金太阳系列丛书

丛书主编 陈东旭

热点重点难点专题透析

——高考第二轮复习用书（A版）

数学

江西金太阳教育研究所 编

江西高校出版社

金太阳系列丛书

丛书主编 陈东旭

热点重点难点专题透析

——高考第二轮复习用书(A版)

数学

江西金太阳教育研究所 编

主　编:贺清和

副主编:杜建刚　游松林　徐小凯

编　委:(按姓氏笔画排列)

王希年　王清洁　王　辉　刘学武

吉晓波　李生茂　李华清　杜建刚

闵　睿　陈国安　贺清和　赵焕章

徐小凯　袁永平　游松林

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

热点重点难点专题透析．高考第二轮复习用书．A版．数学/江西金太阳教育研究所编．一南昌：江西高校出版社，2007.11

(金太阳系列丛书/陈东旭主编)

ISBN 978－7－81132－105－0

Ⅰ．热…　Ⅱ．江…　Ⅲ．数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 173872 号

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
邮政编码	330046
电　　话	(0791)8504319,8521923
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	武宁县印刷厂
照　　排	江西金太阳教育研究有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	889mm×1194mm　1/16
印　　张	62
字　　数	2356 千字
版　　次	2007 年 11 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数	1～80000
书　　号	ISBN 978－7－81132－105－0
定　　价	107.00 元(全套共 7 册)

前言

本套书为2008年高考第二轮复习专用.它与第一轮复习紧密衔接,根据教学实际,以专题归类的形式把高中各科主干知识的内容明晰化、条理化、概念化、规律化.专题关注高考热点、重点、难点,"讲"、"练"结合,使同学们能针对不足,逐点突破,对第一轮复习的薄弱部分进行补充,同时在训练中熟记考试内容,掌握应试技巧,提高综合素质.

本册为数学分册,突出知识的综合与交汇,致力于解题方法与技巧的归纳、点拨与提高.设有高考热点、思想方法与2008年高考强化训练三大板块,共有十二个专题.前八个专题设置"考题特征剖析"、"考点题型再现与分析"、"高考命题趋势"、"考题预测与训练"四个栏目;后四个专题突出培养考生的数学思想方法与解法训练,与前八个专题的体例有所不同.

【考题特征剖析】 揭示涉及本专题内容的高考试题的特征与分值,展现这些试题中涉及的题型、解题方法、难度系数及由此体现出来的数学思想、数学方法,总结此类试题的总体解题思路等,从宏观上把握高考方向与题型特征.

【考点题型再现与分析】 揭示涉及本专题内容的各个考点,展现考题的形式与命题特征,精选典型习题,通过对解题过程的剖析,点拨解题关键点、易错点、拓展与变形方向,分析寻找解题切入点和突破口的主要思路与思想方法,总结题型特点、解题方法及思路,形成规律,以求提高实际解题能力.

【高考命题趋势】 揭示涉及本专题内容的高考试题的命题趋势与方向,包括题型、难易度及与其他内容的交汇联系、涉及的数学思想与主要解题方法,从高考发展趋势上指导考生进行有效复习,具有较强的前瞻性.

【考题预测与训练】 直接瞄准2008年高考,根据本专题内容命制与高考方向一致的练习试题,供考生在复习完本专题后自我检测,既具实战意义,同时也起到训练题型和提高解题速度的作用.

在编写过程中,我们本着对读者负责的态度,章章推敲,层层把关,但由于受时间的限制,书中疏漏之处在所难免,在此我们恳请广大读者和有关专家不吝指正,使本书能以其卓越的品质为广大考生的高考之路奠定坚实的基础.

此书是我所多名资深研究员与数十位高考专家、特级教师经过呕心沥血、精益求精的编写,为百万学子奉献的一部经典力作.在编写过程中,我们本着对读者负责的态度,章章推敲,层层把关,但由于受时间的限制,书中疏漏之处在所难免,在此我们恳请广大读者和有关专家不吝指正.相信在你我的共同努力下,使本书能以其卓越的品质为广大考生的高考之路奠定坚实的基础.相信它会得到广大师生的好评和厚爱,相信它会给你人生最重要的渡口——高考——指点迷津,让你翩然登上理想的高等学府的神圣殿堂.

