

主编
邓恒道
丁 锐
潘庆仲



学生物数学教程

苏州大学出版社

高等医药院校教材

医学生物数学教程

主编 邓恒道 丁 锐 潘庆仲

苏州大学出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

医学生物数学教程/邓恒道,丁锬,潘庆仲主编.
苏州:苏州大学出版社,1999.2(2002.8重印)
高等医药院校教材
ISBN 7-81037-503-2

I. 医… II. ①邓…②丁…③潘… III. 医用数
学:生物数学-医学院校-教材 IV. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 047330 号

医学生物数学教程

邓恒道 丁 锬 潘庆仲 主编

责任编辑 秦 淦

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)

吴县市机关印刷厂印装

(地址:吴县市东苑路 54 号 邮编:215128)

开本 787×1092 1/16 印张 20 字数 499 千

1999 年 2 月第 1 版 2002 年 8 月第 3 次印刷

印数 8001-11600 册

ISBN7-81037-503-2/0·23(课) 定价:24.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换

前 言

当今生命科学(包括生物、医药学)日新月异,医学生物数学已成为从事生命科学的工作者不可缺少的重要工具。基于高等医药院校教学改革的实际情况,本着“削枝、强干、够用、学会”的原则,既不过分追求学科的系统性和理论的严谨性,又不失教材本身的系统性和科学性,我们编写了这本《医学生物数学教程》。全书共有十三章,前九章是一元和多元函数微积分,微分方程,空间解析几何与向量代数,可作为医疗、口腔、儿科和妇产科等专业的必修课;后四章是无穷级数,概率论基础,统计学和线性代数初步,可作为选修课教材,整个教材可供卫生、药学和生物等专业的教材或参考书,也可作为从事医药、卫生、生物等方面的教学及科研人员的参考书。

在编写过程中,先由各参编人员分工编写初稿,再由副主编、主编逐次分工修改,最后由主编邓恒道教授统一定稿。

限于编者水平,本书难免存在缺点甚至错误,敬请读者批评指正。

编 者

1998 年仲秋



目 录

第一章 函数 极限 连续

第一节 函数	(1)
第二节 极限	(6)
第三节 连续性	(16)
习题一 部分习题参考答案	(20)

第二章 导数和微分

第一节 导数概念	(23)
第二节 微分概念	(33)
习题二 部分习题参考答案	(36)

第三章 微分中值定理和导数应用

第一节 微分中值定理	(40)
第二节 导数应用	(42)
习题三 部分习题参考答案	(52)

第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念和性质	(56)
第二节 换元积分法和分部积分法	(59)
第三节 有理函数及三角函数有理式的积分举例	(68)
第三节 积分表的使用法	(73)
习题四 部分习题参考答案	(73)

第五章 定积分及其应用

第一节 定积分的概念	(77)
第二节 微积分基本定理	(81)
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法	(83)
第四节 定积分的近似计算	(88)
第五节 广义积分	(89)

