经济管理数学基础

习题解答

石治华　李进级
赵素葵　雒兴华　编著

JGSJ

安徽人民出版社

经济管理数学基础

习题解答

石治华　　李进级
赵素葵　　雒兴华　编

安徽人民出版社

经济管理数学基础习题解答

石治华　李进级
赵素葵　雒兴华　编

安徽人民出版社出版发行

安徽六安新华印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：6.375　字数：140千字

1989年 8 月第 1 版　　1989年 [illegible] 月第 2 次印刷

印数：6100—10100

ISBN7-212-00255-0/F·53　　定价：2.55元

前 言

这是一本习题解答集，是为了与江丕林同志主编的《经济管理数学基础》一书相配套而编写的。

参加本习题解答编写的有四名同志（按姓氏笔划为序）石治华（习题十一、习题十二）、李进级(习题八、九、十)、赵素荚（习题一至五）、雒兴华（习题六、七）。最后，由石治华、李进级同志统稿。

江丕林副教授、王永烈副教授对本书进行了审定。

由于编者学识水平及教学水平有限，题解中难免会有错误及不妥之处，敬希读者提出宝贵意见。

编 者

一九八九年三月于天津

目　录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

习　题　一

一、设函数$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求$f(0)$，$f(-x)$，$f(x)+1$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$。

解：$f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{(1-x)+(1+x)}{1+x}$$

$$=\frac{2}{1+x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{x-1}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}$$

二、函数$f(x)$满足什么条件时，下列各式才有意义。

1．$y=\dfrac{1}{f(x)}$　当$f(x)\neq 0$时，有意义。

2．$y=\sqrt[n]{f(x)}$（n为偶数）当$f(x)\geqslant 0$时，有意义。

3．$y=\log_a f(x)$　当$f(x)>0$时，有意义。

4. $y=\arcsin f(x)$ 当$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$时，有意义。

5. $y=\arccos f(x)$ 当$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$时，有意义。

6. $y=\operatorname{tg} f(x)$ 当$f(x)$为实数，且$f(x)\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k$为整数）时，有意义。

7. $y=\operatorname{ctg} f(x)$ 当$f(x)$为实数，且$f(x)\neq k\pi$，（k为整数）时，有意义。

三、求下列函数的定义域：

1. $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$

解：$x\neq 0$，$1-x^2\geqslant 0\rightarrow x^2\leqslant 1\Longrightarrow |x|\leqslant 1$。

∴定义域是$[-1, 0)$和$(0, +1]$

2. $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

解 $y=\dfrac{2x}{(x-1)(x+2)}$ $x\neq 1$，$x\neq 2$，x为实数

∴定义域是 x为实数且$x\neq 1$ $x\neq 2$

即$(-\infty, 1)$、$(1, 2)$和$(2, +\infty)$

3. $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$

解：$-1\leqslant\dfrac{x-3}{2}\leqslant 1\Rightarrow -2\leqslant x-3\leqslant 2$

$\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant 5$

∴定义域为$[1, 5]$

4. $y=\sqrt{\log_2(x-4)}$

解：$\begin{cases}\log_2(x-4)\geqslant 0\\ x-4>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 5\\ x>4\end{cases}$

$\therefore$定义域是$[5, +\infty)$

5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{64-x^2}}+\lg\sin x$

解：由$64-x^2>0 \Rightarrow x^2<64 \Rightarrow |x|<8$

由$\sin x>0 \Rightarrow 2k\pi<x<(2k+1)\pi$（$k$为整数）

$\therefore x$的定义域是$(-2\pi, -\pi)$、$(0, \pi)$和$(2\pi, 8)$

四、求下列函数的反函数，分别写出已知函数及其反函数的定义域和值域：

1. $y=\sqrt[3]{x^2+1}$

解：已知函数定义域x为实数，值域$y\geqslant 1$即$[1,+\infty)$

反函数：由$x^2+1=y^3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y^3-1}$得$y=\pm\sqrt{x^3-1}$

在$(-\infty,0]$取$-\sqrt{y^3-1}$，在$[0,\infty)$取$+\sqrt{y^3-1}$。若在$(-\infty, +\infty)$内，则不存在反函数，因为不是一一对应，必按区间分$(-\infty, 0]$或$[0, +\infty)$，所以x的定义域是$[1, \infty)$，y的值域为实数。

2. $y=3^{2x+5}$

解：已知函数定义域：$x\in(-\infty, +\infty)$，值域$y\in(0, +\infty)$

反函数是$x=\dfrac{1}{2}\log_3 y-\dfrac{5}{2}$即$y=\log_3\sqrt{x}-\dfrac{5}{2}$

反函数的定义域$x\in(0, +\infty)$；

值　域$y\in(-\infty, +\infty)$.