愿你——翻遍此书有益处,得分不枉费工夫.

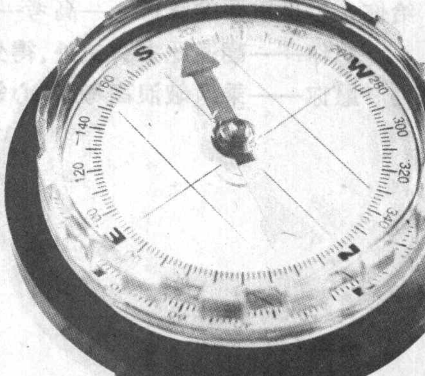
愿你——乘风破浪高考时,心领秘招济学海.

编 者

金太阳系列丛书

以下学校参与本丛书的编写，在此鸣谢：

北京市：	北京四中	北大附中	清华大学附中	北京二中	
天津市：	南开中学	耀华中学	天津实验中学	静海一中	
河北省：	衡水中学	唐山一中	邯郸市一中	正定中学	
内蒙古：	内蒙古师大附中	呼和浩特二中	赤峰二中	海拉尔三中	
山西省：	临汾一中	平遥中学	大同市一中	太原市尖草坪区第一中学	
	山西省浑源县中学				
辽宁省：	沈阳二中	东北育才中学	鞍山一中	大连八中	
吉林省：	东北师大附中	省实验中学	长春实验中学	吉林市一中	
黑龙江：	哈尔滨九中	齐齐哈尔一中	鸡西一中	鹤岗一中	
江苏省：	南京师大附中	启东中学	盐城中学	徐州一中	
浙江省：	杭州高级中学	杭州外国语学校	浙江师大附中	温州中学	
山东省：	省实验中学	烟台二中	济宁实验中学	牟平一中	
安徽省：	马鞍山二中	安庆一中	桐城中学	濉溪中学	
福建省：	福建师大附中	福州三中	厦门一中	龙岩一中	
河南省：	河南大学附中	开封市高中	潢川一中	新乡一中	
湖北省：	新洲一中	宜城一中	京山一中	宜昌夷陵中学	
	天门中学	松滋一中			
湖南省：	长沙长郡中学	长沙雅礼中学	衡阳市八中	桑植一中	张家界市一中
广东省：	华南师大附中	省实验中学	汕头金山中学	惠州一中	
广 西：	柳州教科所	桂林教科所	南宁二中	柳州一中	
四川省：	省外国语学校	成都石室中学	成都市七中	绵阳高中	
重庆市：	西南师大附中	重庆一中	重庆三中	重庆十一中	
贵州省：	贵州师大附中	毕节一中	兴义一中	瓮安县中学	
云南省：	昆明一中	大理一中	曲靖一中	文山州一中	
西 藏：	拉萨中学				
陕西省：	陕西师大附中	渭南市瑞泉中学	榆林市第一中学		
甘肃省：	西北师大附中	兰州一中	天水一中		
宁 夏：	宁夏大学附中	银川市一中	银川市唐徕回民中学		
新 疆：	新疆实验中学	乌鲁木齐一中	新疆师大附中		
	库尔勒华山中学				
江西省：	江西师大附中	吉安市一中	吉安白鹭洲中学		
	新建二中	上高二中	南康中学		
	贵溪一中	修水一中	都昌一中		
	瑞昌一中				



高考二轮复习期心理问题指导

一、学会缓减心理压力

高三阶段，同学们进入到紧张的复习备考状态，你追我赶，激烈的竞争带来了巨大的压力。心理研究发现，保持适度的心理压力有利于学习效率的提高；但压力过大，会造成紧张、急躁心理。所以，同学们必须学会调节自身的心理压力。