第六节 定积分的应用	(92)
------------------	------

习题五 部分习题参考答案	(100)
--------------------	-------

第六章 常微分方程及其应用

第一节 微分方程的基本概念	(104)
---------------------	-------

第二节 一阶微分方程	(106)
------------------	-------

第三节 可降阶的高阶微分方程	(109)
----------------------	-------

第四节 二阶线性微分方程	(112)
--------------------	-------

第五节 常微分方程的应用举例	(118)
----------------------	-------

习题六 部分习题参考答案	(126)
--------------------	-------

第七章 空间解析几何与向量代数

第一节 空间直角坐标系	(129)
-------------------	-------

第二节 空间向量	(131)
----------------	-------

第三节 平面及其方程	(135)
------------------	-------

第四节 空间直线及其方程	(138)
--------------------	-------

第五节 空间曲面和空间曲线	(140)
---------------------	-------

习题七 部分习题参考答案	(143)
--------------------	-------

第八章 多元函数微分学

第一节 多元函数的概念、二元函数的极限与连续	(145)
------------------------------	-------

第二节 偏导数与全微分	(148)
-------------------	-------

第三节 复合函数和隐函数的偏导数	(153)
------------------------	-------

第四节 二元函数的极值、条件极值和最值	(155)
---------------------------	-------

习题八 部分习题参考答案	(158)
--------------------	-------

第九章 二重积分及其应用

第一节 二重积分的概念与性质	(162)
----------------------	-------

第二节 二重积分的计算	(164)
-------------------	-------

第三节 二重积分的应用	(169)
-------------------	-------

习题九 部分习题参考答案	(173)
--------------------	-------

第十章 无穷级数

第一节 常数项级数	(175)
-----------------	-------

第二节 幂级数	(182)
---------------	-------

习题十 部分习题参考答案	(190)
第十一章 概率论基础	
第一节 随机事件及其概率	(193)
第二节 事件间的关系	(196)
第三节 概率计算的基本公式	(198)
第四节 随机变量及其分布	(204)
第五节 随机变量的数字特征	(213)
第六节 大数定理和中心极限定理	(218)
习题十一 部分习题参考答案	(221)
第十二章 统计学初步	
第一节 数理统计的基本知识	(224)
第二节 参数估计	(228)
第三节 假设检验	(235)
第四节 单因素试验的方差分析	(240)
第五节 回归分析	(243)
习题十二 部分习题参考答案	(248)
第十三章 线性代数初步	
第一节 行列式	(252)
第二节 矩阵	(262)
第三节 逆矩阵	(267)
第四节 向量的线性相关和矩阵的秩	(271)
第五节 矩阵的初等变换及应用	(274)
第六节 矩阵的特征值与特征向量	(281)
第七节 线性代数初步在生物医药卫生中的应用	(284)
习题十三 部分习题参考答案	(289)
主要参考书	(295)
附录一 希腊字母表	(296)
附录二 简明不定积分表	(296)
附录三 正态分位数表	(302)
附录四 正态分布的双侧分位数(U_α)表	(303)

(300) 附录五 t 分布的双侧分位数表 (304)

附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(301) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(302) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(303) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(304) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(305) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(306) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(307) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(308) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(309) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(310) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(311) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(312) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(313) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(314) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(315) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(316) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(317) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(318) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(319) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(320) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(321) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(322) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(323) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(324) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(325) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(326) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(327) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

(328) 附录六 F 检验的临界值(F_{α})表 (305)

第一章 函数 极限 连续

初等数学研究的对象是不变的量,而高等数学是以变量为研究对象的一门科学,所谓函数就是变量之间的对应关系.极限是研究变量的一种基本方法,连续是函数的一个重要性态,本章将介绍函数、极限和连续的基本知识,为以后的学习奠定必要的基础.

第一节 函 数

一、函数的概念

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集合, x 和 y 是两个变量,若对于每个 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域. x 称为自变量, y 叫因变量, f 称为对应规律.

对自变量 x 某一个确定的值 x_0 , 与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数在 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$, 当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值的全体组成数集

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

从函数的定义我们看到,函数的定义域和对应规律是决定函数的主要因素,当它们确定以后,函数的值域也就相应的确定了.

对应规律的记号也可以采用其他字母,如“ F ”、“ G ”等等,这时函数就记为 $y = F(x)$, $y = G(x)$ 等等.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地用算式表达函数,这时我们约定函数的定义域就是使函数有意义的自变量所能取的一切实数值.

例 1 确定函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$ 的定义域.

解 显然,其定义域为满足不等式 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的 x 值的集合,解此不等式得定义域为

$$x > 3 \text{ 或 } x < -1, \text{ 即 } (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

用集合表示为:

$$D = \{x | x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)\}.$$

在实际问题中,函数的定义域是根据实际意义确定的.

例 2 在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t ,下落的路程为 h ,自由落体的运动规律为 $S = \frac{1}{2}gt^2$,其中 g 为重力加速度,求函数 S 的定义域.

解 从抽象的算式看, t 可以取一切实数值, 但是这是一个实际问题, 由题意 $t \geq 0, 0 \leq S \leq h$, 当 $S = h$ 时, 时刻 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, 故定义域为

$$0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ 或 } [0, \sqrt{\frac{2h}{g}}] \text{ 或 } D = \{t | t \in [0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]\}.$$

二、函数的表示法

函数 $f(x)$ 的具体表示方法是不尽相同的, 通常有三种:

(1) 用数学式子表示函数的方法叫做函数的公式表示法, 如例 1. 优点是便于理论上的推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格表示法, 如三角函数表和对数表等, 其优点是所求函数值易于查得.

