

结构力学(下)

STRUCTURAL MECHANICS

主编 刘金春

普通高等院校土木专业“十一五”规划精品教材

Civil Professional Textbooks for the 11th Five-Year Plan

主审 刘尔烈 夏永旭

普通高等院校土木专业“十一五”规划精品教材

结构力学_(下)

Structural Mechanics

丛书审定委员会

王思敬 彭少民 石永久 白国良
李 杰 姜忻良 吴瑞麟 张智慧

本书主审 刘尔烈 夏永旭

本书主编 刘金春

本书副主编 刘润星 刘然慧

本书编写委员会

刘金春 刘润星 刘然慧 葛吉虹 杜青

华中科技大学出版社

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

结构力学(下)/刘金春 主编. —武汉:华中科技大学出版社,2008年9月
ISBN 978-7-5609-4470-8

I. 结… II. 刘… III. 结构力学-高等学校-教材 IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 035050 号

结构力学(下)

刘金春 主编

责任编辑:蒋玉霞

封面设计:张璐

责任校对:朱霞

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074

销售电话:(022)60266190(兼传真),(022)60266192 网址:www.hustpas.com

录排:华中科技大学惠友文印中心

印刷:华中科技大学印刷厂

开本:850mm×1065mm 1/16

印张:27.25

字数:560 000

版次:2008年9月第1版

印次:2008年9月第1次印刷

定价:90.00元

ISBN 978-7-5609-4470-8/O·435

(上、下册)

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本教材是根据教育部批准试行的《高等工业学校结构力学教学基本要求》和当前课程教学实践及结构工程学科关于教材系列的规划而编写的,可作为工业与民用建筑、土建结构、桥梁与隧道、水工结构、地下建筑、防灾减灾与防护、铁道及公路工程等专业结构力学教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考使用。

本书分上、下两册,上册内容包括:绪论,平面体系的几何组成分析,静定结构的内力分析,静定结构的影响线,静定结构的位移计算,力法解超静定结构等。下册内容包括:位移法,渐近法和超静定结构的影响线,矩阵位移法,结构动力学,结构的极限荷载,结构的弹性稳定等。不同的专业可根据专业的需要各自取舍。每章后附有较丰富的习题及部分习题答案。

本书吸取了现有教材的优点并反映当代结构力学的研究成果,阐述原理严密,概念清晰,并体现了学科性、系统性和内容的先进性,理论联系实际,说理透彻,既方便教师教,也方便学生自学。

总 序

教育可理解为教书与育人。所谓教书,不外乎是教给学生科学知识、技术方法和运作技能等,教学生以安身之本。所谓育人,则要教给学生做人道理,提升学生的人文素质和科学精神,教学生以立命之本。我们教育工作者应该从中华民族振兴的历史使命出发,来从事教书与育人工作。作为教育本源之一的教材,必然要承载教书和育人的双重责任,体现两者的高度结合。

中国经济建设高速持续发展,国家对各类建筑人才的需求日增,对高校土建类高素质人才的培养提出了新的要求,从而对土建类教材建设也提出了新的要求。这套教材正是为了适应当今时代对高层次建设人才培养的需求而编写的。

一部好的教材应该把人文素质和科学精神的培养放在重要位置。教材中不仅要内容上体现人文素质教育和科学精神教育,而且还要从科学严谨性、法规权威性、工程技术创新性来启发和促进学生科学世界观的形成。简而言之,这套教材有以下特点。

一方面,从指导思想来讲,这套教材注意到“六个面向”,即面向社会需求、面向建筑实践、面向人才市场、面向教学改革、面向学生现状、面向新兴技术。

二方面,教材编写体系有所创新。结合具有土建类学科特色的教学理论、教学方法和教学模式,这套教材进行了许多新的教学方式的探索,如引入案例式教学、研讨式教学等。

三方面,这套教材适应现在教学改革发展的要求,提倡所谓“宽口径、少学时”的人才培养模式。在教学体系、教材编写内容和数量等方面也做了相应改变,而且教学起点也可随着学生水平做相应调整。同时,在这套教材编写中,特别重视人才的能力培养和基本技能培养,适应土建专业特别强调实践性的要求。

我们希望这套教材能有助于培养适应社会发展需要的、素质全面的新型工程建设人才。我们也相信这套教材能达到这个目标,从形式到内容都成为精品,为教师和学生,以及专业人士所喜爱。

