

运筹学讲义

(三年級用)

华中师范学院数学系編

520.2
4452

中 文 系 快 班 語 法

編 著：華 中 師 范 學 院
公 共 俄 語 教 研 組
出 版：華 中 師 范 學 院
印 刷：華 中 師 范 學 院 印 刷 廠

1959年9月出版
印数: 600份 开别: 16开
字数: 51,000字

運籌學講義

緒 論

運籌學是一門簇新的科學，它所包含的內容很豐富，分支很多，應用的面很廣，却也非常專。正在生氣蓬勃的成長壯大之中。運籌學的發生根戶開始於本世紀30—40年代，因為工業的規模日益擴大，交通運輸日益繁忙，國民經濟的各方面也日趨繁榮，過去從形和救這個側面，研究這些問題，解決這些問題的救學方法已不能滿足需要。譬如，在運籌學里經常遇到求极大板小的問題，在救學里本來有一個分支叫变分學可以求极大值板小值的問題，但在新的條件下，這種經典的分析方法，已經不能解決問題，因此為了適應新的形勢，解決新的問題，救學工作者就不得不創造出新的救學方法來，運籌學就是在這樣的形勢下發生根戶起來的。

運籌學所包含的各分支的發根速度和迟早是不一致的，綫性規劃、博奕論、排隊論是運籌學中發根比較早的分支，前兩個分支有比較成熟的解決方法。追溯博奕論的歷史，應該從1912年策墨治(E. Eermelo)的著作“關於集合論在象棋博奕論中的應用”開始，而後在1921年波爾(Borel)討論了博奕論某些個別情況，並且表示了一些結果，又於1927年對所謂基本定理進行推測。1928年匈牙利救學家馮·諾伊曼(Renn. Neumann)給出基本定理以證明。到1944年馮·諾伊曼和莫爾根思透恩(Morgestern)合著的“博奕論和經濟特征”一書出版之後，博奕論才為很多人所注意。而綫性規劃的歷史應從蘇聯卓越救學家康托洛維奇(Л. В. Канторович)的工作開始，康托洛維奇於1939年在他的“生產組織與計劃里的救學方法”一書中闡明了這門科學的基本理論，並提出了解決這種理論的獨特方法(解乘救法)解決了工業生產中的大畧問

題，次后約兩年的時間，英國學者希奇柯克（Htonkook）才提示了類似的問題，並應用了不同的辦法。排队論是1908年瑞典（A·K·Erlang）的論文“等候理論在丹麥電話系統的应用”按表而開始的，次后在1927年莫勒（Molina）發表了“在電話中繼綫問題中概率論的应用”1928年費勒（Fay）發表了“概率論反其在工程应用”，苏联學者A·4·辛欽从1932年開始這方面的研究，到1959年他發表了“公用事業中的数学問題”一文，在排队論方面獲得了巨大成績，過去由于生產水平的限制排队論發展還不很快，由于十多年來生產水平的飛躍發展，又了生產中矛盾的刺激，排队論也就獲得了迅速的發展。运筹學其他分支大都只有十多年的歷史，如信息論是在1948年由申農（C·E·Shannon）的論文誕生的。

运筹學运用非常广泛，分支很多，各分支之間又存在着密切联系。如綫性规划与网络理論的极小截割定理的联系，博奕論里的二人零和博奕与可行对偶规划的等价等。运筹學的各分支与其他学科有密切的联系，如与概率論、数理统计、拓扑学、程序设计、泛函分析、微分方程等。运筹學是一种新兴的应用数学，它虽然联系到各种各样不同的对象，用到了数学以外的工具，然而这正是应用数学的特長。归根到底也是进行各种事物之間数量規律的研究，作为一门科学的理論，它沒超过数学的範圍，但由于运筹學在其处理問題时有其独特的观点，比如总体最优化等。而正如其他物理、化学或技术科学一样，运筹學也正在發展其实质技术——模拟实验，这样运筹學就有可能發展成一门独立的学科。

运筹學在工业、农业、交通运输、公用事業、軍事、医学等各方面都有大另的应用，目前建設人民公社居民点、工厂、农場的布局問題要用到綫性规划，由于博奕論是研究斗争現象，因此在各种斗争現象中都得到广泛的应用，特別在我国，将广泛的应用。