(3) 用图形表示函数的方法叫做函数的图示法, 这种方法在生物、医学和工程技术上应用较普遍, 其优点是形象直观.

三、分段函数

在生物、医学和工程技术上经常碰到一类函数, 当自变量在不同范围的取值时, 具有不同的表达式, 这样的函数称为分段函数. 例如, 在生理学研究得血液中胰岛素浓度 $c(t)$ (单位/毫升) 随时间 t (分钟) 变化的经验公式

$$C(t) = \begin{cases} t(10 - t), & 0 \leq t \leq 5, \\ 25e^{-k(t-5)}, & 5 < t. \end{cases}$$

其中 k 为常数, 这就是一个分段函数.

四、反函数

设 $y = f(x)$ 为定义在 D 上的函数, 其值域为 W , 若对集 W 中每个数值 y , 数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $f(x) = y$, 这就是说变量 x 是变量 y 的函数, 这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$, 其定义域为 W , 值域为 D , 原来的函数 $y = f(x)$ 相应的称为直接函数.

注: 函数 $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是相同.

由于人们习惯于用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 因此将函数 $y = f(x)$ 的反函数用 $y = f^{-1}(x)$ 表示, 这时, 函数 $y = f(x)$ 和其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 二者的图形关于直线 $y = x$ 对称.

例 3 求函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数.

解 由 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 可解得 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 交换 x, y 的位置即得反函数 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$, 其定义域为 $(0, 1)$.

五、函数的基本性态

函数基本性态, 六

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称, 若对定义域中的任何 x 都有 $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$), 则称 $f(x)$ 为偶(奇)函数, 注意, 偶函数的图形关于 y 轴对称; 而奇函数的图形关于坐标原点对称, 不是偶函数也不是奇函数的函数称为非奇非偶函数.

例4 证明 $f(x)=x^3\sin x^5$ 为偶函数.

证 显然 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 是对称的区间, 且有

$$f(-x)=(-x)^3\sin(-x)^5=-x^3(-\sin x^5)=x^3\sin x^5=f(x).$$

所以该函数为偶函数.

例5 证明 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

证 该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 是对称区间, 且有

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

2. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X\subset D$, 若存在正数 M , 对任意 $x\in X$, 总有 $|f(x)|\leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 内为有界函数; 若这样的 M 不存在, 就称 $f(x)$ 为 X 内的无界函数.

例如, $f(x)=\arctg x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 总有 $|\arctg x|\leq \frac{\pi}{2}$, 故 $f(x)=\arctg x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为有界函数. 而函数 $g(x)=\lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是无界函数, 可是 $g(x)$ 在 $[a, b]$ (其中 a, b 为常数且 $0<a<b<+\infty$) 内却是有界函数, 这说明函数的有界性与自变量 x 的取值范围有关.

3. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I\subset D$, 对于任意的 $x_1, x_2\in I$, 若有 $x_1<x_2$, 则必有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$), 我们称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加(减少)的, 注意, 函数在局部区间 I 内单调, 但在整个区间 D 内不一定单调, 若函数在整个区间 D 内单调, 则在局部区间 I 内一定单调.

今后我们将用微分的方法来研究函数的单调性.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 若存在一个数 $T\neq 0$, 使得对于一切实数 x , 都有 $f(x+T)=f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, 其中 T 称为函数的周期.

注意: 若函数 $f(x)$ 一旦有周期就会有无穷多个周期. 若有一个最小的正数 T_0 使 $f(x+T_0)=f(x)$, 则称 T_0 为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称为周期. 但是周期函数不一定都具有最小正周期.