五、判断下列函数的奇偶性：

1. $y=x^4-2x^2$

解：$\because f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2$

$=x^4-2x^2=f(x)$

故$y=x^4-2x^2$是偶函数。

2. $y=x-x^3$

解：∵ $f(-x)=(-x)-(-x)^3=-x+x^3$

$=-(x-x^3)=-f(x)$

∴ $y=x-x^3$是奇函数。

3. $y=2x$

解：∵ $f(-x)=-2x=-f(x)$

∴ $y=2x$是奇函数。

4. $y=x^2\cos x$

解：∵ $f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x$

$=f(x)$

∴ $y=x^2\cos x$是偶函数。

5. $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$

解：∵ $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$

$=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})$

$=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}$

$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$

∴ $y=\log a(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数。

6. $y=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$

解：∵ $f(-x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{-(e^{-x}-e^x)}{2}=-f(x)$

∴ $y=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$是奇函数。

六、写出下列函数的复合过程：

1. $y=(1+x)^5$

解：函数$y=(1+x)^5$是由函数$y=u^5$和函数

$u=1+x$ 复合而成。

2. $y=\lg\sqrt{1+x}$

解：函数 $y=\lg\sqrt{1+x}$ 是由 $y=\lg u$，$u=\sqrt{v}$ 及 $v=1+x$ 复合而成。

3. $y=2^{x+1}$

解：函数 $y=2^{x+1}$ 是由 $y=2^u$ 和函数 $u=x+1$ 复合而成。

4. $y=\sin^3 5x$

解：函数 $y=\sin^3 5x$ 是由 $y=u^3$，$u=\sin v$ 及 $v=5x$ 复合而成。

5. $y=2\sin^2(3x-2)$

解：函数 $y=2\sin^2(3x-2)$ 是由 $y=2u^2$，$u=\sin v$ 及 $v=3x-2$ 复合而成。

6. $y=[\arccos(1-x^2)]^5$

解：函数 $y=[\arccos(1-x^2)]^5$ 是由 $y=u^5$，$u=\arccos v$ 及 $v=1-x^2$ 复合而成。

7. $y=[\lg\sin(x^2-1)]^2$

解：函数 $y=[\lg\sin(x^2-1)]^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\lg v$ $v=\sin w$ 和 $w=x^2-1$ 复合而成。

七、由下列函数的复合过程写出以x为自变量的函数解析式。

1. $y=u^2$，$u=\sin x$

解：$y=\sin^2 x$

2. $y=u^3$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$

解：$y=(\sqrt{x^2+1})^3$

3. $y=\ln u$，$u=v^2+1$，$v=\cos x$

解：$y=\ln(\cos^2 x+1)$

4. $y=c^u$，$u=v^2$，$v=\mathrm{ctg}\,x$.

解: $y=e^{\mathrm{ctg}^2 x}$

六 求下列各极限:

1. $\lim\limits_{x\to-1}(2x^3-3x+7)$

解: $\lim\limits_{x\to-1}(2x^3-3x+7)=\lim\limits_{x\to-1}2x^3-\lim\limits_{x\to-1}3x+\lim\limits_{x\to-1}7$

$$=-2-(-3)+7=8$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}+\frac{1}{x^2}$

$$=2-0+0=2$$

3. $\lim\limits_{x\to2}=\frac{x^2+5}{x-3}$

解: $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to2}(x-3)}=\frac{9}{-1}=-9$

4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

解: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to1}x(x+1)}=\frac{0}{2}=0$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