用于战胜大自然的斗争中，运筹学对我国国民经济的影响巨大。它的广泛应用将促进我国国民经济有计划的、按比例的高速的发展，运筹学的广泛应用可以为国家创造和节约巨大物资财富。如数学研究所的同志们在党委的正确领导下，曾经突击完成了1958年第四季度全国粮食调运方案，这个方案与原方案相比较可以为国家节约150多万吨。他们在完成了这一工作之后，又相继制订了其他一些物资调运方案，这些方案与原方案比较，共可为国家节约运费达6000万元，最近运筹学在山东省全面开花，把线性规划用到全省的交通运输事业上，已取得巨大成就，如山东大学线性规划小组使用各种这种类型的装卸工人调度表，现经初步试用，可节省劳力30%，同时减少了汽车的待装待卸装卸工人窝工等不合理现象。

为了更清楚的了解运筹学的作用和意义，我们列举两个例子来说明。我们经常看到在星期六与星期天，在公共汽车站和电影售票处排着很长的队，电影院也挤得满满的，很多人常为排长队或买不到票而苦恼，就一般人的想法，往往都希望等候的时间越少越好，排队的长度愈短愈好。然而，这种想法往往是不现实的。多办些电影院、多开些汽车、多装些电话交换设备，这不仅会增加国家的投资，而且从服务部门的观点来看也不经济。因为这样一来，在很多时候在公共汽车的乘客寥晨星，电话线路寂然无声。所以从服务部门来看，他们希望公共汽车总是满些，电话线路经常不空。因此在顾客的方便和服务部门的经济观点之间便存在着矛盾，在这两矛盾应该如何求得一个最合理的折衷办法呢？例如在一条线路究竟应该配备多少辆汽车最合理，就需要用排队论去加以研究。再如有20人，操纵20个机口，每一个人操纵一个机口的效果偶然是已知的，那么安排那一个操纵那一口机口，才较佳的效果最优，这个问题看起来似乎很简单，实际上很复杂，这是运筹学里有名的安排问题。20人当然只有20!个不同排列，把每个不同的排列作为一种安排，把所产生的效果计算出来，

最后总可以找出一种安排，总效果最优，可是要做201次计算。有人估计就是用最快速的电子计算机每天工作8小时，每年365天，也须十万年才能计算出结果！从这个例子，也就可以想像得到运筹学作用巨大。

运筹学在不同的社会制度下有着显然不同的应用。在资本主义社会里，运筹学用于满足资本主义最大利润以及资本家之间的竞争和互相吞併的你死我活的斗争中，而战争狂人却利用运筹学来进行战争。在社会主义社会里，运筹学用来最大限度的满足生产建设的需要，以满足全体人民日益提高的物质和文化生活的需要。用于与大自然作斗争和取得丰富而廉价的天然财富，为社会主义建设服务。运筹学只有在社会主义国家才能真正发挥它的威力，比如线性规划虽然应用很广，但是在资本主义社会里由于生产的无政府状态与生产资料的私人占有制，即使是政府机关，也不可能把线性规划用到调配调运物资、交通运轨等方面去。

运筹学的产生过程，同其他科学一样充满着唯心与唯物观点的斗争。比如资产阶级学者，把博弈论作为是了解社会生活的钥匙，说什么“生活就是博弈”，穷与富就是博弈的结果，企图掩盖社会^{经济}生活中的阶级本质，欺骗劳动人民，混淆视听，抹煞阶级斗争。这却是资产阶级的护士们历来所惯用的伎俩。我们必须与这种观点作斗争，以正确的马列主义观点来看待博弈论。

运筹学在我国的发展更为年青，可以说仅是在解放后十年才建立及发展起来的一门教学分支，解放前根本没有什么研究，极个别的教学工作者只作了一些皮毛的探讨而已，由于那时在三大敌人反动黑暗的统治下，经济极端落后，民不聊生，科学也是极端落后，根本就没人去考虑数学与经济部门的联系，谈不上合理调配与安排，寻找最优方案等。解放后，社会主义制度的优越性保证了工农业生产一日千里的飞跃发展，全国六亿五千万人民正用辛勤的双手迅速地改变我国一穷二白的面貌，经济部门

按比例有计划的发展向我国数学工作者提出了很多的问题，就是以最有效最符合社会主义经济原则的方法来促进发展各部门的生产，如物资的调配，水库系统的利用，动力系统的联系，厂矿的布置，农作物的分布等……，如何找出管理的方案，必须从全面观点来考虑，寻找问题的多快好省的数学方法，所以社会主义经济的发展为运筹学这门新兴的科学开辟了无限广阔的广阔道路。

