全国普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

（上册）

主　编　管银枝　颜宝平　孙立宏

副主编　符策红　陈修焕

北京洪恩教育科技有限公司　总策划

- 本书是编者根据多年的教学经验编写而成
- 结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂
- 教材适应时代要求、符合改革精神、同时又继承了传统教材的优点
- 每章、节中都配有丰富的习题，以便及时巩固和提高

天津科学技术出版社

高等数学

（上册）

主　编　管银枝　颜宝平　孙立宏
副主编　符策红　陈修焕

天津科学技术出版社

内 容 提 要

本书是根据编者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，并结合高等数学课程教学基本要求编写而成的。本书分上、下两册。上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分以及应用，空间解析几何等。

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂。本书侧重于分析高等数学各种典型题型，介绍各种解题思路、方法和运算技巧，帮助学生加深对数学概念的理解，提高学生分析问题和解决问题的能力。为了及时巩固所学知识点，本书每章、节后都提供了课后习题，所对应的参考答案可以从 http://pcbook.hongen.com/ 上下载。

本书可供大学本科和高职高专院校工科类专业、文科类专业的学生使用，也可作为学生考研复习的参考书和工程技术人员更新数学知识的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 管银枝等主编. —天津：天津科学技术出版社，2008.8

ISBN 978-7-5308-4500-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 管… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 098047 号

责任编辑：刘丽燕

责任印制：王　莹

天津科学技术出版社出版

出版人：胡振泰

天津市西康路 35 号　邮编 300051

电话（022）23332398　（022）23332393

网址：www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

河北新华印刷一厂

开本 787 × 1092　1/16　印张 39.5　字数 986 000

2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

定价：56.00 元（上、下册）

编 委 会

前 言

本书是根据教育部《高等数学课程教学基本要求》和教育教学改革的实践编写的。在编写过程中，我们研究分析了现行的几种版本的《高等数学》教材，吸纳了各版本教材的优点，融进了近几年在教学科研中取得的成果，使本书更加适合教学要求。

本书分上下两册，上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分以及应用，空间解析几何等，下册包括多元函数微积分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。各章均配有习题，便于及时对所学知识巩固提高，所对应的参考答案可以从 http://pcbook.hongen.com/ 上下载。

为了使本书适合高等理工科院校的使用，我们将较深的内容或超出基本要求的内容用“*”标出。

由于我们的研究能力、学术水平以及编写时间的限制，教材中难免有疏漏和不当之处，恳切期望读者批评指正，以便进一步修改和完善。

编 者

2008 年 8 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

微积分的主要研究对象是变量，首先要研究的就是变量之间的某种确定的依赖关系，即函数关系，所以我们从函数概念讲起．

同学们在中学里已经接触过一些函数的概念与函数的性质，本章在对函数及其性质重点复习和适当补充的基础上，着重讨论函数的极限和连续性等基本概念，以及有关的一些性质．

第一节　函数

一、 区间与邻域

本书中所讨论的数都是实数．关于集合的初步知识读者在中学已经学习了，本书不再重述．以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合．

全体自然数的集合记作 N．全体整数的集合记作 Z．全体有理数的集合记作 Q．全体实数的集合记作 R.

区间是特殊的实数集 R 的子集，设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段（图 1.1）．但 $a \notin (a, b)$，$b \notin (a, b)$．a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点；数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记做 $[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

它在数轴上也表示点 a 与点 b 之间的线段，且 $a \in [a, b]$，$b \in [a, b]$（图 1.2）.

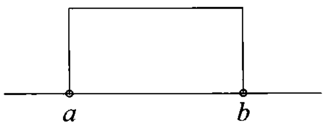

图 1.1

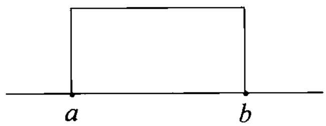

图 1.2

类似地可定义半开区间：

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\};\ (a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}.$$

上述区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为相应的区间长度，此外还有所谓的无限区间，如

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\},(-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b\}.$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in \mathrm{R}\}.$$

其中区间中的记号“$+\infty$”,“$-\infty$”，分别读作“正无穷大”和“负无穷大”．它们并不是数，不能参与运算.

邻域也是一个经常用到的概念．以点a为中心的任何开区间称为a的邻域，记作U（a）.

开区间$(a-\delta,\ a+\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$，其中$\delta$是某个正数，称为点$a$的$\delta$邻域，记作$U_\delta(a)$，即

$$U_\delta(a)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

点a称为邻域的中心，δ称为该邻域的半径，从数轴上看，点a的δ邻域表示：以点a为中心，长度为2δ的开区间（图 1.3）.

