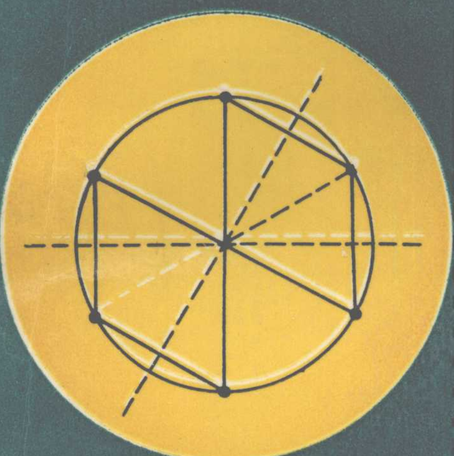
GAODENGXUEXIAO
HANSHOUSHIYONGJIAOCAI

高等学校函授试用教材

电动力学

潘国华 李劲松 主编



华中师范大学出版社

高等学校函授试用教材

电动力学

潘国华　李劲松　主编

潘国华　刘国章　甘仲惟
纪焕庭　李文川　李劲松　陈元植　编

华中师范大学出版社

内容提要

本书根据1984年原教育部颁发试行的《中学教师进修高等师范本科物理专业教学大纲》编写而成。

全书共分七章，第一章矢量场论复习，第二章电磁现象的普遍规律，第三章静电场，第四章稳恒电流磁场，第五章电磁波的传播，第六章电磁波的辐射，第七章狭义相对论。每章前有内容提要，后有小结、思考题和习题，并附有习题答案。全书内容约需面授40学时。

本书可作为高等师范院校本科物理专业函授和中学物理教师进修的教材，也可作为夜大学等其他形式的成人教育教材和自学用书。

高等学校函授试用教材
电动力学
潘国华　李劲松　主编
*
华中师范大学出版社出版
（武昌桂子山）
新华书店湖北发行所发行
华中师范大学印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 12.375　字数 321 千字
1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷
ISBN 7-5622-0126-9/O·15
印数：1—7000　　定价：2.80元

前言

随着函授等成人高教事业的蓬勃发展，迫切需要能保证教学质量、体现函授等成人教育特点并适合于自学的教材．华中师范大学、华南师范大学、陕西师范大学、广西师范大学、湖南师范大学、湖北大学、河南大学、河南师范大学、陕西教育学院和湖北教育学院十所高等学校，根据原教育部颁发试行的《中学教师进修高等师范本科物理专业教学大纲》，结合各校多年来举办函授和中学教师进修的实践，合编了物理专业函授教材17门．本书是该系列教材之一．

电动力学是高等师范院校物理专业的一门重要基础理论课程，其研究对象是电磁场的基本性质和运动规律以及电磁场与带电物质之间的相互作用．

电动力学是在人类对电磁现象的长期观察和研究的基础上发展起来的．19世纪后半期，由英国物理学家麦克斯韦把电磁规律总结为麦克斯韦方程组，并从理论上预言电磁波的存在，同时，确定了电荷受力的洛仑兹力公式，从而奠定了电动力学的理论基础，而后赫兹的实验证实了电磁波的预言，这样人类就开辟了一个新的科学研究领域．通过对电磁波的研究，不仅把光波和电磁波统一起来，而且促进了从无线电波到微波、激光等尖端学科的发展．

学习本课程之主要目的是：掌握电磁场和带电粒子运动的基本规律，了解狭义相对论的基本理论；初步获得用电动力学知识分析和处理一些基本问题的方法和能力；加深对中学物理内容的理解；并为学习后继课程打下基础．

本课程主要讲述宏观电磁理论及狭义相对论．其中第一章矢量场论复习，是学习电动力学必备的数学知识；第二章主要是在实验定律的基础上，总结出电磁现象的普遍规律、建立麦克斯韦

方程组和洛仑兹力公式；第三章讨论静电场的基本理论和求解电场的基本解析方法；第四章阐述稳恒电流磁场的基本规律，并讨论似稳电磁场；第五章论述电磁波在介质和导体中的传播；第六章论述电磁波的辐射，主要介绍迅变电磁场的势和电偶极辐射，并简要介绍其他几种电磁辐射；第七章阐明狭义相对论的基本原理，相对论的时空理论，相对论力学以及电磁规律的协变形式．

在编写过程中，我们力图使教材符合培养规格，保证教学质量，达到全日制高师本科物理专业的科学水平．为了使教材体现函授等成人教育的特点，适合于自学，除每章有内容提要、小结、思考题、习题（附有答案）外，选择的例题典型而全面，公式的推导详细明确，注意突破难点和适当联系中学物理实际．