运筹学在我国发展大致分为两个阶段，以大跃进的1958年为分界线：解放初，在我国工业基地——东北，由于铁路运输相当繁重，加上1950年全国人民开展了轰轰烈烈的抗美援朝运动，物资调运更为繁重，铁路运输与线路限制，适应不上，当时在东北计委领导下成立了一个专事调运工作小组，在丰富实际经验基础上，经过深刻的钻研，寻找管理的运轨方案，终于在实际工作中反复试验发现了一个规律，如果线路上只有一个圈，圈上只有两个分界点，沿着环状路线顺时针方向前进到达分界线的两段距离之和一定等于从这两个分界点出发逆时针方向前进到达分界线的两段距离之和，这一重大发现就为我国独创的图上作业法奠定了坚实的基础，再把这方法运用到实际工作中，证明方法切实可行，并且简单准确。后又经过进一步研究，将圈上只有两个分界线的特形推广到有任意个分界线的特形，完成了一个圈的图上作业法的创造。在此基础上，又获得了完全的多圈的物资合理调运的方法，创造性地把一个圈的方法推广到多圈的特形。当时这方法已运用到实际中去，但还没得到严格的数学证明。总的来说，图上作业是我国劳动人民智慧的结晶，是我国社会主义经济发展的产物，易为群众所掌握，特别在1958年这方法经过了严格的数学论证后，在全国各地已大力推广，并获得普遍的功效。

在1958年大跃进前，全国从事运筹学工作的人极少，在56年以前，仅有少数工厂如上海国营第二纺织机械厂，长春汽

車厂，北京一棉厂、天津大学及科学院进行了一些质量控制的工作。56年中国科学院力学研究所建立了运筹学教研组，是我国正式建立运筹学研究机构之始。在56年底和57年初，先后组织了线性规划、博弈论与质量控制的讨论班，吸收了少数高等学校、产业部门的工作人员参加讨论后又陸續举行了线性规划的讲习班。57年2、3月间力学所运筹室与纺织工业部门机械局到上海调查质量控制工作。同年11、12月间又在上海、天津、济南和青岛施行了质量控制的现场实习，受到各地产业部门的高度重视。此外还编写线性规划与质量控制讲义。

思想战线上

57年全国开展了整风反右运动，使在政治战线上社会主义阵营取得了根本的胜利，人民思想觉悟大大提高了一步，出现了1958年全面大跃进的局面。不仅在工农业生产上在文化科学方面也彻底扭转过去少数人搞、脱离群众、脱离生产实际的冷冷清清的局面。开展了对资产阶级学术思想的批判，破除迷信，解放思想，深入生产实际，大搞群众运动，使科学理论为生产服务。工农业生产的大跃进也促进了科学研究的跃进，很多高等学校教学力学系组织大批师生下厂下乡，这和公司以及其他经济部门也边学习边研究，运用运筹学解决实际问题，取得了很大成绩。这时中国科学院力学研究所也成立了运筹学研究室，深入实际，大搞运筹学研究，在全国各地开花结果，蔚为壮观。如研究面运输问题的一般解法，运用线性规划来组织巡回运输调度方法更合理，大大提高汽车利用率等……

目前我国在这一筹学各分支如规划论、排队论、博弈论、质量控制等获得初步的普及，特别线性规划普及很快逐渐已为全国工农群众所掌握的数学工具了。各地高等院校教学系也已普遍开设了运筹学学科，对某些分支还成立研究班，或运筹学研究室。国家经济委员会及各经济部门都很重视，大力培养干部，大力推行运筹学所提供的科学方法，至此运筹学的研究与普及仅又是

个开始，我们坚信在党的英明领导下，继续大搞群众运动，更加深入工厂、人民公社各户家中去，运筹学将在社会主义以及共产主义建设中发挥更大的作用，运筹学这一学科也将得到更大的发展。

运筹学所包含的分支很多，主要有：规划论、博弈论、排队论、存储论、控制论与信息论、质量控制等，除这些内容外，在工业生产、农业生产、交通运输等方面，从另的侧面作综合性研究，以期增加生产、提高质量。这一切都是运筹学研究的对象。这里对几个主要分支简单介绍如下：