中国工程院院士 王 思 敬

2006年6月于北京

前 言

本书是根据教育部批准试行的《高等工业学校结构力学教学基本要求》和当前课程教学实践及结构工程学科关于教材系列的规划而编写的,可作为工业与民用建筑、土建结构、桥梁与隧道、水工结构、地下建筑、防灾减灾与防护、铁道及公路工程等专业结构力学教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考使用。

本书分上、下两册出版,上册内容包括:绪论、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力分析、静定结构的影响线、静定结构的位移计算、力法解超静定结构等。下册内容包括:位移法解超静定结构、渐近法和超静定结构的影响线、结构矩阵位移法、结构动力学、结构的极限荷载、弹性结构的稳定计算等。不同的专业可根据各自的需要有所取舍。每章后面均附有较丰富的习题和部分习题答案,以活跃思维,启发思考,有助于精解精练,提高对本专业问题的本质的认识。

在本书编写过程中,编者吸取了现有教材的优点并力图反映当代结构力学的研究成果,力求体系完整,特色鲜明,阐述清晰、严谨,文字精练、生动,使本教材内容能体现现代科学性、系统性、先进性和教学适用性,以适应我国国情和教学上不同层次的要求,便于因材施教。

本书从“大土木”的专业要求出发,精选内容,抓住关键,突出重点,特别注意了教材内容的更新并吸收各校教学改革的阶段性成果,以适应 21 世纪土木工程人才的培养要求,成为面向新世纪、适应新专业的全新教材。

本书由河北工业大学刘金春任主编并编写第 1、9、12、13 章,内蒙古大学刘润星任副主编并编写第 4、6、14 章,由山东科技大学刘然慧任副主编并编写第 2、7、10 章。参加本书编写工作的还有山西师范大学葛吉虹(编写第 3、5、8 章),河北工业大学杜青(编写第 11 章)。本书由天津大学刘尔烈教授、长安大学夏永旭教授主审,全书由刘金春修改定稿。

本书在编写过程中,吸收、引用了部分国内优秀结构力学教材的观点、例题和习题。编者在此谨向这些文献的作者们致以衷心的感谢。

在本书的编写和出版过程中,得到了窦远明教授、魏连雨教授、阎西康教授的大力支持,他们对编写大纲及书稿提出了许多宝贵意见,在此,编者向他们深表感谢。

本书在编写过程中,我们的编审者、编辑出版者虽夙兴夜寐、尽心竭力,但限于编者的水平和经验,加之时间仓促,书中难免存在缺点和错误,诚恳地希望读者提出批评和指正。

编 者

2006 年 12 月 28 日

目 录

第 9 章 位移法	(1)
9.1 位移法的基本概念	(1)
9.2 基本未知量数目的确定	(4)
9.3 等截面直杆的转角位移方程	(9)
9.4 应用位移法典型方程计算超静定结构	(17)
9.5 应用节点和截面平衡条件计算超静定结构	(35)
9.6 用位移法分析具有剪力静定杆的刚架	(42)
9.7 用位移法计算对称结构	(47)
9.8 支座位移和温度变化影响下超静定结构的计算	(54)
9.9 位移法计算变截面结构	(58)
【本章小结】	(72)
【习题】	(74)
第 10 章 渐近法和超静定结构的影响线	(87)
10.1 力矩分配法的基本原理	(87)
10.2 力矩分配法计算连续梁和无节点线位移刚架	(96)
10.3 力矩分配法与位移法的联合应用	(109)
10.4 无剪力分配法	(116)
10.5 连续梁的影响线	(122)
10.6 连续梁的内力包络图	(135)
10.7 超静定桁架的影响线	(138)
【本章小结】	(143)
【习题】	(144)
第 11 章 矩阵位移法	(152)
11.1 概述	(152)
11.2 局部坐标系的单元刚度矩阵	(156)
11.3 整体坐标系的单元刚度矩阵	(162)
11.4 连续梁的整体刚度矩阵	(168)
11.5 刚架的整体刚度矩阵	(179)
11.6 非节点荷载的处理	(184)
11.7 刚度集成法的计算步骤和算例	(190)
11.8 忽略轴向变形时平面刚架的整体分析	(206)
11.9 后处理法	(212)
【本章小结】	(222)
【习题】	(223)
第 12 章 结构动力学	(228)

