虞明禮原編
榮方舟改編

復興高級中學教科書

# 代數學

甲組用
下冊

商務印書館發行

# 代數學下册

## 目錄

# 代數學

## 下 册

## 第二十章

### 複素數 一元二項方程式

**§ 168. 複素數.** 凡以加減符號聯結虛實兩數成 $a+bi$ 之形,此 $a+bi$ 全部視作一數名之曰複素數(其中, $a$, $b$ 爲實數, $bi$ 爲虛數)

例如 $2+3i$, $\sqrt{-2}+\sqrt{7}$, $1-\sqrt{3}i$ 皆爲複素數, $\sqrt{-3}+\sqrt{-5}$ 則爲虛數而非複素數.

**§ 169. 複素數之基本運算.** 學者既習虛數計算法,對於複素數之基本運算,已可不言而喻,玆舉通例如下:

$$(1)\quad (a+bi)+(c+di)$$

$$=a+c+bi+di$$

$$=(a+c)+(b+d)i.$$

$$(2)\quad (a+bi)-(c+di)$$
$$= a-c+bi-di$$
$$= (a-c)+(b-d)i.$$
$$(3)\quad (a+bi)(c+di)$$
$$= ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$
$$(4)\quad (a+bi)\div(c+di)$$
$$=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

§170. **複素數爲零的定義.** 由前(§123)所述,虛數與實數性質根本不同.故虛實兩數之和決不能相消爲零.如其爲零,則必虛實兩數各自爲零,所以有下列定義:

**定義.** 凡謂"複素數 $A+Bi=0$"即謂"$A=0, B=0$.

**推論.** 若 $a+bi=x+yi$,則 $a=x, b=y$.

〔證〕 因 $a+bi=x+yi$,故 $a-x+(b-y)i=0$.

依上述定義,應得 $a-x=0, b-y=0$,所以 $a=x, b=y$.

〔例〕 解方程式 $3x+2y+(3x-2y+5)i=2-3i$.其中 $x, y$ 爲實數.

〔解〕 依上之推論應得方程組.

$$\begin{cases}3x+2y=2\\3x-2y+5=-3\end{cases}$$

解之,得　$x=-1,\ y=2\frac{1}{2}.$

§ **150.** **前節的應用.** 前節原理,應用頗廣,玆舉兩種於下:

〔第一〕 演複數除法 $\frac{a+bi}{c+di}$ 時,應用前節原理,可

假定 $\frac{a+bi}{c+di}=x+yi$, ($x, y$ 爲待定的實數).

則　$a+bi=(c+di)(x+yi)=(cx-dy)+(dx+cy)i,$

依前節推論得　$\begin{cases}cx-dy=a\\dx+cy=b\end{cases}$

解之,得　$\begin{cases}x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\\y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\end{cases}$

$$\therefore\ \frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

〔第二〕 求複素數 $a+bi$ 的平方根. 假定 $a+bi$ 的平方根是 $x+yi$, (其中 $x, y$ 爲待定的實數),則

$$a+bi=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

依前節推論,得　$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$

解之,得 $$\begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}} \\ y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{a^2+b^2}-2a} \end{cases}$$

$\therefore$ $a+bi$ 的平方根是 $\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\pm i\sqrt{2\sqrt{a^2+b^2}-2a}.$$

## 習題八十

1. 解下列各方程式(已知 $x, y$ 各爲實數):

(a) $(3x+2y-5)+(5-6x-7y)i=0.$

(b) $y+5x+6yi=x+3i-yi+8.$

(c) $2x+yi+3xi-y=5+6i.$

(d) $(a+bi)(x+yi)=(1+2i)(1+i).$

(e) $x+y+(x^2-y^2)i=5+5i.$

(f) $x+yi=y^2-y+(x^2-x)i.$

2. 仿 § 171 演下列各除法:

(a) $(3+2i)\div(4+i)$  (b) $5i\div(1-2i).$

(c) $10\div(1+2i)\div(4-3i)$  (d) $a\div(c+di)^2.$

3. 仿 § 171 求下列各數的平方根(勿用公式):

