

虞明禮原編
榮方舟改編

復興高級中學
教科書
代數學

甲組用
下冊

商務印書館發行

代數學下冊

目 錄

第二十章 複素數一元二項方程式.....1

168. 複素數	1
169. 複素數之基本運算	1
170. 複素數爲零的定義	2
171. 前節的應用	3
172. 複素數之圖形表示	5
173. 複素數之極坐標式	7
174. 用極坐標式演複素數乘法	10
175. 用極坐標式演複數除法	12
176. 複素數之 n 次冪	14
177. 複素數之 n 次方根	15
178. 二項方程式	18

第二十一章 一元三次或四次方程式20

179. 引論	20
180. 一元三次方程式解法	20
181. 根之性質 判別式	24
182. 四次方程式之通解	26
183. 五次方程式問題	29

第二十二章 一元高次方程式通論31

184. 一元方程式的通形	31
185. 方程式的基本定理	32
186. 根的個數	32
187. 重根	33
188. 根與係數之關係	34
189. 根之對稱式	36
190. 虛根成雙	38
191. 笛卡兒符號律	40
192. 有理整式 $f(x)$ 的微商	42
193. $f(x+h)$ 的展式	43
194. 重根求法	44
195. 樂爾氏定理	46
196. 方程式變易之一	49

197. 方程式變易之二	52
198. 方程式變易之三	53
199. 倒數方程式	54
200. 倒數方程式的解法	56
201. 求有理根	60
202. 求無理根忽拿氏法	61
203. 解方程式的普遍步驟	65
 第二十三章 行列式	 68
204. 二級行列式	68
205. 三級行列式	70
206. 高級行列式之需要	74
207. 逆式	75
208. 高級行列式定義	78
209. n 級行列式特性	80
210. 子行列式	88
211. 爲零的展式	93
212. n 元 n 個一次方程組的通解	94
213. 一次齊次方程組的略解	99
214. m 元 n 個一次方程的略解	100

第二十四章 序列 組合 或然率...106

- 215. 引論.....106
- 216. 基本原理106
- 217. 序列之定義108
- 218. 序列之基本公式108
- 219. 可以重複的序列111
- 220. n 件不盡相異的序列113
- 221. 組合之定義..... 115
- 222. 組合之基本公式115
- 223. 雜例.....117
- 224. 或然率之定義.....121
- 225. 獨立事件及相倚事件123
- 226. 不共立事件125
- 227. 重複的嘗試128

第二十五章 數學歸納法130

- 228. 數學歸納法130
- 229. 歸納法必需證兩步132

第二十六章 二項式定理134

230. 引論.....	134
231. 公項.....	136
232. 係數之關係.....	137

第二十七章 極限.....140

233. 引論.....	140
234. 極限之定義.....	140
235. 極限定理一.....	142
236. 極限定理二.....	142
237. 不定式.....	145
238. 不定式之極限.....	146
239. 方程式之有 ∞ 根者.....	148

第二十八章 無盡連級數.....152

240. 無盡連級數.....	152
241. 無盡連級數之收斂與發散.....	154
242. 收斂和發散的審定.....	154
243. 簡單定理.....	155
244. 比較審定法 I.....	157
245. 比較審定法 II.....	158

246.	輔助級數	159
247.	比值審定法	162
248.	間號級數	164
249.	正負項級數	166
250.	幕級數	167
251.	二項級數	170
252.	指數級數	170
253.	對數級數	171
254.	自然對數	173
英漢名詞索引		177

代 數 學

下 冊

第 二 十 章

複素數 一元二項方程式

§ 168. 複素數. 凡以加減符號聯結虛實兩數成 $a+bi$ 之形, 此 $a+bi$ 全部視作一數名之曰複素數 (其中, a, b 爲實數, bi 爲虛數)

例如 $2+3i, \sqrt{-2}+\sqrt{7}, 1-\sqrt{3}i$ 皆爲複素數, $\sqrt{-3}+\sqrt{-5}$ 則爲虛數而非複素數.