12.1	概述	(228)
12.2	单自由度体系的自由振动	(233)
12.3	单自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	(246)
12.4	单自由度结构在任意荷载作用下的强迫振动	(255)
12.5	隔振概念	(261)
12.6	多自由度体系的自由振动	(266)
12.7	多自由度体系主振型的正交性	(291)
12.8	多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	(293)
12.9	振型叠加法计算多自由度体系的强迫振动	(299)
12.10	无限自由度体系的振动	(305)
12.11	频率的近似计算法	(310)
	【本章小结】	(317)
	【习题】	(319)
第 13 章	结构的极限荷载	(328)
13.1	概述	(328)
13.2	极限弯矩, 塑性铰和破坏机构	(329)
13.3	单跨超静定梁的极限荷载	(331)
13.4	连续梁的极限荷载	(336)
13.5	比例加载的几个定理	(339)
13.6	简单刚架的极限荷载	(344)
13.7	确定梁和刚架极限荷载的增量变刚度法	(347)
	【本章小结】	(357)
	【习题】	(359)
第 14 章	结构的稳定计算	(364)
14.1	稳定计算的概念	(364)
14.2	用静力法确定临界荷载	(370)
14.3	用能量法确定临界荷载	(377)
14.4	等截面直杆的稳定	(385)
14.5	变截面杆件的稳定计算	(392)
14.6	剪力对临界荷载的影响	(394)
14.7	组合压杆的稳定	(397)
14.8	刚架的稳定计算	(402)
	【本章小结】	(409)
	【习题】	(411)
部分习题答案		(415)
参考文献		(428)

第 9 章 位 移 法

9.1 位移法的基本概念

力法和位移法是分析超静定结构的两种基本方法。19 世纪末力法就用来分析各种超静定结构问题。但随着结构的日益复杂和钢筋混凝土结构的广泛应用,出现了大量高次超静定刚架结构,用力法计算将会十分烦琐。20 世纪初,人们在力法的基础上又建立了位移法。

力法是以结构中的多余未知力作为基本未知量,选取静定结构作为基本结构。按位移条件求出多余未知力后,再据此算得其他的反力、内力和位移。然而,在确定的外因作用下,结构的内力与位移恒具有一定的关系,因此,可遵循另一途径,即把结构的某些位移作为基本未知量,先设法求出它们,再据此求出结构的内力和其他位移。这种方法就是本章将要讨论的位移法。从位移法的基本原理出发,可衍生多种变体的计算方法,例如力矩分配法和迭代法等,这些变体的计算方法在生产实际中的应用十分普遍。因此,学习本章的目的,除使初学者掌握位移法的基本原理外,还要为以后学习其他各种变体方法打下必备的基础。此外,应用电子计算机计算结构所常用的直接刚度法也是根据位移法而来的,故本章的内容也是学习电算应用的一个基础。

总之,结构在一定的外因作用下,其内力与位移之间具有一定的函数关系,确定的内力与确定的位移相对应。因此,可以先求内力再求位移,也可先求位移再求内力。

为了说明位移法的基本概念,研究图 9-1(a)所示的连续梁。在荷载 q 作用下,产生的变形如图中虚线所示。其中,AB 杆和 BC 杆在节点 B 处的杆端转角是相等的。杆件 AB 和 BC 在节点 B 是刚性联结,如同在刚架中杆件联结的情况一样,我们称节点 B 为刚节点。为了使问题简化,在受弯杆件中,略去杆件的轴向变形和剪切变形的影响,并认为弯曲变形是很小的,因而假定在变形过程中受弯杆件两端之间的距离保持不变。图 9-1(a)所示连续梁的变形情况,相当于图 9-1(b)所示。其中,BC 杆相当于左端固定,右端铰支的梁,上面承受荷载 q 的作用,且在左端发生转角 φ_B ; AB 杆则相当于右端固定,左端铰支的梁,在其右端发生转角 φ_B 。如果把节点 B 的转角 φ_B 当做支座位移这一外因来看待,则上述连续梁即可转化为两个单跨超静定梁来计算。只要知道了转角 φ_B 的大小,则按上一章介绍的力法,即可求得这两个单跨超静定梁的全部反力和内力,因而图 9-1(a)所示连续梁的计算问题便可解决。由