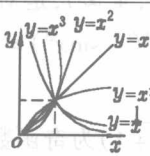
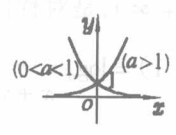
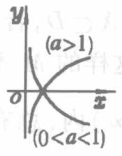
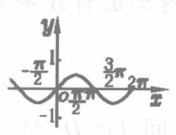
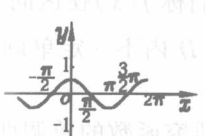
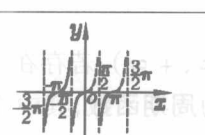
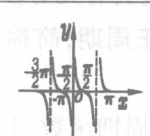
三角函数 $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ 等都是周期函数, 其中 $\sin x, \cos x$ 的周期为 2π , $\operatorname{tg} x$ 的周期为 π .

在自然界, 在生物、医学科学中, 周期概念是十分重要的.

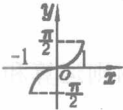
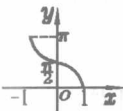
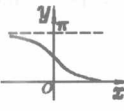
六、基本初等函数

人们通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数，常数作为函数的特例也属于基本初等函数，现将基本初等函数列表如下：

表 1.1

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
幂函数	$y = x^a$ ($a \neq 0$)	随 a 而不同, 但在 $(0, +\infty)$ 内都有定义		经过点 $(1, 1)$, 在第一象限内当 $a > 0$ 时, x^a 为增函数; 当 $a < 0$ 时, a^a 为减函数
指数函数	$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$		图象在 x 轴上方 (因 $a^x > 0$), 且都通过点 $(0, 1)$. 当 $0 < a < 1$ 时, a^x 是减函数; 当 $a > 1$ 时, a^x 是增函数.
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(0, +\infty)$		图象在 y 轴右侧 (因 0 与负数都没有对数), 都通过点 $(1, 0)$. 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是减函数; 当 $a > 1$ 时 $\log_a x$ 是增函数.
三角函数	正弦函数 $y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数 (图形关于原点对称), 图形在两直线 $y = 1$ 与 $y = -1$ 之间, 即 $ \sin x \leq 1$.
	余弦函数 $y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$		是以 2π 为周期的偶函数 (图形关于 y 轴对称), 图形在两直线 $y = 1$ 与 $y = -1$ 之间, 即 $ \cos x \leq 1$.
	正切函数 $y = \tan x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)		是以 π 为周期为奇函数, 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是增函数
	余切函数 $y = \cot x$	$x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)		是以 π 为周期的奇函数, 在 $(0, \pi)$ 内是减函数.

续表 1.1

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
反 正 弦 函 数	反正弦函数 $y = \arcsin x$	$[-1, 1]$		单调增加的奇函数, 值域: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
	反余弦函数 $y = \arccos x$	$[-1, 1]$		单调减少, 值域: $0 \leq y \leq \pi$
	反正切函数 $y = \arctg x$	$(-\infty, +\infty)$		单调增加的奇函数, 值域: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
	反余切函数 $y = \operatorname{arccotg} x$	$(-\infty, +\infty)$		单调减少, 值域: $0 < y < \pi$

从表 1.1 中, 我们清楚的看到基本初等函数的定义域、值域、有界性、奇偶性、单调性、周期性和图形。

七、复合函数

若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 u_1 , 函数 $\varphi(x)$ 的值域为 u_2 , 且 $u_2 \subset u_1$, 则 y 通过变量 u 成为 x 的函数, 这个函数称为由函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = \varphi(x)$ 构成的复合函数, 记成

$$y = f[\varphi(x)]$$

其中变量 u 称为中间变量。

例 6 将函数 $y = u^2$ 和 $u = \sin x$ 构成复合函数。

解 将 $u = \sin x$ 代入 $y = u^2$ 中就构成复合函数 $y = \sin^2 x$ 。

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

有时一个复合函数可以由几个基本初等函数复合而成, 例如 $y = \ln u$, $u = \sin v$ 和 $v = x^2 + 1$ 可以构成复合函数 $y = \ln \sin(x^2 + 1)$ 。此时 u, v 都称为中间变量。

注意, 不是任何两个函数都能构成复合函数的, 例如 $y = \arcsin u$ 和 $u = e^x + 1$, 由于 $e^x + 1 > 1$, 故不能构成复合函数。

除了掌握了函数的复合方法, 还需掌握把一个复合函数分解成几个基本初等函数或简

单函数.

例7 指出复合函数 $y = e^{\sin^3(x^2+1)}$ 是由哪些函数复合而成的.