(a) $1+i$  (b) $3-2i$  (c) $1-i$

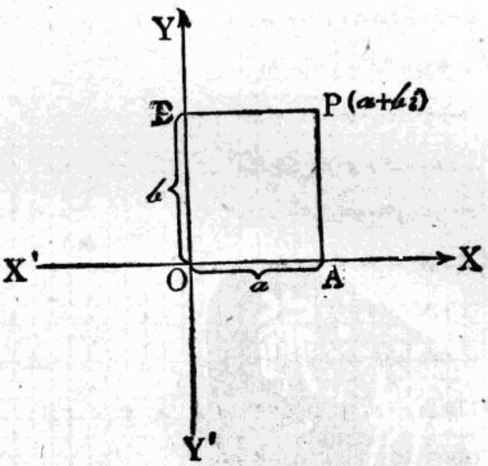
(d) $i$  (e) $(1+2i)^3$  (f) $i^{\frac{1}{2}}$

4. 仿 § 171 求複數 $1+i$ 的立方根,有何困難?

**§172. 複素數之圖形表示.** 任何實數 $a$ 可用直線上之一點表示,前已言之(§4),任何複素數 $a+bi$ 可用平面上之一點表之.茲述其步驟於下:

1. 先在平面上取正交兩直線 $XOX'$, $YOY'$, 以交點 $O$ 爲原點,並以定長 $k$ 爲單位.

2. 次在 $XOX'$ 上,仿§4,自 $O$ 起量 $OA=a$ 個單位.又在 $YOY'$ 上自 $O$ 起量 $OB=b$ 個單位,如 $a$ 爲正值,沿 $\overrightarrow{OX}$ 量;如 $a$ 爲負值沿 $\overrightarrow{OX'}$ 量(如 $b$ 爲正值,沿 $\overrightarrow{OY}$ 量;如 $b$ 爲負值,沿 $\overrightarrow{OY'}$ 量).

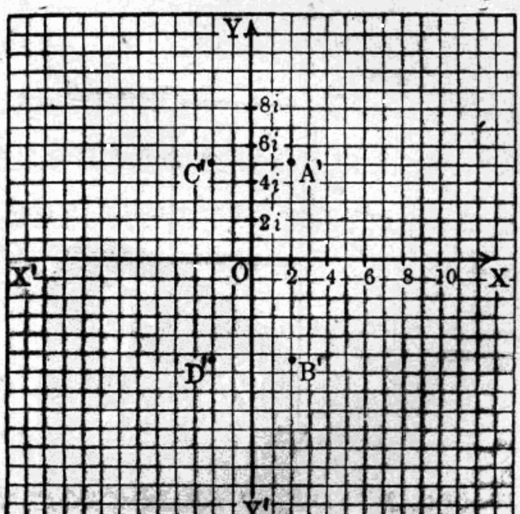



3. 過 $A$ 作 $AP \parallel YOY'$, 過 $B$ 作 $BP \parallel XOX'$, 則 $AP$, $BP$ 之交點 $P$ 卽表複素數 $a+bi$.

此$P$點名曰複素數$a+bi$之圖. $XOX'$名曰實數軸, $YOY'$名曰虛數軸.

學者注意: 依此法表示複素數,則數系中每有一複素數,平面上是否必有唯一之點與之對應?反之,平面上每有一點數系中是否必有唯一之複素數與之對應?故點與複素數是否有一對一之關係?然則$P$點足以表示複素數否?

例如,有 $A\equiv 2+5i$, $B\equiv 2-5i$, $C\equiv -2+5i$, $D\equiv -2-5i$ 四複素數,順次以右圖中$A'$, $B'$, $C'$, $D'$四點表之.反之,



圖中$A',B',C',D'$四點順次代表$A,B,C,D$四複素數,$A$與$A'$二者間有確定之關係,但舉其一,便定其他($B$與$B'$,$C$與$C'$,$D$與$D'$亦然).

## 習題八十一

1. 作圖表示下列各複素數:

(a) $1+5i$　(b) $5-i$　(c) $-3-4i$　(d) $2-\sqrt{3}i$

(e) $-2+\sqrt{3}i$　(f) $m+ni$　(g) $-m+ni$　(h) $p-qi$

2. 作圖表示下列各數:

(a) $-3i$　(b) $\sqrt{5}i$　(c) $-ai$　(d) $+bi$

(e) $1+i$　(f) $a+ai$　(g) $-p$　(h) $0+0i$

3. 欲求$P=a+bi$與$P'=c+di$之和,乃在平面上先求出$P,P'$.次作$PR\parallel OP'$,作$P'R\parallel OP$,則$PR,P'R$之交點$R$,卽表$P+P'$.試證其理.