1. 规划论 在实际中，制订一个经济计划，安排一个生产过程，在一切条件都固定的情况下，如何根据另与另之间内在联系，做出一个恰当的安排，使产生的效果最优（定另的）这便是规划论所研究的问题。

用数学的语言来说，就是根据对问题的分析列出一个要使某值达到极大或极小的函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ （目标函数）变另（可能是随机的） $x_1, \dots, x_n$ 等（通常看作 n 维空间的另的坐标）并满足约束条件 $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ （或 ≤ 0 ），问题就是求一组 $x_1, \dots, x_n$ 的值满足约束条件，而使目标函数 f 达到极大或极小。

若约束条件与目标函数都是线性的，这便是通常说的线性规划。

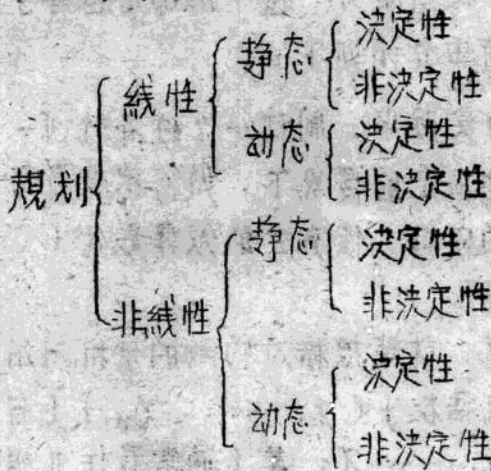
若目标函数是非线性的，甚至约束条件也是非线性的，这样的规划，就是非线性规划。

通常提到线性规划，总是指线性静态规划方面说的。所谓静态规划是指一个单位时期的规划，并且在规划中的目标函数及任何一个约束条件都只出现着在此时间中各个变另，但动态规划则是指相連几个单位时间的规划，并且在规划的目的函数及约束条件中，至少有一个出现着属于不同单位时期的变另，例如，制订五年计划时，其中任何一个年度的各项约束条件中，显然有其前

一年或前二年各种货物的生产等这个度数在内。

在静态、动态规划的问题中，如果任务已经给定而进行规划的问题，就是决定性的规划问题；相反的，如果任务没有给定，仅给了任务的概率分布函数，那么这种规划就是非决定性的，非决定性的规划必须涉及到概率论及数理统计，特别是随机过程理论。

现在可以把各种规划分类如下：



在这本讲义，我们只介绍线性规划、非线性规划及动态规划

2. 博弈论

博弈论是研究竞争性的活动，这类活动参加者的任何一方都只能部分地影响它的结局，每个方面都希望获胜，但每个方面的获胜不但与自己策略有关和对方所采用的策略也息息相关，因此，问题是参加者的任何一方如何选择策略使得对方采取何种策略，其结局所得不致少于某一数值。

博弈的简化是由于策略概念的引进，一个策略是指参与者在一开始就通盘考虑可能遇到的种种情况，并且作出相应的决定，所以策略一经决定，博弈进行时，只要按策略行事，结局已定。

博弈论就参加竞赛的是二人、三人或者多人，而分二人、三人或多人博弈又就依结局所得与所失的情况分为零和博弈与非零和博弈，依策略数目分为有限博弈和无限博弈。

3. 排队论

运筹学的这个分支是用概率论的观点和方法来研究拥挤现象的如生产过程中及公用事业及生活过程中的拥挤现象。

在日常生活中（或生产中）设有若干个服务台，很多顾客在服务台前排队要求服务，服务台太少，排队太长，等候时间太久，浪费很大，服务台过多，顾客等候的时间虽少，但造成浪费，很明显，这是不符合总路线精神要求的，所以问题是事先给这种服务以一定的规格，恰当地设置服务台，使总的消耗最少，同时又使服务的工作达到事先给定的规格，拿生产实际问题来说就是对生产中出现拥挤现象，用排队论的方法确定一个具体最优方案。

