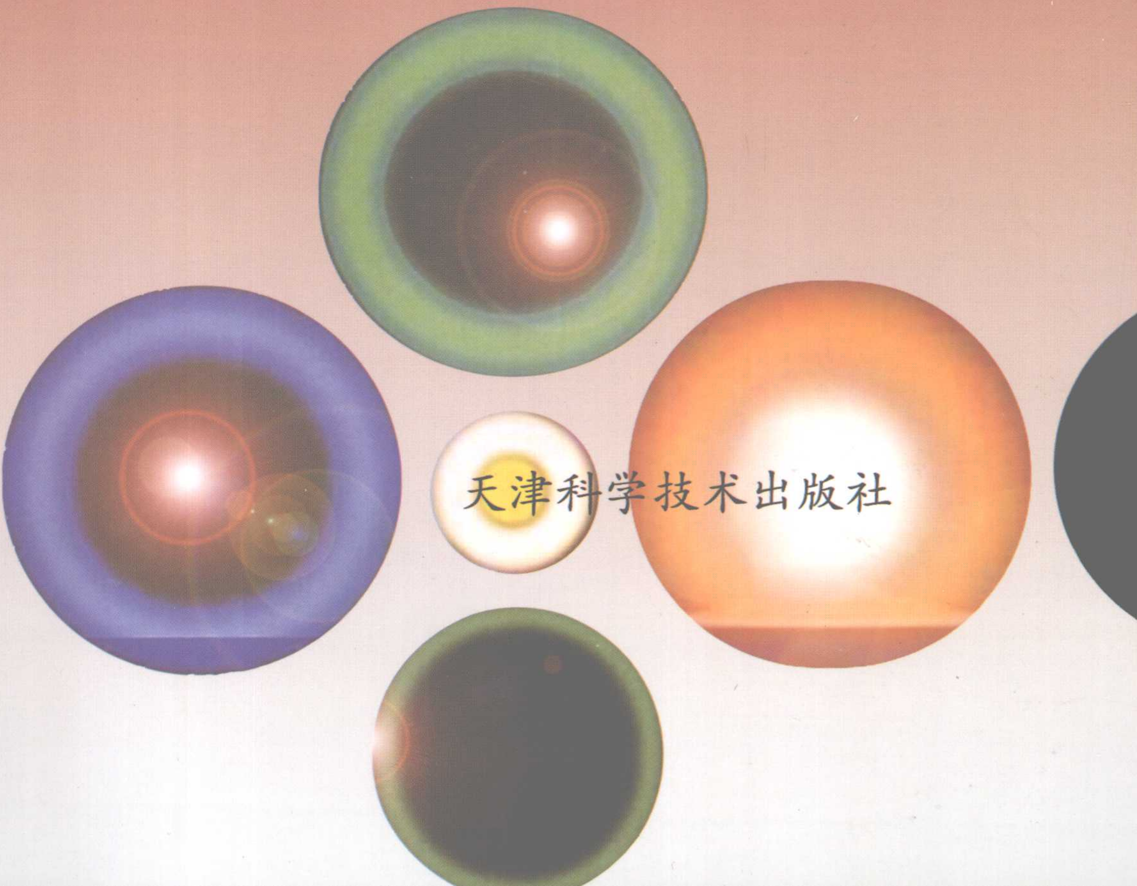
模糊推理方法及模糊系统的逼近性能

侯健 苑飞 著



天津科学技术出版社

模糊推理方法及模糊系统的逼近性能

侯健　苑飞　著

天津科学技术出版社

内容简介

本书主要内容是作者近年来的研究成果．全书围绕有关模糊系统的三个研究方向展开详细讨论，比较和分析了目前常用的模糊推理算法，即CRI算法、三I算法以及反向三I算法；研究了基于CRI算法和三I算法构造的模糊系统的逼近性能；阐述了基于模糊熵三I算法构造的模糊系统的概率论意义，并分析了其逼近性能．