上可知,问题的关键在于确定未知量 φ_B 的大小。下面就以此连续梁为例说明基本未知量 φ_B 的计算方法,以及 φ_B 确定之后如何进一步计算梁的内力。

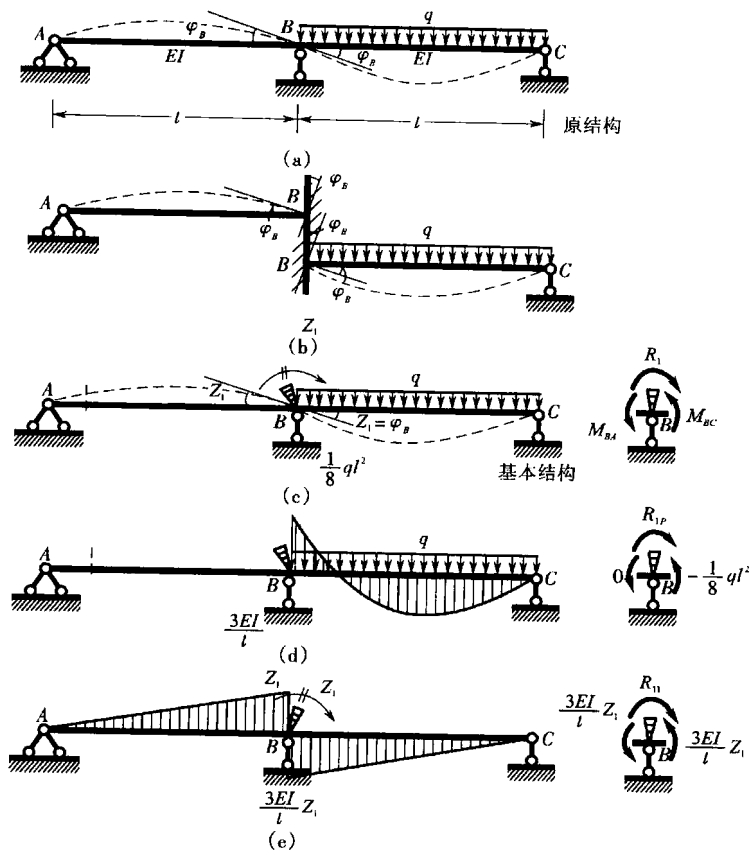


图 9-1 位移法计算连续梁

(a)两跨连续梁;(b)单跨超静定梁组合体;(c)位移法基本结构;

(d)荷载单独作用下的弯矩图;(e)节点位移单独作用下的弯矩图

为了能将图 9-1(a)转化为图 9-1(b)来计算,设想在连续梁的节点 B 处装上一个阻止转动的装置“”,称它为附加刚臂约束,如图 9-1(c)所示。它的作用是控制节点 B 不发生转动,但不能阻止移动。因为节点 B 无线位移,故在加入此附加刚臂后, B 就变成了固定端,原结构变成了由 AB 和 BC 这两根一端固定另一端铰支的单跨超静定梁组成的组合体。这一组合体称为原结构按位移法计算时的基本结构。将外荷载作用于基本结构,并强使基本结构的附加刚臂发生与实际情况相同的转角 φ_B (计算中以未知量 Z_1 表示),则基本结构的受力和变形情况如图 9-1(c)就将与图 9-1(a)所示原结构的情况完全相同。因此,可用基本结构的计算来代替原结构的计算。

根据上述概念,可按如下方法导出求解 Z_1 的方程。由叠加原理,可把图 9-1(c)

梁所示的连续梁分解为图 9-1(d)、(e)所示两种情况。在图 9-1(d)中,只有荷载 q 的作用而无转角 Z_1 的影响,其中 AB 杆无荷载作用,不发生变形,故无内力,而荷载 q 作用下的 BC 杆的弯矩图可按 8.3 节确定。在图 9-1(e)中,杆 AB 和 BC 均相当于一端固定另一端铰支的梁,在其固端 B 处发生支座转动(大小为 Z_1)的情况,其弯矩图同样可用力法求得。设以 R_{1P} 表示基本结构由于荷载单独作用时在附加刚臂上产生的反力偶(见图 9-1(d)), R_{11} 表示基本结构由于发生转角 Z_1 而在附加刚臂上产生的反力偶(见图 9-1(e))。则当荷载 q 与转角 Z_1 共同作用时,基本结构的附加刚臂上的反力偶 R_1 应等于上述两项之和,即 $R_1 = R_{11} + R_{1P}$ 。但由于此时基本结构的受力变形情况已与原结构相同,故知基本结构节点 B 处附加刚臂上的反力偶 R_1 应等于零。据此,可建立解算转角 Z_1 的方程如下