§ 169. 複素數之基本運算. 學者既習虛數計算法, 對於複素數之基本運算, 已可不言而喻, 茲舉通例如下:

$$\begin{aligned}(1) \quad & (a+bi) + (c+di) \\ &= a+c+bi+di \\ &= (a+c) + (b+d)i.\end{aligned}$$

$$(2) \quad (a+bi)-(c+di)$$

$$= a-c+bi-di$$

$$= (a-c)+(b-d)i.$$

$$(3) \quad (a+bi)(c+di)$$

$$= ac+adi+bci+bdi^2$$

$$= (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

$$(4) \quad (a+bi) \div (c+di)$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

§ 170. 複素數爲零的定義. 由前 (§123) 所述, 虛數與實數性質根本不同, 故虛實兩數之和決不能相消爲零. 如其爲零, 則必虛實兩數各自爲零, 所以有下列定義:

定義. 凡謂“複素數 $A+Bi=0$ ”即謂“ $A=0, B=0$.”

推論. 若 $a+bi=x+yi$, 則 $a=x, b=y$.

〔證〕 因 $a+bi=x+yi$, 故 $a-x+(b-y)i=0$.

依上述定義, 應得 $a-x=0, b-y=0$, 所以 $a=x, b=y$.

〔例〕 解方程式 $3x+2y+(3x-2y+5)i=2-3i$. 其中 x, y 爲實數.

〔解〕 依上之推論應得方程組.

$$\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 3x-2y+5=-3 \end{cases}$$

解之，得

$$x=-1, y=2\frac{1}{2}.$$

§ 150. 前節的應用. 前節原理，應用頗廣，茲舉兩種於下：

〔第一〕 演複數除法. $\frac{a+bi}{c+di}$ 時，應用前節原理，可

假定 $\frac{a+bi}{c+di} = x+yi$, (x, y 爲待定的實數).

則 $a+bi = (c+di)(x+yi) = (cx-dy) + (dx+cy)i$,

依前節推論得
$$\begin{cases} cx-dy=a \\ dx+cy=b \end{cases}$$

解之，得
$$\begin{cases} x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

〔第二〕 求複素數 $a+bi$ 的平方根. 假定 $a+bi$ 的平方根是 $x+yi$, (其中 x, y 爲待定的實數), 則

$$a+bi = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

依前節推論，得
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

解之,得

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}} \\ y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a} \end{cases}$$

$$\therefore a+bi \text{ 的平方根是 } \pm \frac{1}{2} \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \pm i \sqrt{2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a}.$$

習 題 八 十

1. 解下列各方程式(已知 x, y 各為實數):

(a) $(3x+2y-5)+(5-6x-7y)i=0.$

(b) $y+5x+6yi=x+3i-yi+8.$

(c) $2x+yi+3xi-y=5+6i.$

(d) $(a+bi)(x+yi)=(1+2i)(1+i).$

(e) $x+y+(x^2-y^2)i=5+5i.$

(f) $x+yi=y^2-y+(x^2-x)i.$

2. 仿 § 171 演下列各除法:

(a) $(3+2i) \div (4+i)$

(b) $5i \div (1-2i).$

(c) $10 \div (1+2i) \div (4-3i)$

(d) $a \div (c+di)^2.$

3. 仿 § 171 求下列各數的平方根(勿用公式):

(a) $1+i$

(b) $3-2i$

(c) $1-i$

(d) i

(e) $(1+2i)^3$

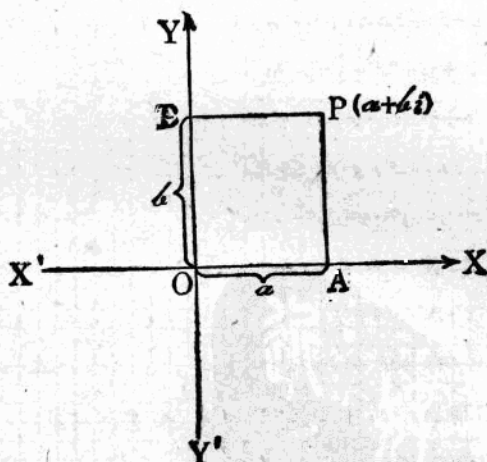
(f) $i^{\frac{1}{3}}$

4. 仿 § 171 求複數 $1+i$ 的立方根,有何困難?