本书可作为系统工程、自动控制专业研究生的教材和参考书，也可供应用数学及有关专业的高年级本科生使用．

图书在版编目（CIP）数据

模糊推理方法及模糊系统的逼近性能/侯健，苑飞著．—天津：天津科学技术出版社，2009.01

ISBN 978-7-5308-4799-2

Ⅰ.模… Ⅱ.①侯…②苑… Ⅲ.模糊系统—研究 Ⅳ.N94

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第143827号

责任编辑：王 祯

责任印制：王 莹

天津科学技术出版社出版

出版人：胡振泰

天津市西康路35号 邮编300051

电话（022）23332400（编辑室） 23332393（发行部）

网址：www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

廊坊市文峰档案印务有限公司

开本 787×960 1/16 印张 12 字数 220 000

2009年1月第1版第1次印刷

定价：25.00元

前 言

1965 年 Zadeh 创立了模糊集合论，基于模糊集合论形成了一门新学科—模糊系统理论. 四十多年来，模糊系统理论的研究受到广泛的重视，其应用范围遍及理、工、农、医及社会科学等众多的领域.

本书将围绕有关模糊系统的三个研究方向展开详细讨论，研究内容主要分为三个部分. 第一部分是对 CRI 算法、三 I 算法以及反向三 I 模糊推理算法进行比较和分析. 第一，给出三类常用蕴涵算子的三 I FMP 与 FMT 算法. 第二，针对这三类蕴涵算子，研究和比较了 CRI 算法和三 I 算法的还原性、连续性以及逼近性. 第三，对反向三 I 算法进行了详细的讨论. 第二部分是对基于 CRI 算法和三 I 算法构造的模糊系统的逼近性能进行研究. 当模糊系统具有插值性时，它必具有泛逼近性. 本书通过研究模糊系统的插值性来揭示其逼近性能.首先，给出了由 CRI 算法构造的两类模糊系统具有插值逼近性的充要条件; 其次，分析了由三 I 算法构造的一些模糊系统的逼近性能; 第三部分阐述了基于模糊熵三 I 算法构造的模糊系统的概率论意义，并分析了其逼近性能.

非常感谢大连理工大学李洪兴教授对本书提出许多好的建议和指导，特别感谢米洪海教授对本书的推荐出版.

因作者水平所限，书中的错误和疏漏难免，敬请读者批评指正.

侯 健 苑 飞

2008 年于珠海

目　录

第一章　绪论

本章首先阐述模糊系统的产生背景及模糊系统的构造；然后围绕有关模糊系统的三个研究方向展开讨论，其中包括模糊推理算法、模糊系统的逼近性以及不确定性系统的统一；最后，由研究背景引出本书的研究问题，介绍本书的主要内容和各章节的安排.

1.1 模糊系统的产生、发展与研究现状

众所周知，正是由于对大量不确定性系统的思考， Zadeh[1] 于 1965 年提出模糊集的概念，利用模糊集形成模糊推理，从而可以近似表达一个系统 [2–5]. 这种基于模糊推理形成的系统通常称为模糊系统. 以模糊系统为对象的研究工作受到广泛的关注 [6–13].

1.1.1 模糊系统产生的背景

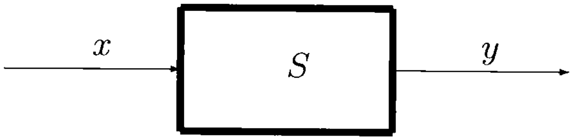


图 1. 单输入单输出开环系统

首先从模糊系统产生的背景谈起. 图 1 表示一个单输入单输出开环系统. 输入变量 x 在输入论域 X 中取值，输出变量 y 在输出论域 Y 中取值. 如果该系统 S 是个确定性系统，我们可以采用常规方法建立系统 S 的模型 (如用机理建模法建立微分方程模型)，再用解析方法或数值方法获得该模型的解 $y(x)$，这样则认为已经基本掌握了该系统 (更深入的问题是该系统的定性问题：能控性、能观性、稳定性等等). 这时系统 S 可以简单地理解为一个函数关系，记为 s，即