$$R_{11} + R_{1P} = 0$$

如令 r_{11} 表示当 Z_1 为单位转角 $Z=1$ 时附加刚臂上的反力偶(如图 9-2 所示),则有 $R_{11} = r_{11} Z_1$, 故上述方程可写为

$$r_{11} Z_1 + R_{1P} = 0$$

这一方程称为位移法的典型方程。式中,系数 r_{11} 和自由项 R_{1P} 的方向都规定与 Z_1 方向相同时为正,反之为负。故知 r_{11} 总是正值。

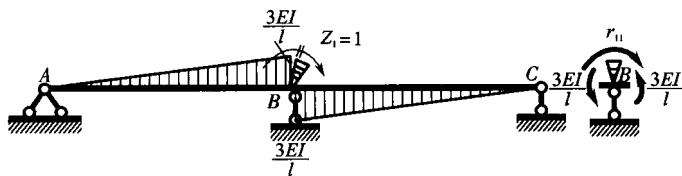


图 9-2 附加刚臂上反力偶的计算

为求解典型方程,必须分别求其系数和自由项,为此,取图 9-2 的节点 B 为隔离体,由力矩平衡条件可得

$$r_{11} = \frac{3EI}{l} + \frac{3EI}{l} = \frac{6EI}{l}$$

再取图 9-1(d)的节点 B 为隔离体,由力矩平衡条件可得

$$R_{1P} = -\frac{ql^2}{8}$$

负号表示 R_{1P} 的方向与 Z_1 的方向相反。

将系数和自由项代入位移法典型方程,得

$$\frac{6EI}{l} Z_1 - \frac{ql^2}{8} = 0$$

故

$$Z_1 = \frac{ql^3}{48EI}$$

求出 Z_1 后,根据叠加原理 $M = M_1 + M_P$ 即可求出原来结构的最后弯矩图,如图 9-3(a)所示。由此弯矩图再依静力平衡条件可作出其剪力图,如图 9-3(b)所示。

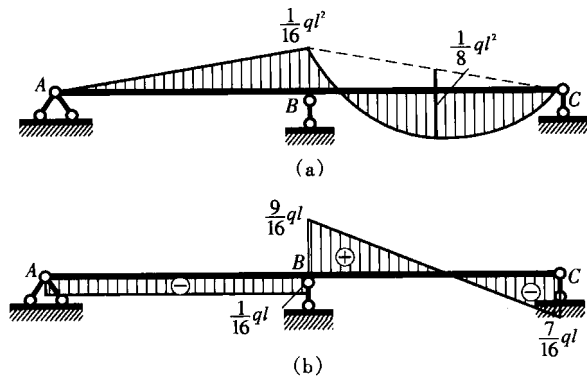


图 9-3 结构的内力图

(a) 结构的最后弯矩图; (b) 结构的最后剪力图

综上所述,位移法的基本思路是“先固定后放松”。“先固定”是指在原结构产生位移的节点上设置附加约束,使节点固定,从而得到由单跨超静定梁的组合物组成的基本结构,然后加上原有的外荷载;“后放松”是指人为地迫使原先被“固定”的节点恢复到结构原有的位移。通过上述两个步骤,使基本结构与原结构的受力和变形完全相同,从而可以通过基本结构来计算原结构的内力和变形。

由上例可知,用位移法计算超静定结构,是把结构的某些位移作为基本未知量,由位移法典型方程求出基本未知量,进而即可解算结构的内力和其他位移。比较力法和位移法可以看出,两者所取途径虽然不同,但它们所遵循的原则却是一致的:都是利用基本结构的变形和受力情况与原结构相同的条件来解题。其中,力法通常是以静定结构作为其基本结构,利用已知的静定结构的计算方法来解决超静定结构的计算问题;而位移法则是以单跨超静定梁的组合物作为它的基本结构,利用已知的力法作为其计算基础。为满足基本结构与原结构一致的条件,力法是通过去掉多余联系处的约束且以多余力代之,并使该多余力的大小能保证基本结构的变形与原结构一致,从而达到内力一致;而位移法则是使附加约束处发生与原结构相同的位移,使基本结构与原结构的变形一致,从而达到内力一致。值得指出的是:位移法的典型方程虽然是按静力平衡条件建立的,但是这并不意味着解算超静定结构无须利用位移条件,因为整个计算过程是在符合结构的约束条件的情况下进行的,而且计算位移法方程中的系数和自由项时又需借助力法,所以按位移法求解仍然离不开变形条件。