解: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=1$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2+5}{x^5+3x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^5}}{1+\frac{3}{x^4}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^4}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x+2x^3}{1+x^2+3x^3}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+2}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3}=\frac{2}{3}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x}{3x^2+x+1}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\infty-0}{3+0+0}=\frac{\infty}{3}=\infty$$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x-x^2}{(x-1)(1+x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x^2+x-2)}{-(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)(x+2)}{-(x-1)(x^2+x+1)}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=\dfrac{3}{1+1+1}=1$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2++3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+n^2}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+n^2-n^2-2n}{2(n+2)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2n+4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{2+\frac{4}{n}}$

$=-\dfrac{1}{2}$

九、利用两个重要极限求解下列各题：

1. $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\dfrac{\sin x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$$=-1\times 1=-1$$

2\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$

解：原式 $=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4$

3\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{1}{3}$

4\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2+x^3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2(3+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{2}{(3+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{x+3}$$

$$=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

5\. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}$

$$=\lim_{\frac{x-a}{2}\to 0}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}$$

$$=1\cdot\cos a=\cos a$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{3}$

$=e\cdot 1=e$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x})^{x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{1}{x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+8x\right)^{\frac{1}{8x}\cdot 8}$

$=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{1}{8x}}\right]^{8}$

$=e^{8}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$

解：原式$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{4}}\right)^{-\frac{x}{4}}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$

解：原式$=\lim\limits_{x-1\to 0}\left[1+(x-1)\right]^{\frac{1}{x-1}}=e$

十、判断下列各函数是否为无穷大量或无穷小量：

1. $x\to 0$ $\frac{1+2x}{x^{2}}$

解：$\because y=\frac{1+2x}{x^{2}}=\frac{1}{x^{2}}+\frac{2}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=\infty$$

∴函数 $y=\frac{1+2x}{x^2}$ 是无穷大量

2. $x\to 3 \quad \frac{x+1}{x^2-9}$

解：∵ $\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{\lim_{x\to 3}(x+1)}{\lim_{x\to 3}(x^2-9)}=\frac{4}{0}=\infty$

∴ $\frac{x+1}{x^2-9}$ 是无穷大量

3. $x\to 0$，$2^{-x}-1$

解：$\lim_{x\to 0}(2^{-x}-1)=0$ ∴$2^{-x}-1$ 是无穷小量

4. $x\to 0 \quad \ln x=y$

解：$\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ 即 $|y|=\infty$

∴ $\ln x$ 是无穷大量

5. $x\to 0 \quad \frac{\sin x}{1+\sec x}$

解：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\sec x}=\frac{\lim_{x\to 0}\sin x}{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}=\frac{0}{2}=0$

∴ $\frac{\sin x}{1+\sec x}$ 是无穷小量

十一、已知 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$，$\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$

设 $\alpha=x-1 \qquad \beta=x^2-1$

证明：当 $x\to 1$ 时 α、β 为同阶无穷小。

证明：∵ $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$ 是常数

即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha}{\beta}$是常数

$\therefore \alpha$与β是同阶无穷小量

十二、当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 与

1．$1-\sqrt[3]{x}$ 2．$2(1-\sqrt{x})$**是否为同阶？是否为等价**

解：1．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt[3]{x})[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{1-\sqrt[3]{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]=3$

$\therefore 1-x$ 与$1-\sqrt[3]{x}$是同阶无穷小量

2．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{2(1-\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(1-\sqrt[3]{x})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+\sqrt{x})}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

$\therefore$ $1-x$ 与$2(1-\sqrt{x})$是等价无穷小量

十三、求下列各题中自变量的增量和函数的增量：

1． $y=x^2+2x+5$当 x 由 2 变到2.01时

自变量的增量：$\Delta x=2.01-2=0.01$

函数的增量：$\Delta y=f(2.01)-f(2)$

$=[(2.01)^2+2\times 2.01+5$

$-(2^2+2\times 2+5)$

$=0.0401+0.02=0.0601$

2．$y=\sqrt{x+1}$当 x 由 3 变到2.8时

自变量的增量：$\Delta x=2.8-3=-0.2$

函数的增量：$\Delta y=\sqrt{2.8+1}-\sqrt{3+1}$

$=1.95-2=-0.05$