$$s: X \to Y, \quad x \mapsto y \stackrel{\triangle}{=} s(x). \tag{1.1}$$

然而，面对一个不确定性系统，我们无法用常规的方法建立系统 S 的"准确的"数学模型 (通常指微分方程模型)，从而也就很难得到函数关系 (1.1). 这说明要直接得到确切的点 $x \in X$ 到确切的点 $y \in Y$ 的对应关系，对于该不确定性系统 S 来说，要求太高了. 索性降低要求，先设法得到"粗糙的"点 $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{F}(X)$ 到"粗糙的"点 $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}(Y)$ 的对应关系，记为 s^*，即

$$s^* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \quad A \mapsto B \triangleq s^*(A). \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{F}(X)$ 与 $\mathcal{F}(Y)$ 分别为论域 X 与 Y 上的模糊集全体， $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 分别为 X 与 Y 上的一部分模糊集组成的集类. 显然，函数 s^* 只是 $\mathcal{F}(X)$ 中一些"稀疏分布的"代表点到 $\mathcal{F}(Y)$ 中一些"稀疏分布的"代表点之间的对应关系，还不足以满足要求 (用系统的观点讲是指在某些输入下系统会出现无响应现象). 故待得到 s^* 后再把 s^* 扩展为 $\mathcal{F}(X)$ 到 $\mathcal{F}(Y)$ 之间的函数关系，记为 s^{**}，即

$$s^{**} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y), \quad A \mapsto B \triangleq s^{**}(A). \tag{1.3}$$

有了 s^{**} 后，应想办法把 s^{**} 转化为确切的点 $x \in X$ 到确切的点 $y \in Y$ 的一个对应关系，记为 $\overline{s}$，即

$$\overline{s} : X \to Y, \quad x \mapsto y \triangleq \overline{s}(x). \tag{1.4}$$

如果该方法是"恰当的"，我们便把函数 $\overline{s}(x)$ 作为函数 $s(x)$ 的近似. 这样一来，我们认为已经基本掌握了该不确定性系统 S. 对于不确定性系统 S，虽然我们不能通过常规的方法获得表示该系统的函数关系 $s(x)$，但我们绕了一个大弯子：把清晰的函数关系 $s(x)$ 作为预设目标，先设法得到"粗糙的"函数关系 $s^*(x)$，将其扩展为 $s^{**}(x)$ 后再到清晰的函数关系 $\overline{s}(x)$. 从模糊系统的构造来看，无非就是要得到一个清晰的函数关系.

自然，人们要问，如果有某种方法能实现上述从 $s^*(x)$ 到 $\overline{s}(x)$ 的转化过程，那么我们采用的方法是否恰当？换言之， $\overline{s}(x)$ 是否可以很好地逼近 $s(x)$？这便是研究 Fuzzy 系统泛逼近性的源头.

1.1.2 模糊系统的构造

先讨论函数 s^* 的构造. 为讨论方便，把输入论域 X 与输出论域 Y 限制在一维实空间 R 中, 即 $X, Y \in \mathcal{B}^1$, 这里 $\mathcal{B}^1$ 为一维 Borel σ- 域. 取 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(x)$，$\mathcal{B} \subset \mathcal{F}(Y)$，其中 $\mathcal{A} \triangleq \{A_i\}_{(1 \leqslant i \leqslant n)}$, $\mathcal{B} \triangleq \{B_i\}_{(1 \leqslant i \leqslant n)}$. 视 $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ 为语言变量,

由此形成 n 条推理规则：

$$\text{if } x \text{ is } A_i \text{ then } y \text{ is } B_i,\ \ i=1,2,\cdots,n. \tag{1.5}$$

相对于语言变量 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 而言， $x \in X, y \in Y$ 叫做基础变量. 于是得到如下函数：

$$s^*: \mathcal{A} \to \mathcal{B},\quad A_i \mapsto s^*(A_i) \triangleq B_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.6}$$

再看如何获得函数 s^{**}. 在 (1.5) 式中，第 i 条推理规则的真域为 X 到 Y 的模糊关系 $\overline{R}_i(x,y)$, 它由某个模糊蕴涵算子 R 来确定：其中 $\overline{R}_i(x,y) \triangleq R(A_i(x),(B_i(y))$. 这 n 条规则之间自然用 “或 ”(它对应集合运算 “并 ”) 来联结，因此 n 条规则总的真域为 $\overline{R} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{R}_i$ ，即

$$\overline{R}(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} \overline{R}_i(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} R(A_i(x),B_i(y)). \tag{1.7}$$