9.2 基本未知量数目的确定

上节介绍了位移法的基本概念,用位移法解算超静定结构是以节点位移为基本未知量,由位移法典型方程先将基本未知量求出,然后再计算各杆的内力。因此,在用位移法计算超静定梁和刚架时,必须首先确定基本未知量的数目,亦即确定节点位

移的数目。9.1节中列举的两跨连续梁,只有一个节点角位移,这是最简单的情况。在一般情况下,节点位移分为节点角位移和节点线位移两类,前者系指刚节点的角位移,后者则是指刚节点或铰节点的线位移。下面举几个例子加以说明。

如图9-4所示的刚架,在荷载作用下,其变形情况如图中虚线所示,其上A、B为固定端,既没有节点角位移,也没有节点线位移,而刚节点C、D则除发生转角外,还将发生线位移。“受弯直杆两端之间的距离在变形后保持不变”的假定,是确定独立节点线位移数目的依据。在图9-4(a)所示的刚架中,根据上述假定,除具有两个节点角位移 φ_C 和 φ_D 外,还有一个节点线位移 $\Delta_C = \Delta_D = \Delta$ 。在节点C、D加入控制刚节点转动的附加刚臂,在节点D(或C)处加入一根附加链杆以控制节点的水平线位移,如图9-4(b)所示。这样,C、D节点受附加约束的作用就不再发生移动和转动,AC、CD、DB都转化为单跨超静定梁,与此同时也组成了位移法的基本结构。如果使基本结构承受与原结构相同的荷载,并使附加联系(刚臂和链杆)发生与实际情况相同的转角和线位移,则其受力和变形情况便与原结构相同,而在附加联系上则不应有任何反力偶和反力。据此,便可列出位移法典型方程,求解方程即可确定节点的转角和线位移,进而求出各杆的内力。

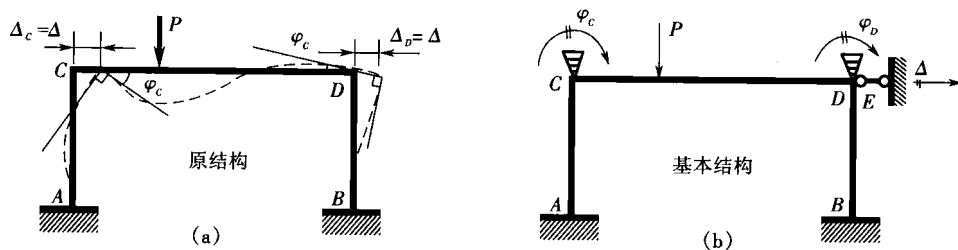


图9-4 位移法分析刚架结构

(a) 刚架在荷载作用下的变形; (b) 位移法的基本结构

由上可看出,可以把确定基本未知量的数目与选定位移法的基本结构结合起来同时进行。因为将原来结构转化为基本结构时,为了使各杆都转化为两端固定或一端固定另一端铰支的单跨超静定梁,应在每一刚节点上加入附加刚臂以控制其转动,有几个刚节点就应加入几个附加刚臂,显然,附加刚臂的数目恰好等于结构中刚节点的数目。此外,还需加入一定数量的附加链杆以阻止各节点发生线位移,有几个独立节点线位移就应加入几个附加链杆,显然,附加链杆的数目也等于原结构各节点的独立线位移数目相等。由此可见,位移法中基本未知量的数目就等于基本结构上所应具有的附加联系的数目。因此,在选定基本结构的同时,基本未知量的数目也就确定了。

确定基本结构所需附加刚臂的数目是很容易的,因为在原结构上,凡属各杆互相刚结的节点,都应加入一附加刚臂,故刚节点的数目就是所需附加刚臂的数目,即为节点角位移的数目。

必须指出,在结构中有些节点虽然也有节点角位移或节点线位移,但由于分析内力时不需要先计算出该位移,因而不必将它列入基本未知量内,以减少计算工作量。如图 9-5(a)所示结构中,对 CD 与 DE 杆而言, D 节点为刚节点,也有转角位移,但由于 CDE 部分可以转化为 D 端铰支并在端部作用有已知外力(可根据静定外伸段 DE 上的荷载,利用平衡条件求出)的超静定梁,这样,便不需以 D 节点的角位移为基本未知量,而该结构的基本未知量就只有 C 节点的角位移 φ_C 和水平线位移 Δ_C 了。又如图 9-5(b)所示结构中, EF 附属部分为一静定简支梁,由其上荷载所致的作用于 BD 杆之 E 处的外力,先利用平衡条件求出后,可径直将 BD 视作基本结构中的一个杆件,所以分析此结构内力时,不需计算 E 节点的角位移及线位移,因而 E 节点的角位移及线位移就不作为基本未知量。同理,图 9-5(c)所示结构中,只有 C 节点的角位移及水平线位移共两个基本未知量。