首先，同学们应当认识到，随着高考的临近，抓紧时间复习、积极备考是正常的，正如军队临战前要练兵、运动员比赛前要训练一样。有了这样的认识，就能把压力变为动力。

其次，要在老师的指导下制定自己的复习计划，做到以“我”为主，紧而不乱，不要盲目地跟着别人跑。要把平时当考时，考时当平时，尽量以平静的心态来复习备考。

再次，还要注意搞好团结。同学间既竞争，又友好，互相帮助，共同进步。在一种宽松友爱的氛围中复习，会收到更好的效果，高考中也能发挥出自己的最高水平。

二、正确看待信心问题

一些同学由于付出的努力短时间内看不到效果，就对自己的能力产生怀疑，这是没有树立正确的归因理念所致。精神分析专家阿德勒在《超越自卑》一书中说：“事实上，每个人都是自卑的，只是程度不同而已。因为我们发现我们的现状都是可以进一步改善的。”从这个意义上来说，自卑也可以成为一个人进步的动力，人生正是在对自卑的不断超越中渐入佳境的。但是，持久的、过分的自卑感则容易造成心理疾患。在遭遇挫折时，建议同学们不妨尝试以下策略：

1.对自己有一个客观的、全面的评价。

2.善于将成功归结为自己的能力。

3.体验内心的喜悦感和成就感，要相信之所以失败是由于自己努力不够或无效努力。

4.制定阶段性目标，在不断达到目标的过程中体验成就感。

5.增强自信心。

6.乐观、平静地对待挫折，因为挫折对于成功同样是必要的。

三、如何缓解学业焦虑

1.学业焦虑往往体现在对考分的过分看重，说到底是对自己未来前途的焦虑。之所以如此，原因有三：一是由于群体效应，将分数作为衡量自己能力的唯一指标；二是不自觉地将获取高学历等同于自己的人生价值；三是渴望自我实现与现实学业成绩的不理想而导致的认知不协调。只有减轻心理负担与学习负担，才能减轻精神上和学习上的压力，才能健康愉快地成长。为了缓解和消除学业焦虑，同学们可以尝试以下几种方法：

(1)选择适合自己的目标动机水平，过强或过弱的动机水平都容易产生失败体验而导致心理压力。

(2)未来对于每一个人来说都是一个未知数，不要过多地担忧将来的事情，而应将自己的精力和时间投入到现实的生活和学习中去。

(3)考前作好知识准备以及应付考试突发事件的心理准备，有备才能无患。

(4)不妨采用“极限思维法”，想象你所焦虑的事件可能的最坏结果，你会发现现状还是值得乐观的。

2.学习动力不足也常常令学生苦恼。一方面同学们都有提高成绩的需要，而另一方面，又容易产生浮躁、厌烦情绪，导致学习无动力或动力不足。学习动机分内在(具有持久性)和外在(具有短暂性)两种，学习者只有“知学”、“好学”并且“乐学”，从价值上给自己的学习以较高的评价，才会产生持久的学习动机。当然，学习的外在动机也是必要的，只有二者和谐作用，才会相辅相成，相得益彰。

四、如何克服精力分散

中学生在学习中常常会出现注意力不集中、精力分散、“走神”等现象。造成注意力分散的原因可能有以下几点：因单调刺激而引起的厌倦感，如学习繁重、枯燥；否定注意对象的价值导致意志努力失败或放弃努力；由精神疲劳而引起的疲劳效应。

“注意紧张状态”理论提出学习单元时间的概念。由于个性差异，每个人的学习单元时间可能不尽相同，有人认为一个人的最佳学习单元时间约为25分钟，通俗地讲，一个学习单元时间即是一个注意紧张状态，学习者应避免在一个既定学习单元时间内分心。

可以尝试以下克服注意力分散的三步控制法：

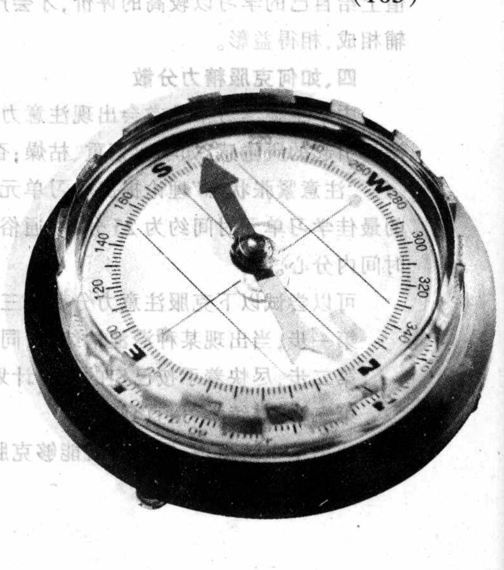
第一步，当出现某种滞涩情绪时，同学们应敏感地意识到，并提醒自己不能成为情绪的俘虏。