给定 $A \in \mathcal{F}(X)$ ，根据 CRI 算法得到的推理结果 $B \in \mathcal{F}(Y)$, 即

$$B(y) = \sup_{x\in X}\{A(x) \wedge \overline{R}(x,y)\},\ y \in Y. \tag{1.8}$$

目前，有许多种模糊推理算法可供选择. 当然根据不同的模糊推理算法，得到的推理结果可能不同.

最后考虑函数 $\bar{s}$ 的构造. 对于一个模糊系统，输入量为确切量，设为 $x' \in X$, 需将 x' 模糊化，如何模糊化，方法不一，目前大多采用单点模糊化，即规定单点模糊集：

$$A'(x) = \begin{cases} 1, & x = x', \\ 0, & x \neq x'. \end{cases} \tag{1.9}$$

将其代入 (1.8) 式便得到推理结果 $B' \in \mathcal{F}(Y)$. 因 B' 是个模糊集，故需经清晰化方法得到确切量 $y' \in Y$. 清晰化方法也是多种多样，李洪兴教授 [14] 证明了：若 $\int_Y |y|B'(y)\mathrm{d}y < +\infty$ 且 $\int_Y 0 < B'(y)\mathrm{d}y < +\infty$ 时，重心法是合理的. 本书中均采用 “重心法” 获得 y' ，即

$$y' = \frac{\displaystyle\int_Y yB'(y)\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{y\in Y} B'(y)\mathrm{d}y}. \tag{1.10}$$

由于 x' 是在 X 中任意选取的，在不致引起混淆的情况下，将 x' 写为 x, y' 写为 $\overline{s}(x)$ 便得到

$$\overline{s}(x)=\frac{\displaystyle\int_{Y} yB'(y)\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{y\in Y} B'(y)\mathrm{d}y}. \tag{1.11}$$

1.1.3 模糊推理

模糊推理是模拟人的日常推理的一种近似推理. 它是由 Zadeh 首先提出的. 1971 年, Zadeh[15] 引入定量的模糊语义的概念，将一个语言词解释为一个论域上的模糊集，而词的逻辑组合可用模糊集的运算来表示. 此后，Zadeh[2−5] 进一步提出语言变量、语义等价、语义近似、语言真值、推理合成规则、模糊量词的处理等一系列新思想和新方法，为建立模糊推理的理论奠定了基础. 40 年来，国内外许多学者从事这方面的研究，并取得了丰硕的研究成果 [11, 16−18]. 目前，模糊推理已成为模糊控制的理论基础，在模糊系统理论的研究中占有重要的地位.

目前存在着各种不同形式的模糊推理，对于每一种模糊推理，最基本的问题是如何由给定的前提来导出结论. 不同的学者提出了不同的方法. 首先考虑简单模糊推理，即 FMP(Fuzzy Modus Ponens) 和 FMT(Fuzzy Modus Tollens) 问题. 1975 年，Zadeh[3−5] 提出了规则合成推理算法 (Compositional Rule of Inference)，简称 CRI 算法. 此后，CRI 算法得到了各种不同形式的推广，其中 (1.8) 式中 "$\wedge$" 还可以采用更为一般的三角模 "$\top$"，同时也可选取不同的蕴涵算子 [9]. 1978 年，Baldwin[19] 提出了真值限定法. Di Nola, W.Pedrycz 和 S.Seasa 于 1985 年提出采取 $\inf - R$ 来代替 CRI 中的 $\sup - \wedge$ 合成. 1987 年，Mizumoto 提出一个扩张原理与真值转化相结合的方法，简称 Mizumoto 方法. 对于多维模糊推理和多重模糊推理都可通过前提约化和规则约简转化为简单模糊推理. 其中，在多维模糊推理中，常用的三种基于 CRI 的方法是：Zadeh 法 [20],Tsukamoto 法 [21] 和 Sugeno-Takagi 法 [22]. 而在多重模糊推理中，若想按照 CRI 算法进行推理，常用的有 Buckley 与 Hayashi 给出的 FITA(First Infer Then Aggregate) 方法和 FATI(First Aggregate Then Infer) 方法. 另外，王国俊教授 [23] 提出了通过衡量输入 A 与各 A_i 间的距离并让 A"激活 "n 条规则中前件与 A 最接近的一条规则或几条规则，然后求输出 B 的方法. 对于多重模糊推理和多维模糊推理，汪培庄等 [24] 提出