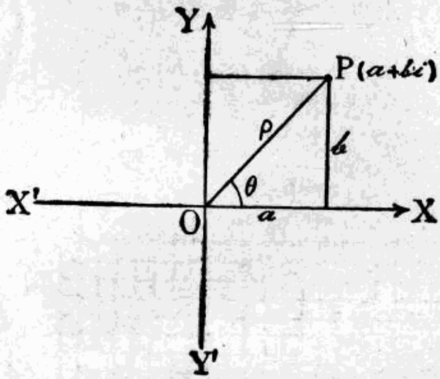
4. 欲求$P$與$P'$之差,如何仿上題用圖形來表示?

5. 用圖形求下列各題中$P,P'$之和及其差.

(a) $P=3+2i,\quad P'=2+3i$　(b) $P=3-5i,\quad P'=6-7i.$

(c) $P=-5-3i,\ P'=3+8i.$　(d) $P=-1-i,\ P'=-3-4i.$

§173. 複素數之極坐標式. 在前節之圖內,設$OP=\rho$,$\angle XOP=\theta$,則得下之公式:




$$
\text{(I)}\quad\begin{cases}
\rho=\sqrt{a^2+b^2} & (1)\\[2ex]
\cos\theta=\dfrac{a}{\rho} & (2)\\[2ex]
\sin\theta=\dfrac{b}{\rho} & (3)
\end{cases}
$$

於是 $$a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

此 $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ 名曰複素數 $a+bi$ 之極坐標式其中 $\rho$ 名曰 $a+bi$ 之幅模，$\theta$ 名曰 $a+bi$ 之軸角.

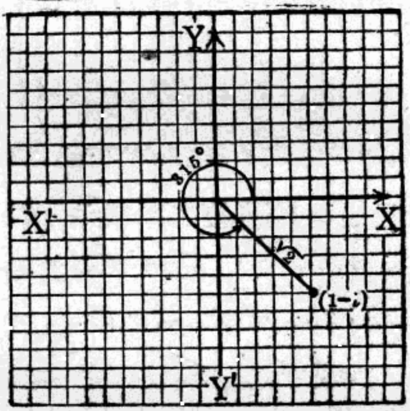
任何複素數 $a+bi$，皆可利用公式 (I) [即先求 $\rho$ 使合 (1)，次求 $\theta$ 使合 (2)，(3) 兩式]，化之爲極坐標式. 舉例如下：

〔例一〕 用極坐標式表 $1-i$.

〔解〕 $\rho=+\sqrt{1+1}=+\sqrt{2}$ (本題 $a=1$, $b=-1$).

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex]\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\ \ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

故　$\theta=315°$



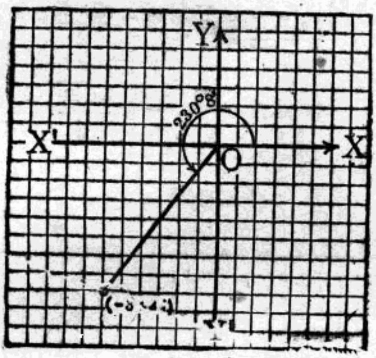

$$\therefore\quad 1-i=\sqrt{2}\,(\cos 315°+i\sin 315°).$$

〔例二〕　用極坐標式表 $-3-4i$.

〔解〕　$\rho=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$$\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{3}{5}\\[2ex]\sin\theta=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

故　$\theta=230°8'$.




$$\therefore\quad -3-4i=5\,(\cos 230°8'+i\sin 230°8').$$

**§ 174. 用極坐標式演複素數乘法.** 設有兩複素數 $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ 及 $\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')$,欲求其積可如下行之

$$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\,.\,\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta').$$

$$=\rho\rho'[\cos\theta\cos\theta'+i\cos\theta\sin\theta'+i\sin\theta\cos\theta'+i^2\sin\theta\sin\theta']$$

$$=\rho\rho'[\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')]$$

$$=\rho\rho'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$$

**推論.** $\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\,.\,\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\,.\,\rho_3(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)\cdots\cdots\rho_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$

$$=\rho_1\rho_2\rho_3\cdots\cdots\rho_n\,[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)].$$