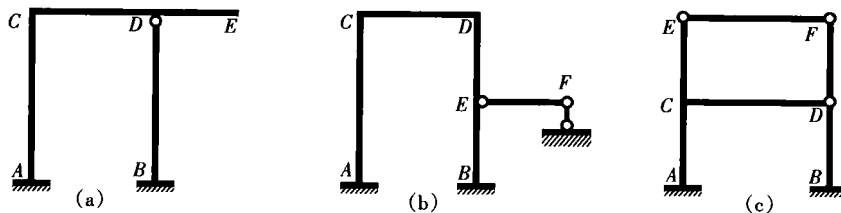


图 9-5 不作为基本未知量的节点位移

(a) D 节点的角位移; (b) E 节点的角位移及线位移; (c) 只有 C 节点的位移作为基本未知量

由于在确定节点线位移数目的过程中,不计及杆件的轴向变形和弯曲变形,因此在计算节点线位移的数目时,可以先把所有的刚性节点和固定支座全部改成铰接,使结构变成一个铰接体系。然后分析该铰接体系的几何组成,如果它是几何不变的,说明结构无节点线位移;相反,如果铰接体系是几何可变的,再看最少需要增设几根附加支杆才能确保体系成为几何不变。或者说使铰接体系上每个节点成为不动点,所增设附加支杆的数目即为结构独立的节点线位移的数目。如图 9-6(a)所示的结构,把其所有的刚性节点和固定支座改成铰接后,则变为如图 9-6(b)所示的铰接体系。

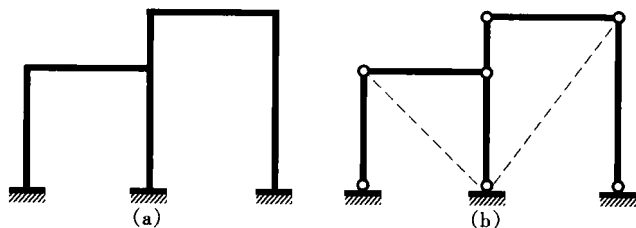


图 9-6 确定独立的节点位移数

(a) 原结构; (b) 虚线为节点线位移数

由几何组成分析可知,该体系是几何可变的,至少需要在上层横梁联结的节点和下层横梁联结的节点处分别加一支杆(如图中虚线所示),才能使体系由几何可变成几何不变(实际上成为一个简单桁架),由此判定原结构有两个独立的节点线位移。结构基本未知量的总数等于节点的角位移数和线位移数之和,如图 9-6(a)所示,结构有四个节点角位移和两个节点线位移,总共有六个位移基本未知量。

图 9-7(a)所示的刚架有 B 、 C 、 D 和 G 四个刚性节点,即有四个角位移。图 9-7(b)所示为原刚架相应的铰结体系,按几何组成分析,至少要在节点 B 和 G 处加上两根水平支杆后,方可使该体系成为几何不变。所以,原结构有两个独立的节点线位移,加上四个角位移,总共有六个位移基本未知量。

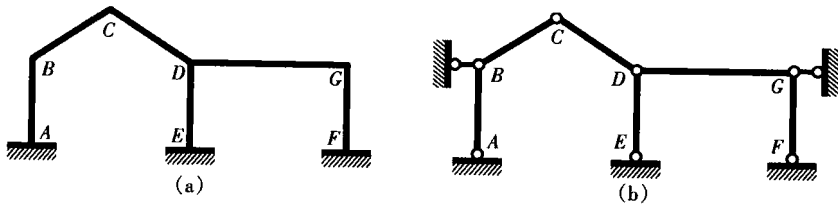


图 9-7 确定独立的节点位移数

(a)原刚架有四个角位移;(b)两个节点线位移

图 9-8(a)所示刚架有两个节点角位移,其相应的铰结体系如图 9-8(b)所示,需要在节点 F 和 H 处增设两根支杆后,体系由几何可变才能成为几何不变,所以原刚架有两个独立节点线位移。