了真值流推理的模型，其具体方法也非常多，如插值法 (Zadeh[25]), 又称特征展开法 (陈永义 [26]), Yager 法 [27], 加权平均法，动态推理法 (应明生 [18]) 等. 对于上述这些模糊推理方法，吴望明 [11] 详细讨论了它们的合理性和相互关系. Baldwin 和 Pilaworth[28], Mizumoto 和 Zimmermann[29], Kiszka 等 [30, 31], 曹志强和 Kandel[32] 比较了由不同的蕴涵算子生成模糊推理方法. 然而迄今为止， Zadeh 的 CRI 算法仍是最基本、最重要的方法，并且在模糊控制中有广泛而成功的应用 [2, 3, 15–17]. 1998 年，王国俊 [33–35] 指出从逻辑语义的角度看 CRI 算法中的复合运算缺乏逻辑根据，提出了在每一步都使用蕴涵运算的全蕴涵三 I 算法. 对于 Zadeh 蕴涵算子，比较了三 I 算法与 CRI 算法. 并给出了 Wang 算子 R_0, 基于蕴涵算子 R_0 展开三 I 算法理论，给出了 FMP 和 FMT 问题的计算公式，进一步将三 I 算法一般化，提出了支持度理论. 三 I 算法不仅为模糊推理奠定了逻辑基础，而且为推理引入了优化思想. 随后，文献 [36–46] 又对三 I 算法进行了理论上的推广和完善. 在三 I 算法基础上，宋士吉 [47–49] 提出模糊推理的反向三 I 算法. 彭家寅、侯健、李洪兴 [50] 讨论了 FMP 和 FMT 问题的反向三 I 支持解的存在唯一性条件，并针对几个常见的蕴涵算子给出反向三 I 解的计算公式. 郭方芳、夏尊铨 [51] 提出了模糊熵三 I 算法. 从逻辑基础来看，三 I 算法优于 CRI 算法，但在实际控制中以三 I 算法代替 CRI 算法进行模糊推理会有什么结果，李洪兴等 [52] 研究了由 Mamdani 蕴涵算子、 Zadeh 蕴涵算子、 R_0 算子以及代数积蕴涵算子基于三 I 算法构造的模糊系统，并分析了其响应性能. 在本书中，将针对不同的蕴涵算子，对三 I 算法和 CRI 算法进行对比，并进一步研究三 I 算法在实际问题中的应用.

1.1.4 模糊系统的逼近性研究

模糊系统的逼近性是模糊系统研究的主要论题之一. 自从 1990 年以来，众多学者从不同角度出发对这一问题进行了深入而系统的讨论 (见文献 [53–95]). 综合该领域相关的主要成果，可以将其划分为两类，其一是万能逼近存在性理论，一些 Mamdani 型模糊系统是基于 Stone-Weierstrass 理论被证明是万能逼近器. 另一些学者则构造性地证明了 Mamdani 型和 T-S 型模糊系统是万能逼近器. 这方面的第一个结果由王立新 [77] 提出，他证明了带有乘积推理机、单值模糊器、中心平均解模糊器和高斯隶属函数的模糊系统是万能逼近器. 此后，加法模糊规则系统 [59, 65, 66] 、模糊输入一输出控制器 [54, 55] 、 Sugeno 模糊控制器的变型 [56] 、非单点模糊逻辑系统 [73] 、一般