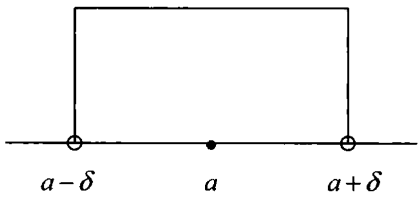

图 1.3

由于$a-\delta<x<a+\delta$相当于$|x-a|<\delta$．因此,

$$U_\delta(a)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

在点a的δ邻域中去掉中心a后，称为点a的空心的δ邻域，记作$\dot{U}_\delta(a)$，即

$$\dot{U}_\delta(a)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里$0<|x-a|$表示$x\neq a$.

二、 函数的概念

在观察自然现象或工程问题时，常常发现同时有几个变量在变化，且它们的变化并非彼此无关，而是互相联系着．下面列举两个变量互相联系着的例子.

例 1.1　真空中自由落体，物体下落的距离S与所用的时间t有下述关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}})$$

其中常数g是重力加速度，h是起始点到地面的距离.

例 1.2　三角形一边长固定为a，那么三角形面积S与该边上高x有如下关系：

$$S=\frac{1}{2}ax \qquad (0<x<+\infty)$$

从上两例可以看到，我们讨论的问题中都有两个变量，而且这两个例子中的变量都有共同的特

征：当其中一个变量的值在某一范围内确定后，另一个变量的值按照一定的对应关系也随之而确定．我们把两个变量之间的这样的关系抽象为函数关系．

定义1　设 x 和 y 是两个变量，x 的变化域是 D．如果对于每个数 $x\in D$，按照某种规则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$． x 称为自变量，y 称为因变量．D 称为该函数的定义域．当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．函数值的集合称为函数的值域，即

$$W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}\subset \mathrm{R}\ \text{是函数的值域}.$$

函数 $y=f(x)$ 中表示对应规则的记号 f 也可改用其他字母，如

"φ""g""F"等等．此时函数记作 $y=\varphi(x)$， $y=g(x)$， $y=F(x)$，等等．

定义域是函数定义中的一个重要概念，确定函数的定义域，一是根据问题的实际意义，例1.1中定义域 $[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}]$，例1.2定义域为 $(0,+\infty)$．有时不考虑函数的实际意义，一般地研究用算式表达函数时，则将自变量所能取的使算式有意义的一切实数值作为函数的定义域．例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，函数 $y=\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$．

函数的定义域和对应关系法则是确定函数的两个基本条件．在判断两个函数是否为同一函数时，要看两个基本条件是否完全相同，完全相同才是相同的函数．例如，函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同函数．函数 $y=\lg x^2$ 和 $y=2\lg x$ 是两个不同的函数，因为两者的定义域不同．

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，平面点集

$$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形．

例1.3　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

称为符号函数，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,\ 0,\ 1\}$，图形如图1.4所示，对于任何实数 x 都有

$$x=|x|\,sgnx\,.$$

例1.4　取整函数 $y=[x]$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，简称为 x 的整数部分，图形如图1.5．定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\mathrm{Z}$.

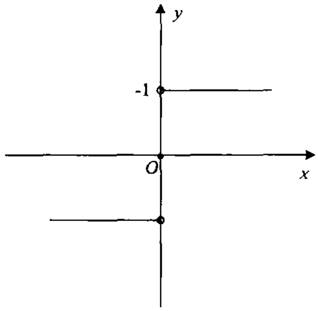

图 1.4

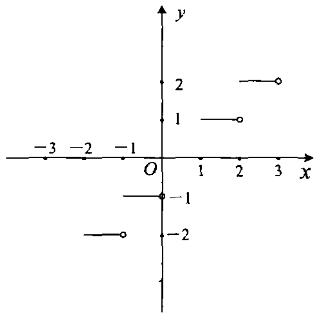

图 1.5

这种在定义域内不同的范围用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**.

例 1.5 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1+2x & x>0 \end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$．当 $x\in(-\infty,\ 0)$ 时，对应的函数值 $f(x)=x^2+1$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=1+2x$，当 $x=0$ 时，函数值为零．例如，$f(-1)=2$，$f(0)=0$，$f(2)=5$．该函数的图形如图 1.6 所示．

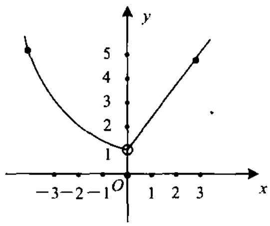

图 1.6

例 1.6 一物体由静止开始作直线运动，前 10 秒钟内作匀加速运动，加速度为 2厘米 / 秒^2，10 秒后作匀速运动．运动开始时路程为零，试建立路程 S 与时间 t 之间的函数关系．

解 已知在前 10 秒内作匀加速运动，所以当 $0\leqslant t\leqslant 10$ 时有

$$S=\frac{1}{2}\times 2t^2=t^2$$

当 $t=10$ 秒时，$v=2\times 10$（厘米/秒）．前 10 秒内经过的路程为 $S=100$．因此，当 $t>10$ 时有

$$S=100+(t-10)\cdot 20$$

于是得出路程 S 与时间 t 之间的函数关系

$$S=\begin{cases} t^2 & 0\leqslant t\leqslant 10;\\ 100+(t-10)\cdot 20 & t>10.\end{cases}$$

例 1.6 是运用物理规律建立的函数关系式，得到一个分段函数.