解 令 $y = e^u$, $u = v^3$, $v = \sin t$ 和 $t = x^2 + 1$, 则函数 y, u, v 和 t 复合成 $y = e^{\sin^3(x^2+1)}$.

八、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而成, 且用一个数学式子表示的函数叫做初等函数, 例如

$$y = \sqrt{\ln 5x - 3^x} + e^{2x-1}, y = \frac{\sqrt[3]{x-1} + \operatorname{tg} x}{x^2 \sin x - 1}.$$

都是初等函数. 而函数

$$y = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0, \\ x^2 + 1, & x < 0. \end{cases}$$

是用两个数学式表示的. 函数

$$y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

是用无限形式表示的, 故它们都是非初等函数.

第二节 极 限

一、数列的极限

定义 1.2 设函数 $x_n = f(n)$, 其中自变量 n 为正整数, 按 n 增大的顺序排列的一串数 $f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$ 称为数列, 记为 $\{f(n)\}$ 或 $\{x_n\}$, 数 $f(n)$ 或 x_n 称为数列的一般项.

数列的有界性和单调性的定义与函数的有界性和单调性的定义基本一致.

若存在一个常数 $M > 0$, 使得 $|x_n| \leq M$ ($n = 1, 2, \cdots$) 恒成立, 则称数列 $\{x_n\}$ 有界.

若数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_n \leq x_{n+1}$ (或 $x_n \geq x_{n+1}$) ($n = 1, 2, \cdots$) 则称数列单调增加 (或减少), 单调增加或减少的数列统称为单调数列. 例如:

$$\{x_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 为单调增加有界数列;}$$

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 为单调减少有界数列;}$$

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 为有界数列;}$$

$$\{x_n\} = \{n^2\} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 为单调增加无界数列;}$$

$$\{x_n\} = \{-n\} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 为单调减少无界数列;}$$

$$\{x_n\} = \{(-1)^n n\} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 不是单调数列, 是无界数列.}$$

在上述六例中, 当 n 无限增大时, 数列 $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ 和 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ 的一般项无限地接近于 1; 数列 $\{(-1)^n\}$ 的项始终在 -1 和 1 之间来回跳动; 数列 $\{n^2\}$ 的一般项越来越大; 数列 $\{-n\}$ 的

一般项越来越小;而数列 $\{(-1)^n n\}$ 的一般项的绝对值越来越大,等等,现在的问题是给定一个数列 $\{x_n\}$,当 n 无限增大时,一般项 x_n 变化的趋势怎样?为了更好地回答此问题,我们给出数列极限的定义.

定义 1.3 设有数列 x_n 和常数 A ,若对任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在一个自然数 N ,使得当 $n > N$ 时,恒有

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 有极限 A ;或称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限;或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ,记为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow +\infty).$$

上述定义通常称为极限的“ $\varepsilon-N$ ”方法.

有极限的数列称为收敛数列,极限不存在的数列称为发散数列.

若将数列 $\{x_n\}$ 中的每一项都以数轴上的点表示,则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$ 的几何解释为:对于任意给定的正数 ε ,总存在一个正整数 N ,使得从第 $N+1$ 起所有项的对应点都落在区间 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 内,即在区间 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 外至多只有有限个点 $x_1, x_2, \dots, x_N$,如图 1-1 所示.

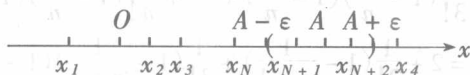


图 1-1

根据数列极限的定义,一个数列的极限是否为 A ,取决于对于任意给定的正数 ε 是否能找到相应的自然数 N .

例 1 根据极限定义,证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

分析 任给 $\varepsilon > 0$,要使 $|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| = |\frac{1}{\sqrt{n}}| < \varepsilon$,只需取 $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$,由于定义中的 N 是自然数,故可取 $n = [\frac{1}{\varepsilon^2}]$,这里 $[\frac{1}{\varepsilon^2}]$ 表示不超过 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 的最大整数.