全书采用国际单位制．

本书由华中师范大学潘国华副教授和河南师范大学李劲松副教授担任主编．参加编写的有潘国华（第一章）、河南大学刘国章（第二章）、华中师范大学昔仲惟（第三章）、河南师范大学纪焕庭（第四章）、湖北大学李文川（第五章）、李劲松（第六章），华南师范大学陈元植（第七章）．全书由主编负责统审定稿．余汉香同志绘制了书中全部插图．

由于我们编写函授教材的经验不足，水平有限，加之时间仓促，书中难免有不少缺点和错误，诚恳希望使用本书的教师和读者批评指正．

《电动力学》函授教材编写组

1987年11月

目　录

第一章 矢量场论复习

内容提要

本章是在已学过矢量分析与场论的基础上进行复习．前三节阐述梯度、散度、旋度的概念及其在直角坐标系中的运算公式．其中，包括两个重要的定理，即高斯定理和斯托克斯定理．第四节是二阶微分运算，即将算符∇两次作用到标量场和矢量场的运算方法．最后一节是正交曲线坐标系，重点讨论最常用的柱坐标系和球坐标系，得出梯度、散度、旋度以及拉普拉斯算符在这两个坐标系中的表示式，以便在后面各章运用。

§1 标量场的梯度 方向导数

1．场的概念 在物理学中，常常要研究某种物理量在空间的分布和变化规律．如果在全部空间或部分空间的每一点都对应着该物理量的一个确定值，则称在此空间确定了该物理量的场．如果此物理量是标量，则称该场为标量场；若是矢量，则称为矢量场。例如：电位场、温度场、密度场等为标量场；而电场、磁场、速度场等为矢量场．

场是用空间的点函数来表征的，若场中的物理量在各点处的对应值不随时间而变化，便称该场为稳定场；否则，称为不稳定场．本章着重讨论稳定场，对于不稳定场，可在稳定场的基础上，再讨论对时间的变化．

2．方向导数 在标量场中，往往需要研究函数沿任意方向的变化率．例如，为了掌握某一地区在某一段时间内的气候情况，就需要研究该地区周围沿各个方向的大气温度以及气压的变化率，为此有必要引入标量场的方向导数概念．

标量场的方向导数表示标量场沿某个任意方向的变化率．如图 1-1，$\boldsymbol{l}$ 表示场中某任意方向的一个矢量，P_1 是这个方向线上任意给定的一点，P_2 为同一方向线上邻近 P_1 的一点，Δl 为 P_1 与 P_2 之间的距离，标量场 $\varphi(x,y,z)$ 在这两点的值分别为 $\varphi(P_1)$、$\varphi(P_2)$，$\Delta\varphi=\varphi(P_2)-\varphi(P_1)$ 是 φ 从 P_1 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向移到 P_2 的增量，若下列极限存在：

图 1-1

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi(P_2)-\varphi(P_1)}{\Delta l} \tag{1.1}$$

则该极限值称为标量场 $\varphi(x,y,z)$ 在 P_1 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数（或方向变化率），记作：$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{P_1}$．由此可知方向导数是标量函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$（$\boldsymbol{x}$ 代表 x,y,z 一组数，具体表示空间一点的位置）在一点处沿某一方向对距离的变化率．它的数值与所取 $\boldsymbol{l}$ 方向有关，但它并不是矢量．

3．**梯度**　方向导数解决了函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在给定点处沿某个任意方向的变化率问题．可是从一个点出发，有无穷多个方向，即一个点的方向导数有无穷多个．一般来说，在不同的方向上，$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{P_1}$ 是不同的，那么，其中有没有一个最大的呢？如果有，它的大小如何计算？它的方向如何确定？它与其他任一方向的变化率有何关系？解决这几个问题，需要引进梯度概念．

设给定标量场 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 以及场中某一点，若过该点有一单位矢量 $\boldsymbol{n}$，使得 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在该点，沿 $\boldsymbol{n}$ 的方向变化率最大，这样定义的一个矢量，称为 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在该点的梯度，记作

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{1.2}$$

显然，上式回答了前面提出的部分问题：在给定点处，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}$ 是一个确定的矢量，在 $\boldsymbol{n}$ 方向上 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 有最大的变化率 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$．下面我

们来讨论场中同一点梯度与其他任一方向的变化率之间的关系.