第二步，尽快着手按已定的复习计划学习。

第三步，继续学习，直到完成。

明白了上述道理，同学们就能够克服在一个学习单元时间内注意力分散的不良习惯，从而提高学习的效率。

目录



第一部分　高考热点、重点与难点

第一专题　高考集合、简易逻辑和不等式题型分析与预测

考题特征剖析

从2007年高考全国卷及各地自主命题试卷，结合近几年的高考试题看，对集合、简易逻辑和不等式内容的考查主要涉及以下几方面：

(1)集合的基本概念和运算；

(2)命题的四种形式及充要条件；

(3)映射及其与函数的关系；

(4)不等式的性质、证明和解法.

集合的初步知识与简易逻辑知识是掌握和使用数学语言的基础，是每年高考必考的知识点之一. 有关集合的试题，往往体现集合的概念、运算、语言及简单的应用；有关充要条件、命题真假的试题，主要是对概念有准确的记忆和深层次的理解. 它们多以选择题、填空题为主，难度不大，但也有考查充要条件的论证或先寻求充要条件再加以证明的能力题，也有关于集合问题的解答题.

不等式是中学数学的重点内容，也是学习高等数学的基础知识和重要工具，一直是高考的重点和热点，在历年的高考试题中都占有相当的比重. 纵观历年高考试题，涉及不等式内容的大致分为以下几类：不等式的证明；解不等式(组)；取值范围问题；应用问题. 选择题、填空题不仅考查不等式的基础知识、基本方法、基本技能，而且注重考查逻辑思维能力、运算能力和分析问题解决问题的能力. 解答题常以函数、方程、数列及其交叉部分的知识为背景，并与高等数学及其思想方法相衔接，立意新颖、抽象程度高，既体现高观点、低设问、深入浅出的基础性，更显蕴含知识多、思维跨度大、能力要求高的综合性和灵活性.

突出重点，综合考查，在知识与方法的交汇点处设计命题，是高考命题的重要特点. 集合经常作为工具广泛应用于函数、方程、不等式、三角函数和曲线等知识中，将不等式的知识和方法与函数、方程、数列、三角函数、解析几何、立体几何以及实际应用问题等有机结合进行综合考查，强调知识的内在联系与综合，加大数学思想方法的考查力度，充分体现由知识立意向能力立意转变的命题原则和改革方向.

考点题型再现与分析

A　客观题

集合问题按集合中元素的特点大致分为三类：1. 元素是离散的；2. 元素在某一条直线或曲线上；3. 元素在某一个区域内. 通常以函数的定义域和值域、方程的根、不等式的解集为切入点，以求交集、并集为表现形式，题型为一道选择题，分值为5分. 解决办法主要用文氏图和数轴法；简易逻辑问题重点考查四种命题的相互转化和主要条件的判断，通常以其它章节知识点为载体，主要用定义求解，题型为一道选择题，分值为5分；不等式问题分性质、解法和均值不等式的应用，其中一元二次不等式仍是主要表现形式，不等式与函数单调性的结合是命题的重点，题型为一道选择题或填空题，分值为5分.

考点1：集合及其运算

【例1】(1)设 $a,b\in\mathbf{R}$，若集合 $\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$，则 $b-a$ 等于[2007年·全国Ⅰ]　(　　)

(A)1.　(B)-1.　(C)2.　(D)-2.

(2)已知集合 $M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{x\mid y=5-x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N$ 等于　(　　)

(A)$\varnothing$.　(B)$\{x\mid x>1\}$.

(C)$\{x\mid x\geqslant 1\}$.　(D)$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$.

【分析】(1)利用集合中元素的互异性和集合相等的概念，首先确定 a、b 的值. (2)由二次函数知识先求出 M、N，再求交集.

【解析】(1)由集合相等可得 $a+b=0$，$b=1$，$a=-1$，故 $b-a=2$，选C.

(2)$\because M=\{y\mid y\geqslant 1\}$，$N=\{x\mid y=5-x^2,x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$.

$\therefore M\cap N=M\cap\mathbf{R}=M=\{y\mid y\geqslant 1\}$，选C.

【答案】(1)C　(2)C

考点2：逻辑联结词与四种命题充要条件

【例2】(1)已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则下列选项中不是 $ab(a-b)>0$ 成立的充分条件是　(　　)

(A)$a<0<b$.　(B)$b<a<0$.