因此，在排队论中所考虑的因素有：

(1)、等候、排队的时间；

(2)、排队的长度；

(3)、等待的时间与被接待时间的比例。

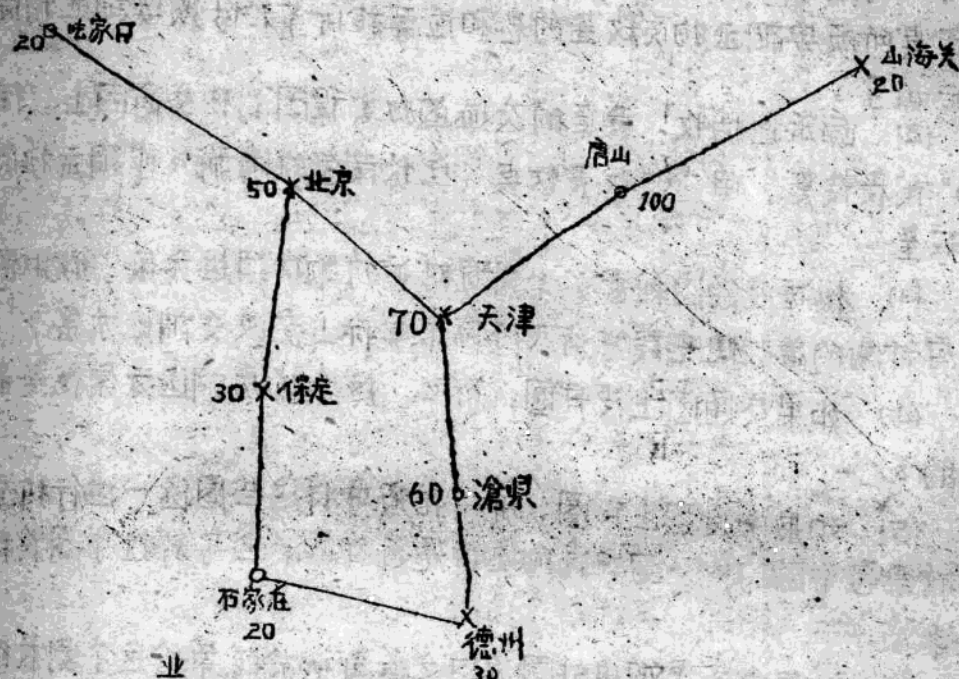
在本讲义中，按教学目的要求，只介绍上述三个重要分支，对其他分支读者感兴趣及时间可能可自行查阅有关资料书籍介绍。

第一章 图上作业法

随着我国社会主义建设的飞跃发展，物资供应频繁，运输能力供不应求，面对这种情况，给运输工作者提出的任务是：一方面要充分保证物资供应对运输的需要，另一方面要达到运输上最经济的开支和最经济的时期，以便既能满足广大人民对物资的需要，又能为国家积累资金，在这新形势下，我国从事物资调运工作的广大同志，发挥了集体的智慧和力量，创造了一种先进的物资调运方法，他们把它称之为图上作业法，这种方法的好处是：简单易学，计算迅速，同时采用这种方法进行调运工作，可以使物资运行的吨公里数达到最小值，这种方法与我们熟知的“陈鹤海扭奇问题的迭代法”相比要优越得多，不但容易掌握，而且计算起来要快得多，这件事实，一方面雄辩地说明了群众的智慧是无穷的教学中同样也可以产生李始美，只不过这个李始美不是一个人，而是群众，群众也可以创造教学，教学并不是资产阶级专家私有物。另一方面也说明了那种认为“中国人不如外国人”的时代已经一去不复返了，别人能做的事，我国人民能做，而别人没有做过的事我国人民也能做，不久的将来，我国的科学技术也将居于世界的前列，为人类的幸福作出我们的贡献，下面我们就来介绍这种方法

假定我们现在需要制定某种粮食的调运方案，有一些粮食的产点（即需要调出粮食的地点）和收点（即需要调入粮食的地点），产点须要调出的粮食吨数以及收点须要调入粮食的吨数都是知道的，并且假定收发总量相等（这就是所谓平衡条件）在制定调运方案以前，我们先绘出交通图来，即是绘出一幅标有这些收发点以及联络这些收发点之间的交通线（如铁路、公路、海河航线等）的地图来，在交通图上，产点用“O”来表示，收点用“×”来表示，而在收发点的旁边，註上它须要调出或调入的粮食的吨