证 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,取 $N = [\frac{1}{\varepsilon^2}]$,当 $n > N$ 时, $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$,于是恒有 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$,

此即 $|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \varepsilon$,即表示 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

例 2 证明:当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

分析 对任意 $\varepsilon > 0$,要使 $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$,即 $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$,故可取 $N = [\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}]$.
证明过程读者可仿例 1 写出.

例 3 指出数列 $\{\cos \frac{n\pi}{2}\}$ 是发散的.

解 因为数列 $\{\cos \frac{n\pi}{2}\}$ 的各项依次为

$$0, -1, 0, 1, \dots,$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时,它不趋于一个确定的常数,故发散.

下面我们不加证明地指出有关数列极限的一些重要性质.

性质 1 若一个数列有极限,则此极限是唯一的.

性质 2 数列是否有极限,极限是何值,与数列的任意有限项无关,因此增删一个数列的有限项不影响数列的极限存在与否.

性质 3 数列有极限,则数列一定有界.反之数列有界却不一定有极限.如例 3 中数列是有界的,但无极限.

性质 4 单调有界数列必有极限.

根据性质 4 我们可以证明重要极限:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (1-1)$$

证 取数列 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\} = \{u_n\}$, 由于

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \\ &\quad \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

把 u_n 和 u_{n+1} 进行比较,我们看出, u_{n+1} 的前 n 项不小于 u_n 的相应项,而 u_{n+1} 比 u_n 多一个正项

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right),$$

所以 $u_n < u_{n+1}$, 这说明数列 $\{u_n\}$ 是单调增加的.

$$\text{又因 } u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

故 $\{u_n\}$ 又是有限的.

综上所述,单调有界数列 u_n 有极限存在,我们把此极限用 e 表示,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

数 e 是一个无理数, $e = 2.7182818 \cdots$. 以 e 为底的对数函数 $\log_e x$ 简记为 $\ln x$, 称为自然对数,在工程技术中应用广泛.

可以证明当 $n \rightarrow -\infty$ 时,上述结论也正确,即

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

类似地有 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

二、函数的极限

1. $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

我们先看一个例子:当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的值无限接近于 0,一般地,当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限可以精确地描述如下:

定义 1.4 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在一个正数 M ,当 $|x| > M$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$,当 x 趋于无穷时的极限,记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow \infty \text{ 时)}.$$

它的几何意义是不论直线 $y = A - \varepsilon$ 和 $y = A + \varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄,只要 x 离原点充分远(即 $|x| > M$),函数 $f(x)$ 的图形都在该条形区域内,参阅图 1-2.

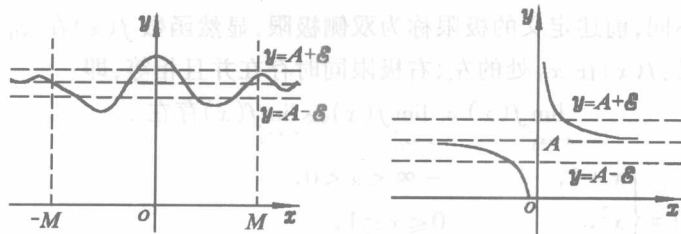


图 1-2

2. $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

给定函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$,当 x 无限地接近于 -1 时,函数 $f(x)$ 无限地接近于 -4 ,显然 $f(x)$ 接近 -4 的程度是依赖于 x 接近 -1 的程度,一般地说当 x 无限地接近 x_0 时,若函数 $f(x)$ 无限地接近常数 A ,对这种现象我们可以精确地描述如下:

定义 1.5 若对任意给定 $\varepsilon > 0$,总存在一个 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向 x_0 时的极限,记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时)}.$$

我们指出,定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$,也就是说 x 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 是否有极限与 $f(x)$ 在 x_0 处有没有定义并无关系,从几何图形上看,作平行于 x 轴的两条平行线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$ (其中 A 为函数的极限, ε 为任意正数),介于这两条直线间是一横条区域,对于任意的 $\varepsilon > 0$,总能找到 x 的一个区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,这区间称为 x_0 的 δ 邻域,当函数 $y = f(x)$ 图形上的点的横坐标 x 在邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内(但 $x \neq x_0$)时,这点的纵坐标 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ 或 } A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

即是这些点全部落在上面所作横条形区域内(图 1-3).