在标量场 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 中，凡是满足方程 $\varphi(\boldsymbol{x})=c$（常数）的点所构成的一个或几个分离的曲面，称为等值面，例如，电学中电势相同的点构成等势面. 在图 1-2 中画出两个等值面，$\boldsymbol{n}$ 表示等值面 $\varphi=c'$ 上 P 点的法线方向，它指向 φ 增长的方向. $\boldsymbol{l}$ 表示过 P 点的任一方向，当 $\overline{PP_2}\to 0$ 时，

$$\overline{PP_2}=\frac{\overline{PP_1}}{\cos\theta}$$

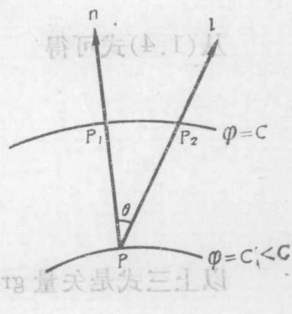


图 1-2

所以

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_P=\lim_{\overline{PP_2}\to 0}\frac{\varphi_{P_2}-\varphi_P}{\overline{PP_2}}$$

$$=\cos\theta\lim_{\overline{Pp_1}\to 0}\frac{\varphi_{P_1}-\varphi_P}{\overline{PP_1}}$$

$$=\cos\theta\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_P$$

即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{1.3}$$

用 $\boldsymbol{l}_0$ 表示 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位矢量，从此式看出，当 $\boldsymbol{l}_0\neq\boldsymbol{n}$ 时，总有 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}<\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，可见，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 是数值最大的一个方向导数，按梯度定义，$\boldsymbol{n}$ 方向就是梯度的方向，而 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 是梯度的大小，所以梯度的方向和该点的等值面垂直. 将(1.3)式改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}_0=(\mathrm{grad}\varphi)\cdot\boldsymbol{l}_0 \tag{1.4}$$

此式表明只要求出某点的梯度，就可用它来确定 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在该点沿任一方向上的方向导数，这就是它们两者之间的关系.

4. ∇算符 在场论中为了简化运算手续常引进以下算符

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.5}$$

此算符具有矢量特性和微分运算特性，将它作用到标量场 φ 上，

定义为

$$\nabla\varphi=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.6}$$

从(1.4)式可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\mathrm{grad}_x\,\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mathrm{grad}_y\,\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\mathrm{grad}_z\,\varphi$$

以上三式是矢量 $\mathrm{grad}\varphi$ 在直角坐标系中的三个分量，即

$$\mathrm{grad}\varphi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.7}$$

将此式与(1.6)式对比，可见

$$\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi$$

对于标量场 φ 的梯度，以后我们就用 $\nabla\varphi$ 表示.

例 1　设 $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ 为源点 $\boldsymbol{x}'$ 与场点 $\boldsymbol{x}$ 之间的距离，$\boldsymbol{r}$ 的方向规定为从源点指向场点.试分别对场点和源点求梯度，并体会它们之间的关系.

解　如图 1-3 所示，$P'(x',y',z')$ 与 $P(x,y,z)$ 是 r 的两个端点，一般称 P' 点为源点(如电场中电荷所在点)，称 P 点的场点(也称观察点).

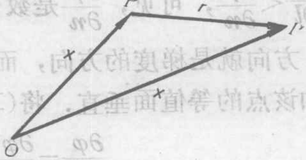


图 1-3

(1) 源点固定，r 是场点的函数，对场点求梯度用 ∇r 表示.

$$\nabla r=\boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z}$$

因为

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

所以

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot 2(x-x')=\frac{x-x'}{r}$$

同理有

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y'}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-z'}{r}$$

故

$$\nabla r=\boldsymbol{i}\frac{x-x'}{r}+\boldsymbol{j}\frac{y-y'}{r}+\boldsymbol{k}\frac{z-z'}{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}_0 \tag{1.8}$$

由此可见，在源点固定时，对场点求梯度 ∇r，得到沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量 $\boldsymbol{r}_0$. 说明函数 r 沿 $\boldsymbol{r}$ 方向变化最快，其变化率为1.