救和各臭之间的距离，下西就是一个交通图的例子：



所謂图上作法，就是在交通图上进行調运方案的編造工作，从使該物块运行的吨公里数为最小，由於收發臭的位置关系，交通图有不形成圈。形成一个圈和形成多个圈的三种情形。

在另一种情形，編制調运方案比较简单，只要做到没有对流調运方案就一定要是最好的。

對於一个圈和多个圈的交通图它的流向图所确定的調运方案是否是对最好的呢？根据物质調运工作同志的经验，当且仅当这个調运方案的流向图上没有对流（即没有一段路綫上有两个不同方向的流向）而且對於图上每个圈来说，这个圈上的外圈的長（这个圈上在圈外的諸流向長）与内圈的長（这个圈上在圈内的諸流向長）都小於或等於該圈長的一半時，那么，这个流向图所确定的調运方案就是最好的。

采用图上的作业法編制物块調运方案時，可按下列步骤进行：

(1) 列示物块平衡表（就是在一个表上列示这些物块的發臭

(即需要调出物资的地桌)和收桌(即需要调入物资的地桌)以及各茂桌所需要调出的物资的数量和看收桌所要调入物资的数量,各茂桌所需要调出物资数量的总和应等於所等於付需要调入物资的总和]。

(2)、画示包括收、茂桌的交通图和里程图,在交通图上,用“O”代表茂桌,用“X”代表收桌,在收茂旁註明输入或调出物资的数量。

(3) 根据交通图繪示一个没有对流的物资调运方案,假如图上有对流的,便先設法消灭对流(实际上是改变调运方案)

(4) 如果交通图上没有圈,那么,这个物资调运方案就是最好的。

(5) 如果交通图上有圈,那么就須要将这些圈逐一进行检查,检查每个圈的内外圈的流向之长是否都小於或等於这个圈长的一半。

(6) 如果每个圈的内外圈流向之长都小於或等於这个圈长的一半,那么这个调运方案一定是最好的。

(7) 如果对于某几个圈,内圈或外圈流向之长大於它的圈长的一半,那么就須要选一个圈进行調查,如何調整呢?如果外流向长大於全圈长的一半,我们就縮短外流向长,如果内流向长大於全圈的一半,我们就縮短内流向,怎样縮短呢?比如我们要縮短外流向,就是将外流向中流量最小的一个取消。因而其他的流向要相应的变化。

(8) 再检查調整后的流向图,如果發現有一个圈的内圈或外圈流向之长大於这个圈长之半,那就还須要調查,如此继续下去一直到得到一个每个圈的内外圈流向之长都小於或等於整个圈长的一半的流向图为止。

(9) 根据最后的流向图,造示调运方案。

在前节我们对图上作业法的方法作了一般性的叙述,下节給示这个方法的理論証明,在繪示証明之前先作示下节的一些說明:

首先，不同的调运方案，可以有相同的流向图（两个流向图认为是相同的，如果它们上面的流向都相同，而且每段流向上流过的物质吨数也相同）例如下面这两个调运方案（表1、表2）

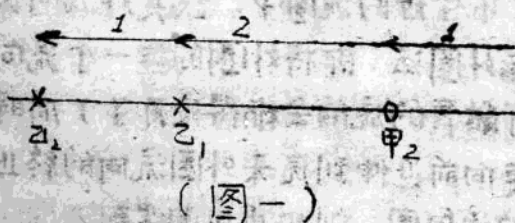
表1

发站 \ 收站	乙 ₁	乙 ₂
甲 ₁	1	0
甲 ₂	0	1

表2

发站 \ 收站	乙 ₁	乙 ₂
甲 ₁	0	1
甲 ₂	1	0

就有相同的流向图（图一）



但是有调运图的调运方案的吨公里数都是相等的，因此，只要不改变一个调运方案的流向图，而将这个调运方案改变时，它的吨公里数不变，但应该注意，流向图不同的调运方案的吨数一定不同。

其次，显而易见，流向图上有对流的调运方案，一是不是最好的，因此，在下面讨论中，我们不妨假设调运方案的流向图上没有对流。

第三，从交通图上一束分立的支线，在讨论中可以看作一点，确切地说，即可将这束支线上物资的收量或发量记在这个分叉点上，而将这束支线略去。因此，在今次的讨论中，不妨假设交通图上没有支线，而只就环状线路的交通图来证明定理。

定理：一个流向图是最好流向图的充要条件为这个流向图是合理流向图。

最后，为了方便起见，我们说一个流向图是最好的，如果它为流向图的调运方案是最好的，我们说一个流向图是合理的，如果对于它的每圈而言，内圈调运量都不大于外圈调运量的一半，它是合理的。

