐标或坐标的比值为函数值的函数. 由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，所以三角函数可以看成是自变量为实数的函数.

2. 终边相同的角的同一三角函数的值相等. 利用这一公式，可以把求任一角的三角函数值转化为求 $0\sim 2\pi$（或 $0°\sim 360°$）角的三角函数值.

3. 学习三角函数线，在用字母表示有向线段时，要注意它们的方向，分清起点和终点其书写的顺序不能颠倒.

4. 注意三角函数记号是一个整体，$\sin\alpha$ 不是 sin 与 α 的乘积，注意三角函数记号的第一个字母都不能大写.

5. 同角三角函数的基本关系是对同一个角而言的，即 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$ 是不成立的. 利用同角三角函数关系式化简三角函数式是同角三角函数关系式的一个重要运用.

6. 求三角函数值时确定结果符号是个关键，用平方关系式求值时：①若给出角所在的象限，则有确定的一组解；②已知三角函数值，但没有给出角所在的象限，应先确定角可能存在的象限，然后对各象限求解，这时一般有两解；③如果所给函数值含有字母，则角可能在四个象限，或是轴线角，但我们可以把两个象限的角的三角函数放在一起，也可得到两组解.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1.2.1 任意角的三角函数

任意角的三角函数概念

方法指津

例 1 求 $\frac{5\pi}{6}$ 的正弦、余弦和正切值.

分析 在直角坐标系中，作$\angle AOB=\frac{5\pi}{6}$，求出$\angle AOB$的终边与单位圆的交点坐标，利用任意角的三角函数定义求解.

解 在直角坐标系中，作$\angle AOB=\frac{5\pi}{6}$，易知$\angle AOB$的终边与单位圆的交点坐标为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，所以 $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

评注 本题意在根据定义求任意角的三角函数值，当然希望同学们要熟记一些特殊角的三角函数值.

例 2 判定下列各式的符号：

(1) $\sin105°\cdot\cos230°$；(2) $\tan191°-\cos191°$.

分析 角度确定了，所在象限就确定了，三角函数值的符号也就确定了，因此由角所在象限分别判断各三角函数值的符号，进一步再确定各式的符号.

解 (1) $\because \sin105°>0$，$\cos230°<0$，$\therefore \sin105°\cdot\cos230°<0$.

(2) $\because \tan191°>0$，$\cos191°<0$，$\therefore \tan191°-\cos191°>0$.

例 3 化简 $a^2\sin(-1\,350°)+b^2\tan405°-(a-b)^2\tan765°-2ab\cos(-1\,080°)$.

分析 利用公式一，将任意角的三角函数化为 $0\sim2\pi$（或 $0°\sim360°$）间的三角函数，再计算.

解
$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=a^2\sin(-4\times360°+90°)+b^2\tan(360°+45°)-(a-b)^2\tan(2\times360°+45°)-\\
&\quad 2ab\cos(-3\times360°+0°)\\
&=a^2\sin90°+b^2\tan45°-(a-b)^2\tan45°-2ab\cos0°\\
&=a^2+b^2-(a-b)^2-2ab\\
&=0.
\end{aligned}
$$

自我评估

1. 设 $\alpha=-405°$，则与 α 终边相同的角的集合是（　　）.

   A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+405°,\ k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+45°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

   C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+315°,\ k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+30°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

2. 如果角 α 的终边过点 $(2\sin30°,\ -2\cos30°)$，则 $\sin\alpha$ 的值等于（　　）.

   A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 函数 $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{|\tan x|}{\tan x}$ 的值域是（　　）.

A. $\{-1, 3\}$　　B. $\{1, 3\}$　　C. $\{-1, 1\}$　　D. $\{-1, -3\}$

4. $a^2\cos 2\pi-b^2\sin\frac{3\pi}{2}+ab\cos\pi-ab\sin\frac{\pi}{2}$的值等于（　　）.

A. a^2+b^2　　B. $(a-b)^2$　　C. $(a+b)^2$　　D. $-2ab$

5. 已知角 α 的终边在直线 $y=\sqrt{3}x$（$x<0$）上，则 $\sin\alpha=$________，$\tan\alpha=$________.

6. 已知角 α 的终边经过点（$3a-9$，$a+2$），且 $\cos\alpha\leqslant 0$，$\sin\alpha>0$，则 a 的取值范围是________________.