Mamdani 型模糊系统 [85]、采用线性规则后项的 T-S 型模糊系统 [87]、分层模糊系统 [78] 以及其他一些模糊系统 [57, 58, 74, 91] 都被证明是万能逼近器. 进一步, 刘普寅、李洪兴 [68, 69] 证明了在积分模意义下, 广义 Mamdani 模糊系统和 T-S 型模糊系统均构成 $L_p(\mu)$ 一可积函数类的泛逼近器. 其二是逼近特性分析. 模糊系统作为万能逼近器的存在性理论表明了模糊系统的逼近能力. 为了更好地揭示模糊系统作为万能逼近器的内在机理, 一些学者从定量和定性两方面探讨了模糊系统的逼近能力和特性 [70, 85, 88, 90–92, 95]. 然而, 现有模糊系统逼近特性的研究结果都是基于一些典型的模糊系统, 这些结果是否适合于更一般的模糊系统有待于进一步的研究. 比如, 目前讨论的模糊系统大多由 Mamdani 蕴涵算子和代数积蕴涵算子基于 CRI 算法构造而成, 若用别的蕴涵算子代替 Mamdani 蕴涵算子和代数积蕴涵算子, 或改用其他模糊推理算法构造模糊系统会有什么结果呢？

我们知道, 即使一个模糊系统是万能逼近器, 但将其用于实际控制时, 逼近效果也不一定很好. 而且在实际问题中我们往往并不知道被逼近函数的解析式, 仅知道有限数量的输入输出数据对. 1997 年, 李洪兴 [96] 揭示了模糊控制器在本质上就是某种插值器, 首先阐明模糊控制的插值机理. 1998 年, 又于文献 [97] 中揭示了模糊控制的插值机理, 指出常用的几种模糊控制算法都可归结为某种插值方法 (其中包括 Mamdani 控制算法、重心法、简略推理法、函数型推理法以及特征展开推理法), 它是对响应函数的逼近. 根据模糊控制系统的插值机理, 李洪兴 [98] 进一步提出了一种模糊推理建模法, 而且通过仿真实验验证了此方法可以比较准确地反映系统的动态行为. 最近, 李洪兴 [99] 逐一讨论了由 23 个蕴涵算子基于 CRI 算法构造的模糊系统的响应性能.

本书利用文献 [96, 97] 的方法, 由不同的蕴涵算子以及模糊推理方法构造一些模糊系统, 首先得到模糊系统的输出函数, 从分析输出函数是否是插值函数入手, 进而研究模糊系统的逼近性能.

1.1.5 不确定性系统的统一

概率论已有几百年的历史, 其理论十分丰富, 应用也非常成功. 在模糊集理论出现之前, 概率论一直被认为是处理不确定性和不精确性问题的唯一方法. Zadeh 继 1965 年引入模糊集之后, 作为模糊集理论的扩展又提出了可能性理论 [100], 认为是对概率论在处理不确定性问题时的补充. 此后, 出现了许多关于可能性理论的研究 [7, 63], 同时也引发了可能性与概率

之间的争论. 可能性论者认为，模糊性与概率之间存在着差异，它们处理的不确定性的类型是不同的，但这两种理论是互补的 [101–103]. 而概率论者 Loginov[104] 认为，可以将模糊集的隶属度函数看做是主观概率. 20 世纪 80 年代，概率论者 Lindley 和 Cheeseman 借助经典之作 [105–107] 对模糊理论进行了一系列的攻击，认为模糊集理论仅是概率的另一种简单形式，概率论是描述不确定性的唯一方法，并且任何模糊理论能做的事情，概率论都能做，甚至会做得更好. 随着模糊集理论成功应用于家电和工业控制过程，概率论者的观点也逐渐发生了改变. Laviolette, Seaman, Barrett 和 Woodall 在经典之作 [108] 中并举了模糊和概率二者的模型，并比较了模糊和概率各自的优势和不足. 目前，尽管这两个学派还存在着分歧，但其变得更有合作性了.