（2）场点固定，r 是源点的函数，对源点求梯度用 $\nabla' r$ 表示.

$$\nabla' r=\boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x'}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y'}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z'}$$

因为

$$\frac{\partial r}{\partial x'}=-\frac{x-x'}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y'}=-\frac{y-y'}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z'}=-\frac{z-z'}{r}$$

所以

$$\nabla' r=-\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\boldsymbol{r}_0=-\nabla r \tag{1.9}$$

此式表明，对场点求梯度和对源点求梯度所得到的两个矢量，方向相反，数值相等，说明函数 r 在源点沿着 $\boldsymbol{r}$ 的反方向增长最快。

例 2　利用算符的微分性和矢量性，证明下列等式：

（1）$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

（2）$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$
$+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$

证 （1）根据∇算子的微分性质，并按乘积的微分法则，有

$$\nabla(uv)=\nabla(u_C v)+\nabla(u v_C)$$

此式右端 u_C、v_C 表示它们不被∇作微分运算，待运算完毕之后，再予除去．依此得到

$$\begin{aligned}\nabla(uv)&=u_C\nabla v+v_C\nabla u\\&=u\nabla v+v\nabla u\end{aligned}$$

（2）由∇的微分性有

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_C)+\nabla(\boldsymbol{A}_C\cdot\boldsymbol{B})\\&=\nabla(\boldsymbol{B}_C\cdot\boldsymbol{A})+\nabla(\boldsymbol{A}_C\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

再考虑∇的矢量性，根据矢量代数公式

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

可得

$$\nabla(\boldsymbol{B}_C\cdot\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{B}_C\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_C\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}_C\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}_C\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_C\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=&(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\\&+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

例 3 设 u 是空间坐标 x, y, z 的函数，证明

$$\nabla f(u)=\frac{df}{du}\nabla u$$

证 这是求复合函数的梯度，按复合函数微分法有

$$\begin{aligned}\nabla f(u)&=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}f(u)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}f(u)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}f(u)\\&=\boldsymbol{i}\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial z}\\&=\frac{df}{du}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=\frac{df}{du}\nabla u\end{aligned}$$

§2 矢量场的散度 高斯定理

1. 通量 在流体力学中常常要计算单位时间内通过某曲面的流量，为了区分曲面的两侧，需要规定面积元矢量 $\boldsymbol{dS}$，其大小等于该面积，其方向为该面之法线方向，而法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 与面积元周界的绕行方向组成右手螺旋关系，如图 1-4 所示．若是闭合的曲面，则规定 $\boldsymbol{n}$ 为由曲面的内侧指向外侧．这种取定了法向的曲面，称为有向曲面．

图 1-4

在流动的液体中，每一点都有一定的流速 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$，它们在流体中的分布，构成了一个矢量场．为了简便，假定流体的密度为 1．设 $\boldsymbol{dS}$ 为流体通过的一个面元，$\boldsymbol{dS}$ 取得很小，以致在面元上各点的 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ 可以近似地看成是均匀的．在这样的假定下，单位时间内，沿着 $\boldsymbol{v}$ 方向，通过 $\boldsymbol{dS}$ 的流量 dN，是以 $\boldsymbol{dS}$ 为底，以 $v\cos\theta$ 为高的斜柱体的体积，如图 1-5．所以

$$dN = v\cos\theta dS = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{dS} \qquad (2.1)$$

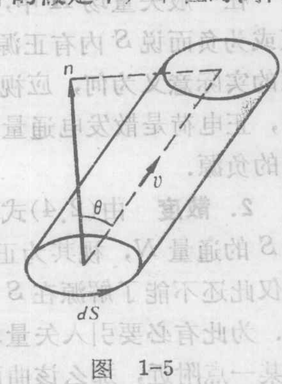


图 1-5

dN 称为矢量 $\boldsymbol{v}$ 通过面元 $\boldsymbol{dS}$ 的通量．电磁学中，电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 与面元 $\boldsymbol{dS}$ 的乘积 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS}$，表示通过 $\boldsymbol{dS}$ 的电力线数(电通量)，磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{dS}$ 的乘积 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dS}$，表示通过 $\boldsymbol{dS}$ 的磁力线数(磁通量)，还有电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{dS}$ 的乘积 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{dS}$，表示通过

dS 的电流强度等等．所以将(2.1)式推广到任意矢量场 $\boldsymbol{A}$，可得出 $\boldsymbol{A}$ 通过 $d\boldsymbol{S}$ 的通量，即

$$dN=\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.2}$$

一般情况下，对于有向曲面 S，在求 $\boldsymbol{A}$ 的通量 N 时，必须将 S 分成许多小的面元 $d\boldsymbol{S}$，如图1-6，每个 $d\boldsymbol{S}$ 都近似地看成一平面，而且每个 $d\boldsymbol{S}$ 上的 $\boldsymbol{A}$ 也都近似地看成是均匀的，这样通过曲面每一面元的通量 $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ 的代数和称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 通过 S 的通量 N．即

$$N=\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.3}$$

图 1-6

对于闭合曲面 S，$\boldsymbol{A}$ 的通量 N 为

$$N=\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.4}$$

在一般矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，对于通过闭合曲面 S 的通量 N，视其为正或为负而说 S 内有正源(又称源头)或负源(又称尾闾)，至于其源的实际意义为何，应视具体的物理场而定．例如，在静电场中，正电荷是散发电通量(电力线数)的正源，负电荷是吸收电通量的负源．