(C)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.　(D)$a>b>0$.

(2)命题"若 a、b 都是奇数，则 $a+b$ 是偶数"的逆否命题是　(　　)

(A)若 a、b 都不是奇数，则 $a+b$ 不是偶数.

(B)若 $a+b$ 是偶数，则 a、b 都是奇数.

(C)若 $a+b$ 不是偶数，则 a、b 都不是奇数.

(D)若 $a+b$ 不是偶数，则 a、b 不都是奇数.

【分析】(1)找出 a、b 的正负及其大小关系. (2)交换原命题的条件和结论，并且同时否定，所得的命题就是逆否命题. 注意"都是"的否定是"不都是". 顺便指出的是否命题与命题的否定是不同的.

【解析】(1)$ab(a-b)>0\Leftrightarrow\begin{cases}ab>0,\\a-b>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ab<0,\\a-b<0\end{cases}\Leftrightarrow a>b>0$ 或 $b<a<0$(前者)或 $a<0<b$(后者)，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{b-a}{ab}>0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)<0$，选 C.

(2)“a、b 都是奇数”的否定是“a、b 不都是奇数”；“$a+b$ 是偶数”的否定是“若 $a+b$ 不是偶数”，所以其逆否命题是“若 $a+b$ 不是偶数，则 a、b 不都是奇数”，选 D.

【答案】(1)C (2)D

考点 3：一元二次不等式与绝对值不等式、指数对数不等式

【例 3】(1)若 $A=\{x\in\mathbf{Z}|2\leqslant 2^{2-x}<8\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}||\log_2 x|>1\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$ 的元素个数为[2007 年·安徽] ( )

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2)已知 $P=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$Q=\{x||x|<a\}$，若 $Q\subseteq P$，则实数 a 的取值范围是 ( )

(A)$a\leqslant 1$. (B)$a\leqslant 3$. (C)$0<a\leqslant 1$. (D)$0<a\leqslant 3$.

【分析】(1)由指数、对数函数的单调性，分别求出 A、B；(2)由于 $Q\subseteq P$，因此 $Q=\varnothing$ 也满足，应对 a 讨论.

【解析】(1)由 $2\leqslant 2^{2-x}<8$，得 $1\leqslant 2-x<3$，即 $-1<x\leqslant 1$，又 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $A=\{0,1\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}||\log_2 x|>1\}=\{x\in\mathbf{R}|\log_2 x<-1$ 或 $\log_2 x>1\}=\{x\in\mathbf{R}|0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2\}$，

$\therefore \complement_{\mathbf{R}}B=\{x\in\mathbf{R}|x\leqslant 0$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\}$，因此 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$ 的元素个数为 2，选 C.

(2)由于 $P=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$，当 $a\leqslant 0$ 时，$Q=\varnothing$，$Q\subseteq P$；当 $a>0$ 时，$Q=\{x|-a<x<a\}$，要使 $Q\subseteq P$，只须 $-a\geqslant -1$ 且 $a\leqslant 3$，即 $a\leqslant 1$，故实数 a 的取值范围是 $a\leqslant 1$，选 A.

【答案】(1)C (2)A

考点 4：比较函数值的大小

【例 4】设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足以下条件：(1)对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f(-x)=0$；(2)对任意 $x_1,x_2\in[1,a]$，当 $x_2>x_1$ 时，有 $f(x_2)>f(x_1)>0$，有下列各式：

①$f(a)>f(0)$；②$f(\frac{1+a}{2})>f(\sqrt{a})$；

③$f(\frac{2a-1}{a})>f(a)$；④$f(\frac{1-3a}{1+a})>f(-a)$.

其中所有正确不等式的序号是________.

【分析】由已知条件可判断 $f(x)$ 为奇函数，且在 $[1,a]$ 上是增函数，只要比较自变量的大小即可判定.

【解析】由 $f(x)+f(-x)=0$，得 $f(-x)=-f(x)$，因此 $f(x)$ 为奇函数. $\therefore f(0)=0$. 又 $x_1,x_2\in[1,a]$，当 $x_2>x_1$ 时有 $f(x_2)>f(x_1)>0$ 知 $f(x)$ 在 $[1,a]$ 上是增函数，且 $f(a)>0$.