最近，李洪兴从系统的角度概述了不确定性系统的统一性. 他首先在文献 [14] 中揭示了模糊系统的概率论意义，以重心法为切入点，将模糊系统的输入变量和输出变量的函数关系等同于两个随机变量之间的条件数学期望，即两相依随机变量的 Borel 可测函数；在此基础上，详细讨论了由 CRI 算法和三 I 算法构造的模糊系统的概率表示问题；基于不同的模糊蕴涵算子，给出了几种典型的概率分布，如 Zadeh 分布、Mamdani 分布、Łukasiewicz 分布等. 然后，通过分析模糊系统的概率分布的性质，考察对比了由 CRI 算法和三 I 算法构造的模糊系统的输出响应. 此外还刻画了均匀概率分布在模糊系统中的特殊作用. 进一步在文献 [109] 中揭示了随机系统的模糊推理意义. 首先，相对于不确定系统，给出了随机系统的定义，将它视为对一个不确定系统的逼近. 然后指出，对于任意给定的一个随机系统，总能转化为一组模糊推理规则，由此可构造一个模糊系统，并证明了这样构造的模糊系统能逼近给定的随机系统到任意指定的精度. 本书将在文献 [14] 的基础上讨论基于模糊熵三 I 算法构造的模糊系统的概率表示，并由模糊系统的概率分布函数的性质分析其逼近性能.

1.2 本书的内容和章节的安排

本书将围绕有关模糊系统的三个研究方向展开详细讨论，其中包括对 CRI 算法、三 I 算法以及反向三 I 算法的比较和研究，分析由 CRI 算法与三 I 算法构造的模糊系统的逼近性能，以及研究基于模糊熵三 I 算法构造的模糊系统的概率表示和逼近性能. 全书共分为七章，具体的内容安排如下.

第二章给出三类蕴涵算子的三 I FMP 与 FMT 算法. 其中, 第一类蕴涵算子是由偏序关系来定义的一类蕴涵, 即满足 $R(a,b)=1$, 当且仅当 $a \leqslant b$. 第二类蕴涵算子主要是由 $[0,1]$ 上的四则运算构成的一类蕴涵, 比如 Larsen 蕴涵 $R(a,b)=ab$ 等. 第三类蕴涵算子主要是一些常用蕴涵算子的对偶算子.

第三章对比和讨论了三类常用蕴涵算子与 CRI 算法和三 I 算法结合生成的各种模糊推理方法的还原性、连续性以及逼近性. 3.1 节讨论了不同蕴涵算子分别与 CRI 算法和三 I 算法结合生成的各种模糊推理方法的还原性. 在 3.2 节中进一步选用海明距离度量连续论域上两模糊集之间的距离, 在此基础上给出了 CRI 算法和三 I 算法的连续性与逼近性的定义. 然后又针对一些常用蕴涵算子, 详细研究了在连续论域上 CRI 算法和三 I 算法的连续性与逼近性问题, 并讨论了这两类算法对逼近误差的传播性能.

第四章对反向三 I 算法进行了研究. 4.1 节通过例子, 指出了 FMP 和 FMT 问题的 R_0 型反向三 I 支持算法和约束算法均无意义, 即它们的反向三 I 解不存在. 4.2 节和 4.3 节讨论了 FMP 和 FMT 问题的反向三 I 支持算法和反向三 I 约束算法解存在且唯一的充分条件, 分别给出了几个常见蕴涵算子的反向三 I 解. 进一步, 又将上述问题一般化, 给出了 FMP 和 FMT 问题的 α- 反向三 I 支持算法和约束算法解存在且唯一的充分条件. 4.4 节通过反例说明了八种 R_0 型反向三 I 确界算法有误, 并对其作了修正.