2．散度　由(2.4)式可知，在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，对于通过闭合曲面 S 的通量 N，视其为正或为负，可以得知 S 内有正源或负源．但仅此还不能了解源在 S 内的分布情况以及源的强弱程度等问题．为此有必要引入矢量场的散度概念．设想闭合曲面逐渐缩小到某一点附近，那么该曲面所包围的体积逐渐减小，$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ 也逐渐减小，一般说这两者的比有一极限值．这极限值表示该点附近通过包围单位体积的闭合曲面的总通量，与闭合曲面的形状无

关，定义矢量场$\boldsymbol{A}$在该点的散度，记为$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{2.5}$$

由此式可见，散度$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$为一标量，表示场中一点处的通量对体积的变化率，反映该点处源的强度．因此，当$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$的值为正或为负，就顺次表示在该点有散发通量的正源或有吸收通量的负源，并且$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$的数值就相应地表示在该点的场源之强度．而处处$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$的场则称为无源场或无散场．

3．高斯定理 我们来计算矢量$\boldsymbol{A}$在某一闭合曲面上的总通量，从而推导出一个重要的定理．首先假定此闭合曲面是一个无限小的平行六面体的闭合表面，如图1-7所示．此闭合面的法线如前所述，都是由内指向外的．

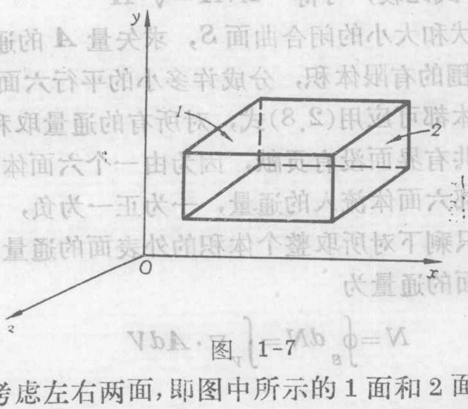


图 1-7

首先考虑左右两面，即图中所示的1面和2面．这两个面元矢量分别为：$-\boldsymbol{i}dydz$，$\boldsymbol{i}dydz$；于是矢量$\boldsymbol{A}$在这两个面元上的通量为

$$dN_1=\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_1=-A_x(x,y,z)dydz$$

$$dN_2=\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_2=A_x(x+dx,y,z)dydz$$

二者之和以dN_x表示，则

$$dN_x=[A_x(x+dx,y,z)-A_x(x,y,z)]dydz$$

$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz$$

同理考虑上下两面、前后两面，可得以下二式.

$$dN_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} dxdydz$$

$$dN_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} dxdydz$$

所以总通量为

$$dN = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dxdydz \qquad (2.6)$$

利用(1.5)式引进的算符∇，上式括号中的和可记作$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$. 即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (2.7)$$

将此式代入(2.6)式，则有

$$dN = \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV \quad (dV = dxdydz) \qquad (2.8)$$

将此式与(2.5)式比较，可得 $\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$

对任意形状和大小的闭合曲面S，求矢量$\boldsymbol{A}$的通量时，可以将曲面S包围的有限体积，分成许多小的平行六面体，对其中每一个小六面体都可应用(2.8)式，对所有的通量取和时，两个相邻六面体的共有界面没有贡献，因为由一个六面体的侧面流出的通量恰为相邻六面体流入的通量，一为正一为负，二者之和恰好相消. 所以只剩下对所取整个体积的外表面的通量，故矢量$\boldsymbol{A}$对有限闭合曲面的通量为

$$N = \oint_S dN = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV$$

再由(2.4)式得

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV \qquad (2.9)$$

式中V为闭合曲面所围成的体积，此式是一个重要的定理，称为高斯定理，它能把对某一闭合曲面的面积分转化为对该曲面所包围体积的体积分（或反之）.

例 1 设$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$表示空间一点$(x, y, z)$的矢径，求$\nabla \cdot \boldsymbol{r}$和$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$.