定理的证明分一个圈和多个圈两种情形：

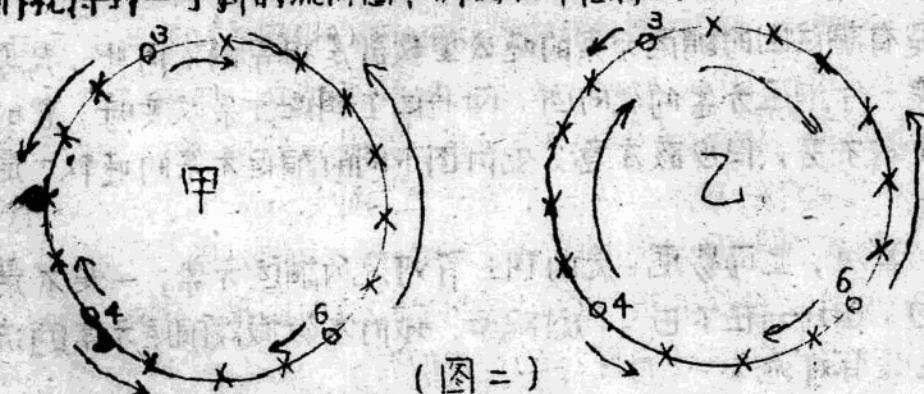
1. 一个圈的情形

证明：必要性：我们只要证明最好流向图、内、外流向长都不大于全圈长的一半就够了。

为了证明方便起见，我们假定每一个牧点只收一吨物质。实际上如果有一个牧点需要收 m 吨物质，那么我们可以想像在这个牧点的地方排上 m 个牧点来代替它，而这每个 m 个牧点中的每一个都只收一吨物质，同时这 m 个牧点两两之间的距离都等于零。

为了证明最好流向图一定是最合理的，只要证明不合理的流向图一定不是最好的就行了。

假如现在有一个不合理的流向图^甲，设其外流向长大于全圈长的一半。我们引进缩短外圈法，即将外圈的每一个流向都从终止点缩回一个牧点（当然可能有的流向会缩得没有了）同时将内圈的每一个流向都从终止点向前延伸到还未外圈流向的终止点去。这样，我们就得到一个新的流向图，例如由甲图得到乙：



我们来讨论两个流向图吨公里数的差别，经过上面的缩短外流向有些牧点在甲、乙中都由相同的牧点供给，这些牧点就是甲内圈诸流向上的牧点和甲外圈的诸流向上非终止点的那些牧点，因此，不论按甲或按乙调运粮食到这些牧点，所需的吨公里数都是相同的，所以这些牧点就不必考虑了。但是，甲的外圈诸流向终止点的那些牧点（亦即乙的内圈诸流向终止点的那些牧点），在甲、乙中都由不同的牧点供应物质，这些牧点是要考虑的，按甲供应这些牧点物质

所需的吨公里数等於甲的外圈之长，而按乙供应这些牧草物资所需的吨公里数等於乙的内圈之长。因此，想比较甲、乙吨公里数的差别，只要比较甲外圈长与乙外圈长的差别即可。如果把流向图上没有流向的部分称为空圈，於是就有下面的主要等式：

甲的内流向长 + 甲的空长 = 乙的内流向长 (1.)

但甲的外流向长 > 全圈长的一半。

所以甲的内流向长 < 甲的空长 < 全圈长的一半。

因此 乙的内流向长 < 全圈长的一半

於是 乙的内流向长 < 甲的外流向长

这就证明了乙的吨公里数较甲的吨公里数为小，因此，甲不是最好的。

如果，甲的内流向长大於整个圈长的一半，我们可以相应地引进縮内圈法，来证明甲不是最好的。

注意：在行使縮外圈法时，有时一条外（内）圈流向可以断成两条或两条以上，而两条或两条以上的内（外）圈流向也可以连成一条，但这对证明没有影响，公式（1）仍然成立。（参看图二）

充分性：为了证明合理流向图一定是最好的，我们将所有流向图排成一定的顺序，从一个全部流向都是外流向甲开始，行使一次縮外圈法，得到流向图甲₁，再行使一次縮外圈法，得到流向图甲₂，如此继续下去，最后得到全部流向图甲_n，例如，对于图二的流向图，经过我们这样的处理便有：