应当指出，一个分段函数在定义域的不同范围内虽然有不同的表达式，但它仍然只是一个函数，而不能看成是几个不同的函数.

三、 有关函数特性的一些概念

（1）函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$．如果存在正数 M，对任意 $x\in X$，有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界．如果存在数 P_1（或 P_2），对任意 $x\in X$，有

$$f(x)\leqslant P_1 \text{（或} f(x)\geqslant P_2\text{）}$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界（或有下界），P_1（或 P_2）就是 $f(x)$ 在 X 上的一个上界（或下界）.

容易证明，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界．事实上，存在 M=1，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|\sin x|\leqslant 1$ 与 $|\cos x|\leqslant 1$.

定义2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果对任意的 p＞0，总存在某个 $x_p\in X$，有

$$f(x_p)>p \text{（或} f(x_p)<-p\text{）},$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上无上界（或无下届）．如果对任何的 M＞0，总存在 $x_M\in X$，使 $|f(x_M)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

显然，无上界或无下界就无界.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间（0，1）内是无界的．事实上，对于任意取定的正数 M（不妨设 M>1），则存在 $x_M=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，有 $\dfrac{1}{x_M}=2M>M$（或 $|\dfrac{1}{x_M}|=2M>M$）．即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在（0，1）内无界且无上界．但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间（1，2）内是有界的，因为，对任意 $x\in(1,2)$ 有 $|\dfrac{1}{x}|\leqslant 1$，可取 M=1.

（2）函数的单调性

定义3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果对于数集 X 上任意两点 x_1 及 x_2，当

$x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1) \geqslant f(x_2)) \qquad (1.1)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的（或单调减少的）．单调增加和单调减少的函数统称单调函数．

当（1.1）式为严格的不等式时，称 $f(x)$ 为严格单调函数．

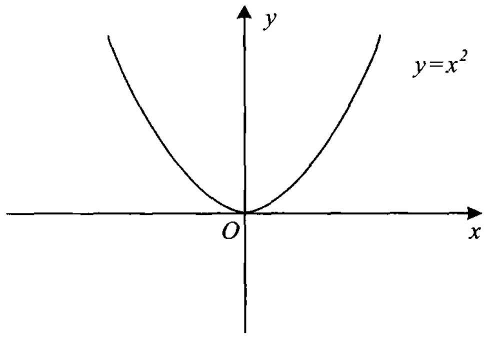

图 1.7

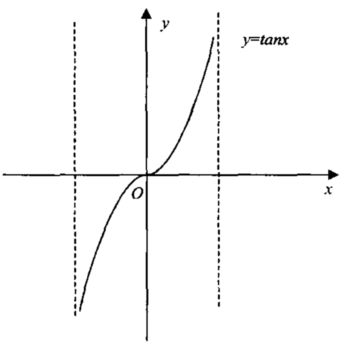

图 1.8

例1.7　函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的（图 1.7）．又如函数 $y=\tan x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 内是严格单调增加的（图 1.8）．

（3）函数的奇偶性

定义4　**设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任一 $x\in D$，恒有**

$$f(-x)=f(x) \qquad (\text{或} f(-x)=-f(x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）．

偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1.9）．奇函数的图形关于原点对称（图 1.10）．

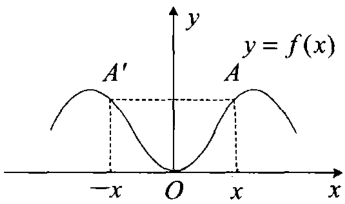

图 1.9

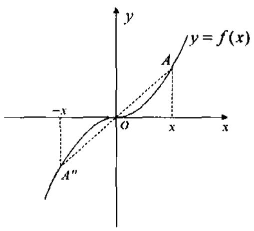

图 1.10

例 1.8　$y=x^2$ 与 $y=\cos x$，$y=x^{2n}$ 是偶函数，$y=\sin x$，$y=x^3$ 与 $y=x^{2n-1}$ 是奇函数，其中 n 是自然数，而 $y=x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数．

（4）函数的周期性

定义5 **设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的一个周期. 当 l 是 $f(x)$ 的一个周期时，则 $\pm kl$（k 为自然数）也都是 $f(x)$ 的周期. 通常我们说一个周期函数的周期是指其最小正周期.**

周期函数图形的特点为：自变量在定义域内每增加或减少一固定的距离 l 后，图形重复出现. 如图 1.11 所示.