第五章研究了模糊蕴涵算子的性质对模糊系统的逼近性能的影响. 5.2 节通过分析由“并”和“交”的方式聚合推理规则所生成的两类模糊系统的一般算法, 指出了由模糊蕴涵算子构造的模糊系统的输出函数为插值函数、拟合函数、阶跃函数或不定型, 关键取决于模糊蕴涵算子 $R(a,b)$ 在 $b=0$ 和 $b=1$ 时的表达式或取值. 在此基础上, 5.3 节分别给出了两类模糊系统具有插值逼近性、拟合性和阶跃性的若干充分条件. 对于第一类模糊系统, 由给定的充分条件讨论了 271 个模糊蕴涵算子构造的模糊系统的响应能力. 其中, 有 29 个模糊蕴涵算子构造的模糊系统具有插值逼近性; 有 72 个模糊蕴涵算子构造的模糊系统的输出函数近似为拟合函数; 有 170 个蕴涵算子构造的模糊系统的输出函数为阶跃函数. 对于第二类模糊系统, 由给定的充分条件讨论了 220 个模糊蕴涵算子构造的模糊系统的响应能力. 其中, 有 47 个模糊蕴涵算子构造的模糊系统具有插值逼近性; 有 11 个模糊蕴涵算子构造的模糊系统的输出函数近似为拟合函数; 有 162 个蕴涵算子构造的模糊系统的输出函数为不定式. 5.4 节给出了这两类模糊系统具

有插值逼近性的充要条件.

第六章分析了由三 I 算法构造的一些模糊系统的逼近性能. 首先在 6.2 节中由三类模糊蕴涵算子基于三 I 算法构造了一些模糊系统; 然后在 6.3 节和 6.4 节中详细分析了单输入单输出和双输入单输出模糊系统的逼近性能. 结果表明, 只有 1 个模糊蕴涵算子基于三 I 算法构造的模糊系统具有插值逼近性, 可以用于实际控制问题; 另有 1 个模糊蕴涵算子基于三 I 算法构造的模糊系统的输出函数近似为拟合函数, 其有可能用于解决实际问题; 其余的蕴涵算子基于三 I 算法构造的模糊系统的输出函数均为阶跃函数, 该类系统没有什么应用价值, 仅有一定的理论意义.

第七章阐述了基于模糊熵三 I 算法构造的模糊系统的概率论意义, 并分析了其逼近性能. 首先在 7.2 节中由几个常用的蕴涵算子基于模糊熵三 I 算法构造了模糊系统, 并给出其概率表示. 7.3 节给出了几个常用蕴涵算子的概率分布, 进一步利用模糊系统的概率分布讨论其逼近性能.

第二章　三类常用蕴涵算子的三 I 算法

本章分别给出三类蕴涵算子的三 I FMP 与 FMT 算法. 其中，第一类是由偏序关系来定义的一类蕴涵，即满足 $R(a,b)=1$, 当且仅当 $a \leqslant b$. 第二类主要是由 $[0,1]$ 上的四则运算构成的一类蕴涵，比如 Larsen 蕴涵 $R(a,b)=ab$ 等. 第三类主要是一些常用蕴涵算子的对偶算子.

2.1 引言

模糊推理是模糊控制的理论基础，多年来吸引了大量的学者从事这方面的研究，并取得了丰硕的研究成果 [11, 16–18]. 在模糊推理的诸多形式中，最基本的形式为 FMP(Fuzzy Modus Ponens) 和 FMT(Fuzzy Modus Tollens), 其形式分别为

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \longrightarrow B \\ \text{且给定} & A^* \\ \hline \\ \text{求} & \qquad B^* \end{array} \tag{2.1}$$

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \longrightarrow B \\ \text{且给定} & \qquad B^* \\ \hline \\ \text{求} & A^* \end{array} \tag{2.2}$$

这里 A, A^* 是论域 X 上的模糊集， B, B^* 是论域 Y 上的模糊集.

由于更一般的模糊推理模型均可通过适当的数学处理化归为模型 (2.1) 和 (2.2)，因此，模糊推理的中心课题就是研究 FMP 和 FMT 问题，也就是对于模糊输入 $A^*(B^*)$, 寻找适当的模糊输出 $B^*(A^*)$.

1973 年，美国控制论专家及模糊数学的创始人 L.A.Zadeh 于文献 [3–5] 中提出了解决上述问题的规则合成推理算法，简称 CRI 算法 (Compositional Rule of Inference). 其基本思想是：将规则 $A \longrightarrow B$ 通过蕴涵算子 R 转化为 $X \times Y$ 上的一个模糊关系 $\overline{R}$(或 $\overline{R}^{-1}$), 其隶属函数在 (x,y) 处的值为