7. 计算 $\sin 390°+\cos(-660°)+3\tan 405°-\cos 540°$.

8. 试确定 $\sin 1\ 835°\cdot\tan(-1\ 690°)+\cos 840°\cdot\tan(-140°)$ 的符号.

9. 写出下列各式中 x 所在的象限：

(1) $\frac{\tan x}{\sin x}>0$；(2) $\cos x$ 与 $\tan x$ 异号；(3) $\tan x\cdot\cos x>0$ 且 $\tan x\cdot\sin x<0$.

探究应用

10. 若角 θ 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的正半轴重合，终边过点 $P(-4x, 3x)$（$x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$），求 $2\sin\theta + \cos\theta$ 的值.

11. 若 $\sin 2\theta > 0$ 且 $\cos\theta < 0$，试确定角 θ 所在的象限.

三角函数线

方法指津

例 1 在单位圆中画出适合下列条件的角 α 的终边：

（1）$\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$；（2）$\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$；（3）$\tan\alpha = 2$.

分析 对于（1）只要在单位圆上找出纵坐标为 $\dfrac{2}{3}$ 的点，对于（2）只要在单位圆上找出横坐标为 $-\dfrac{3}{5}$ 的点，对于（3）只要在直线 $x=1$ 上截取 $AT=2$，其中 A（1，0）.

解 （1）作直线 $y=\dfrac{2}{3}$ 交单位圆于 P、Q 两点，则 OP 与 OQ 为角 α 的终边（如图1-5）.

（2）作直线 $x=-\dfrac{3}{5}$ 交单位圆于 M、N 两点，则 OM 与 ON 为角 α 的终边（如图 1-6）.

（3）在直线 $x=1$ 上截取 $AT=2$，其中 A（1，0），设直线 OT 与单位圆交于 C、D 两点，则 OC 与 OD 为角 α 的终边（如图 1-7）.

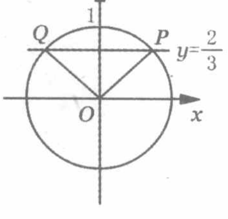

图 1-5

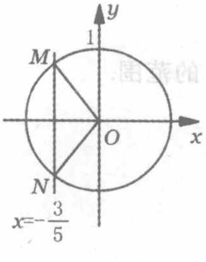

图 1-6

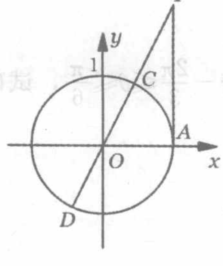

图 1-7

自我评估

1. 若 α、β 的终边关于 y 轴对称，则下列等式成立的是（　　）.

A. $\sin\alpha=\sin\beta$　　B. $\cos\alpha=\cos\beta$

C. $\tan\alpha=\tan\beta$　　D. $\sin\alpha=\sin\beta$ 且 $\cos\alpha=\cos\beta$

2. 若 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，则下列不等式成立的是（　　）.

A. $\sin\theta>\cos\theta>\tan\theta$　　B. $\cos\theta>\tan\theta>\sin\theta$

C. $\tan\theta>\sin\theta>\cos\theta$　　D. $\sin\theta>\tan\theta>\cos\theta$

3. 设 α 是第四象限角，那么 $\sin\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 的大小关系是（　　）.

A. $\sin\alpha<\tan\alpha$　B. $\sin\alpha\geqslant\tan\alpha$　C. $\sin\alpha>\tan\alpha$　D. 以上都有可能

4. 在 $[0,\ 2\pi]$ 上满足 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是（　　）.

A. $\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$　B. $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right]$　C. $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi\right]$　D. $\left[\frac{5}{6}\pi,\ \pi\right]$

5. 已知角 α 的顶点是坐标原点，始边与 x 轴正半轴重合，设 $P(2,\ y)$ 是角 α 终边上一点，且 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\cos\alpha=$________.

6. 已知集合 $M=\{\theta\mid\sin\theta\geqslant\frac{1}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，$N=\{\theta\mid\cos\theta\leqslant\frac{1}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，则 $M\cap N$ 等于________________.

7. 分别作出角 $\frac{\pi}{3}$ 和 $-\frac{2\pi}{3}$ 的正弦线、余弦线和正切线.

8. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，利用三角函数线证明 $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

9. 若 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$，试确定 $\sin\theta$ 的范围.

探究应用

10. 在单位圆中画出适合下列条件的角 α 终边的范围，并由此写出角 α 的集合：

(1) $\sin\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$.

11. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，求证 $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.

拓展视野

单位圆的魅力

古希腊毕达哥拉斯学派认为："一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形."17 世纪数学家布龙克尔说过："圆是第一个最简单、最完美的图形."现代学者钱钟书云："窃尝谓形之浑简完备，无过于圆."而黑格尔更有"以哲学比圆"之说，可见历代和现代学者对圆的赞赏和重视！

从动的眼光看，圆，大至宇宙，小至粒子，都有它的轨迹．圆可看成车轮之恒转，无始无终，无穷无尽；也可看成从某一起点出发的动点，与一定点保持一定距离运动一周之后，又回到原来起点的轨迹，形成起点与终点的重合，即有始有终．因此，圆集有限与无限于一身，形成辩证的统一．

从静的眼光看，圆具有各个方向的中心对称，其形状增之显多，缺之显少，都将失之完备，无论处于哪个位置，都具有同一的形状，给人以一种匀称、稳定、和谐的感觉．因此，圆又融动静于一体．

单位圆是以原点为圆心、以 1 个单位长为半径的圆，既具有圆的各种通性，又具有自身的特殊性，好像是位于平面"中心"的一个"平面单位元素"，更是一个最基本、最简单的

图形.

单位圆的特殊性将显示其特殊的功能，如原子的核子，蕴藏着巨大的能量；如物质的细胞，孕育着无穷的活力.

利用单位圆中的有向线段定义的三角函数（称三角函数线），具有鲜明的直观性；利用三角函数线平移作出的三角函数图象，恰如同展开一幅折叠的神奇画卷．那正弦、余弦曲线如同滚动的万顷波涛；那正切、余切曲线犹如奏出的优美乐章，真是妙不可言！而单位圆的内接正十边形的边长，又恰为黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，其中蕴藏着无穷的奥妙！

且看单位圆的方程 $x^2+y^2=1$，又看同角三角函数的关系式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$（同学们将在1.2.2节中学到这一知识，编者注），再看斜边 $c=1$ 的直角三角形的三边关系式 $a^2+b^2=1$，还有模为1的复数 $z=a'+b'\mathrm{i}$，有关系式 $a'^2+b'^2=1$（同学们将在选修1-2中学到复数的有关知识，编者注）．它们的结构是如此的相似和雷同，不正说明了点(x,y)，$(\cos\theta,\sin\theta)$，(a,b)，(a',b') 都是单位圆上的点吗？不正说明了单位圆沟通了解析几何、三角函数、平面几何、代数之间的联系吗？这之间的微妙关系，不正体现出数学结构和内容的和谐、统一、协调之美吗？因此，单位圆蕴藏着无穷的奥妙，显示出无穷的魅力，而奥妙与魅力的背后，必将蕴藏着广泛的功能，单位圆又是一块宝地，其功能（包括对数学本身的实用功能和开展美育以及辩证唯物主义教育功能）与宝藏，有待我们去继续发掘和开采.

相关链接：

《数学美拾趣》，张景中主编，科学出版社.

1.2.2 同角三角函数的基本关系

方法指津

例1 已知 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

分析 由 $\cos\alpha$ 求 $\sin\alpha$，可利用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，但要注意 α 所在的象限.

解 $\because \cos\alpha=-\frac{8}{17}<0$，$\therefore \alpha$ 是第二或第三象限的角.

若 α 是第二象限的角，则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{15}{8}$；

若 α 是第三象限的角，则 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{15}{17}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{15}{8}$.

例2 已知 $3\sin\alpha-2\cos\alpha=0$，求下列各式的值：

(1) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$；(2) $2\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha$.

分析一 (1) 中分式的分子和分母均为关于 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的一次齐次式，可将分式的分子和分母同除以 $\cos\alpha$（$\because \cos\alpha\neq 0$），然后将 $\tan\alpha=\frac{2}{3}$ 代入计算．(2) 中可将式子看成分母为1的“分式”，利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 使得分子和分母都是关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的二次齐次式.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com