§ 172. 複素數之圖形表示. 任何實數 a 可用直線上之一點表示, 前已言之 (§ 4), 任何複素數 $a+bi$ 可用平面上之一點表之. 茲述其步驟於下:

1. 先在平面上取正交兩直線 XOX' , YOY' , 以交點 O 爲原點, 並以定長 k 爲單位.

2. 次在 XOX' 上, 仿 § 4, 自 O 起量 $OA=a$ 個單位. 又在 YOY' 上自 O 起量 $OB=b$ 個單位, 如 a 爲正值, 沿 $\vec{OX}$ 量; 如 a 爲負值沿 $\vec{OX'}$ 量 (如 b 爲正值, 沿 $\vec{OY}$ 量; 如 b 爲負值, 沿 $\vec{OY'}$ 量).

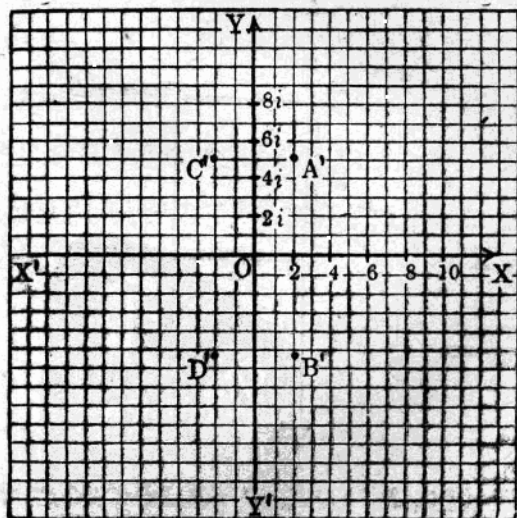


3. 過 A 作 $AP \parallel YOY'$, 過 B 作 $BP \parallel XOX'$, 則 AP , BP 之交點 P 即表複素數 $a+bi$.

此 P 點名曰複素數 $a+bi$ 之圖. XOX' 名曰實數軸,
 YOY' 名曰虛數軸.

學者注意: 依此法表示複素數, 則數系中每有一
 複素數, 平面上是否必有唯一之點與之對應? 反之, 平
 面上每有一點數系中是否必有唯一之複素數與之
 對應? 故點與複素數是否有一對一之關係? 然則 P 點
 足以表示複素數否?

例如, 有 $A \equiv 2+5i$, $B \equiv 2-5i$, $C \equiv -2+5i$, $D \equiv -2-5i$
 四複素數, 順次以右圖中 A', B', C', D' 四點表之. 反之,



圖中 A', B', C', D' 四點順次代表 A, B, C, D 四複素數, A 與 A' 二者間有確定之關係, 但舉其一, 便定其他 (B 與 B', C 與 C', D 與 D' 亦然).

習題八十一

1. 作圖表示下列各複素數:

$$(a) 1+5i \quad (b) 5-i \quad (c) -3-4i \quad (d) 2-\sqrt{3}i$$

$$(e) -2+\sqrt{3}i \quad (f) m+ni \quad (g) -m+ni \quad (h) p-qi$$

2. 作圖表示下列各數:

$$(a) -3i \quad (b) \sqrt{5}i \quad (c) -ai \quad (d) +bi$$

$$(e) 1+i \quad (f) a+ai \quad (g) -p \quad (h) 0+0i$$

3. 欲求 $P=a+bi$ 與 $P'=c+di$ 之和, 乃在平面上先求出 P, P' . 次作 $PR \parallel OP'$, 作 $P'R \parallel OP$, 則 $PR, P'R$ 之交點 R , 即表 $P+P'$. 試證其理.