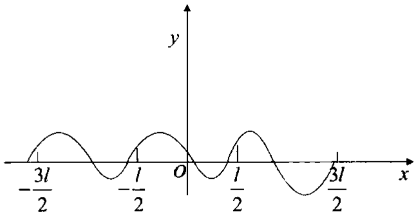

图 1.11

例 1.9 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，$y=\tan x$ 和 $y=\cos x$ 都是周期数为 π 的周期函数.

四、 反函数及其图形

定义6 **设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对于任一数值 $y\in W$，按照 $y=f(x)$ 的关系，都可确定唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，这样就得到一个定义在 W 上的 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 W，值域为 D. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.**

由定义可见，虽然 $y=f(x)$ 是单值函数，但其反函数却不一定存在. 但如果 $y=f(x)$ 是在 D 上是严格单调的函数，那末就能保证反函数存在. 这是因为，若 $y=f(x)$ 是严格单调的函数，则任取 x_1，$x_2\in D$ 且 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 所以，任取一个数 $y_0\in W$ 时，D 上不可能有两个不同的数值 x_1 与 x_2 使 $y_0=f(x_1)$ 及 $y_0=f(x_2)$ 同时成立. 也即由 y_0 能唯一确定一个 $x_0\in D$ 与之对应.

例 1.10 函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$. 在 $[0,+\infty)$ 上任取 $y\neq 0$. 按照 $y=x^2$ 有二个 x 值 $x=\pm\sqrt{y}$（图 1.12）与之对应. 所以 $y=f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不能确定出反函数. 在 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的. 将 x 限制在 $[0, +\infty)$ 上，则 $y=x^2$ 的反函数是存在的，即 $x=\sqrt{y}$，$y\in(0,+\infty)$.

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量. 所以也可用 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$ 来表示 $y=f(x)$ 的反函数. 这时，函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的. 如图 1.13 所示.

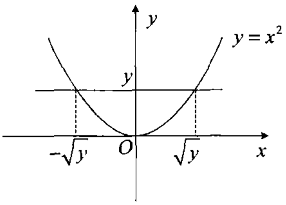

图 1.12

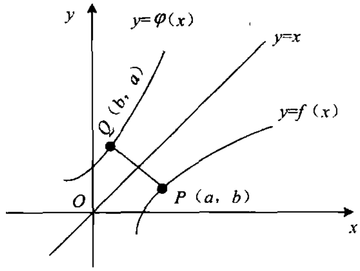

图 1.13

五、 初等函数

以下五类函数，称为基本初等函数.

（1）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）

幂函数的定义域要由 α 的值来确定．当 $\alpha>0$ 时讨论 $x\geqslant 0$ 的情形，所有的图形都通过（0，0）及点（1，1）．在 $0<\alpha<1$ 的情况下图形向上凸起，在 $\alpha>1$ 的情况下，图形向下凸起；当 $\alpha<0$ 时（讨论 $x>0$ 的情形），所有的图形都通过点（1，1），且当图形上的点远离原点时，图形分别与 x 轴和 y 轴无限靠近（图 1.14）.

（2）指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

对于任何 x，均有 $a^x>0$，对任何 $a(a>0,\ a\neq 1)$．图形通过点（0，1）．当 $a>1$ 时，函数严格单调增加，图形向左逐渐与 x 轴靠近；当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少，图形向右逐渐与 x 轴靠近（图 1.15）.

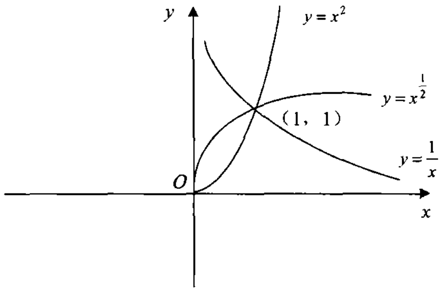

图 1.14

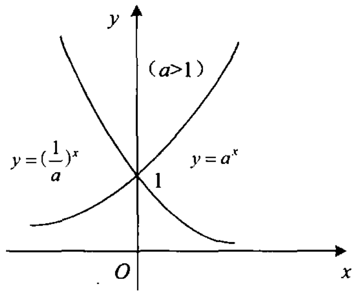

图 1.15

（3）对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

对数函数的定义域为 $x>0$，它的图形与其反函数 $y=a^x$ 对称于直线 $y=x$，通过点（1，0）（图 1.16）.