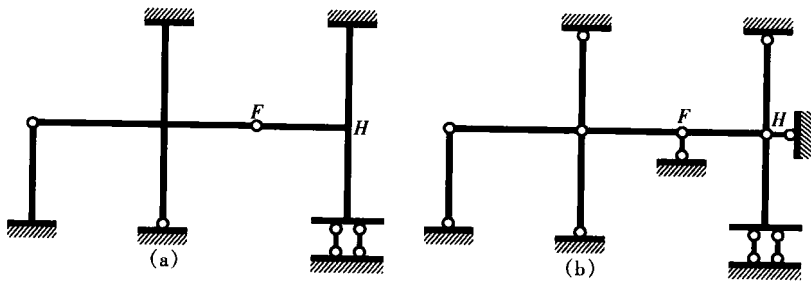


图 9-8 确定独立的节点位移数

(a)两个节点角位移;(b)两个节点线位移

图 9-9(a)所示刚架中,横梁 EH 具有无限刚性,在外力作用下只能平移而无转动,所以节点 E 和 H 只作水平移动而转角为零。这样,刚架只有节点 D 和节点 G (因柱 FH 的上段和下段的刚度不同,因而把 G 视为节点)两个未知角位移。刚架的铰结体系如图 9-9(b)所示,需要在节点 G 、 H 和 D 处各加上一水平支杆,才可成为几何不变体系。所以原刚架有三个独立节点线位移。

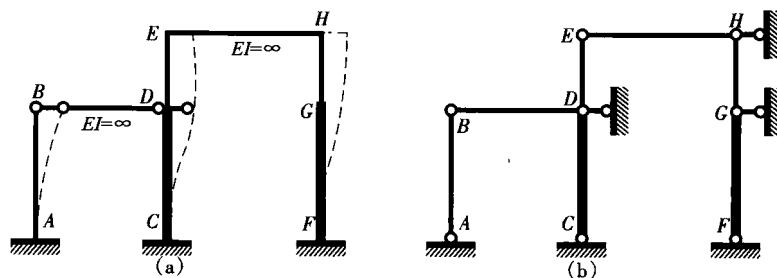


图 9-9 确定独立的节点位移数

(a) 确定角位移; (b) 确定线位移

图 9-10(a)所示刚架中具有阴影部分的刚度为无限刚性,它只能平动而不能转动,故节点 E 、 F 和 H 的角位移均为零,于是刚架只有 B 、 C 两个刚节点的角位移。图 9-10(b)为刚架的铰结体系,只要在节点 B 处加上一支杆,体系即成为几何不变。所以原刚架只有一个线位移。

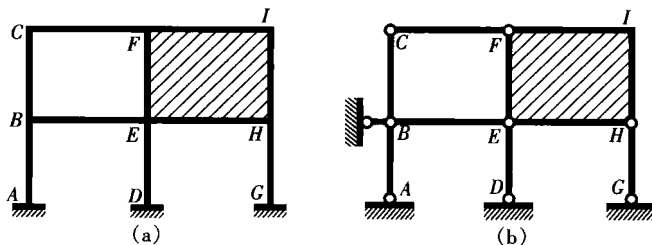


图 9-10 确定独立的节点位移数

(a) 确定角位移; (b) 确定线位移

应当指出,上述确定节点线位移数目的方法,是以不考虑受弯直杆的轴向变形为前提的。对于二力杆(即链杆)必须考虑轴向变形。因此,当确定图 9-11(a)所示刚架的线位移数目时,在其相应的铰结体系(见图 9-11(b))中, DF 和 GH 为二力杆,因而要加上三根支杆后,才能使每个节点成为不动点(即几何不变)。所以原刚架具有三个线位移。

在刚架中,如果具有弹簧支承,确定位移未知量数目时,必须计及弹簧支承的位移。如图 9-12(a)所示刚架,支座 A 为铰弹簧、支座 D 为线弹簧,在外力作用下,铰弹簧要发生转动,是一个未知的角位移。因此,原刚架共有两个角位移。图 9-12(b)所示为刚架的铰结体系,必须在 D 处加上一支杆,才能使每个节点成为不动点。所以刚架只有一个线位移。

对于桁架结构而言,每个节点具有两个线位移,每一支杆为一个约束,相当于减少一个位移。若以 j 表示桁架的节点数,以 S 表示支杆数,于是在考虑杆件轴向变形的情况下,桁架的节点位移总数为