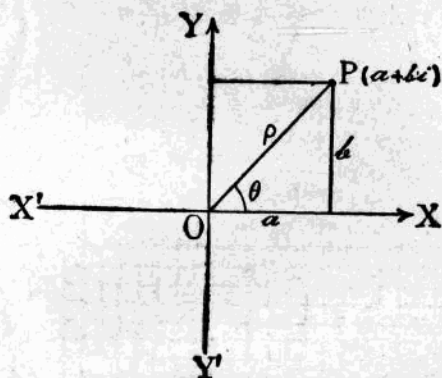
4. 欲求 P 與 P' 之差, 如何仿上題用圖形來表示?

5. 用圖形求下列各題中 P, P' 之和及其差.

$$(a) P=3+2i, P'=2+3i \quad (b) P=3-5i, P'=6-7i.$$

$$(c) P=-5-3i, P'=3+8i. \quad (d) P=-1-i, P'=-3-4i.$$

§ 173. 複素數之極坐標式. 在前節之圖內, 設 $OP = \rho$, $\angle XOP = \theta$, 則得下之公式:



$$(I) \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ \cos \theta = \frac{a}{\rho} & (2) \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} & (3) \end{cases}$$

於是

$$\underline{a+bi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)}.$$

此 $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ 名曰複素數 $a+bi$ 之極坐標式
其中 ρ 名曰 $a+bi$ 之幅模, θ 名曰 $a+bi$ 之軸角.

任何複素數 $a+bi$, 皆可利用公式 (I) [即先求 ρ 使
合 (1), 次求 θ 使合 (2), (3) 兩式], 化之為極坐標式. 舉
例如下:

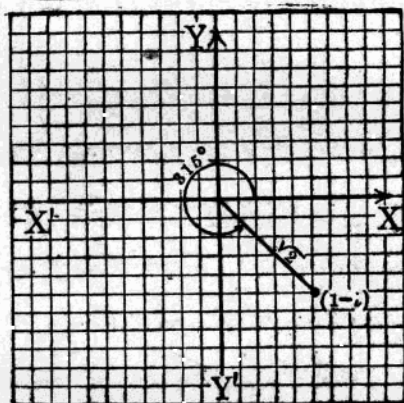
[例一] 用極坐標式表 $1-i$.

[解] $\rho = +\sqrt{1+1} = +\sqrt{2}$ (本題 $a=1, b=-1$).

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

故

$$\theta = 315^\circ$$



$$\therefore 1-i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ).$$

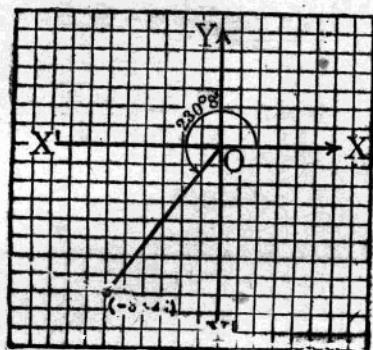
 [例二] 用極坐標式表 $-3-4i$.

$$[\text{解}] \quad \rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{3}{5} \\ \sin \theta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

故

$$\theta = 230^\circ 8'.$$



$$\therefore -3-4i=5(\cos 230^{\circ}8'+i\sin 230^{\circ}8')$$

§ 174. 用極坐標式演複素數乘法。設有兩複素數 $\rho(\cos \theta + i\sin \theta)$ 及 $\rho'(\cos \theta' + i\sin \theta')$ ，欲求其積可如下行之

$$\begin{aligned} & \rho(\cos \theta + i\sin \theta) \cdot \rho'(\cos \theta' + i\sin \theta') \\ &= \rho\rho'[\cos \theta \cos \theta' + i\cos \theta \sin \theta' + i\sin \theta \cos \theta' \\ & \quad + i^2 \sin \theta \sin \theta'] \\ &= \rho\rho'[\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' \\ & \quad + \sin \theta \cos \theta')] \\ &= \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')] \end{aligned}$$

推論. $\rho_1(\cos \theta_1 + i\sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i\sin \theta_2) \cdot \rho_3(\cos \theta_3$
 $+ i\sin \theta_3) \cdots \rho_n(\cos \theta_n + i\sin \theta_n)$

$$\begin{aligned} &= \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n) \\ & \quad + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n)] \end{aligned}$$