$\therefore f(a)>0=f(0)$，故①成立；

由 $a>1$，知 $a>\frac{1+a}{2}>\sqrt{a}>1$，

$\therefore f(\frac{1+a}{2})>f(\sqrt{a})$. 故②成立；

又 $(2a-1)-a=a-1>0$，

$\therefore \frac{2a-1}{a}>1$，而 $\frac{2a-1}{a}-a=\frac{2a-1-a^2}{a}=\frac{-(a-1)^2}{a}<0$，

$\therefore \frac{2a-1}{a}<a$，于是 $f(\frac{2a-1}{a})<f(a)$，故③不成立；

依题意，$f(\frac{1-3a}{1+a})=-f(\frac{3a-1}{1+a})$，$f(-a)=-f(a)$，

$(3a-1)-(1+a)=2(a-1)>0$，

$\therefore \frac{3a-1}{1+a}>1$，$\frac{3a-1}{1+a}-a=\frac{-a^2+2a-1}{1+a}=-\frac{(a-1)^2}{1+a}<0$，

$\therefore \frac{3a-1}{1+a}<a$，于是 $f(\frac{3a-1}{1+a})<f(a)$，即 $f(\frac{1-3a}{1+a})>f(-a)$，故④成立.

所以应填①②④.

【答案】①②④

考点 5：函数与不等式的综合

【例 5】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R})$ 在 $x=-1$ 处取得极值，且 $f(x)$ 的曲线在点 $P(1,f(1))$ 处的切线平行于直线 $y=8x$，则 $a+b=$________，不等式 $f(x)\geqslant x$ 的解集为________.

【分析】运用导数方法，根据题意可得 a、b 的方程组，解出 a、b，再解高次不等式.

【解析】$f'(x)=3x^2+2ax+b$，

由 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，得 $f'(-1)=0$，即 $3-2a+b=0$. ①

由 $f(x)$ 在 P 处的切线平行于直线 $y=8x$，

得 $f'(1)=8$，即 $2a+b-5=0$. ②

解①②得 $a=2,b=1$，$\therefore a+b=3$.

于是 $f(x)=x^3+2x^2+x$. $f(x)\geqslant x$，即 $x^3+2x^2\geqslant 0$，

$\therefore x^2(x+2)\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -2$. 故 $f(x)\geqslant x$ 的解集为 $\{x|x\geqslant -2\}$.

【答案】3 $\{x|x\geqslant -2\}$

B 主观题

有关不等式的内容近几年高考已不再单独命制主观题，而不等式的求解和证明问题常与数列和函数问题结合出现.

题型一：命题与充要条件

有关命题的真假、充要条件的试题，多与集合、函数、不等式等知识综合，主要是对数学概念有准确的记忆和深层次的理解，常用等价转化思路、分类讨论思想和数形结合的思想方法等.

【例 6】已知命题 p：$A=\{y|\frac{y+2}{y-5}\geqslant\frac{1}{2}\}$；命题 q：$B=\{y|y=ax^2-6x+4a$，其中 $a\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

【分析】由 p 是 q 的必要不充分条件，可知 $B\subsetneqq A$，而 B 表示二次函数的值域，应对 a 予以讨论.

【解析】由 $\frac{y+2}{y-5}\geqslant\frac{1}{2}$，得 $\frac{y+9}{y-5}\geqslant 0$，解得 $y\leqslant -9$ 或 $y>5$，

$\therefore A=\{y|y\leqslant -9$ 或 $y>5\}$.

又 p 是 q 的必要不充分条件，则 $B\subsetneqq A$.

由 $y=ax^2-6x+4a=a(x-\frac{3}{a})^2+4a-\frac{9}{a}$ 知：

当 $a>0$ 时，$B=\{y|y\geqslant 4a-\frac{9}{a}\}$，要使 $B\subsetneqq A$，只要 $4a-\frac{9}{a}>$

5，即 $4a^2-5a-9>0$，解得 $a>\frac{9}{4}$ 或 $a<-1$（舍去）；

当 $a<0$ 时，$B=\{y|y\leqslant 4a-\frac{9}{a}\}$，要使 $B\subsetneqq A$，只要 $4a-\frac{9}{a}\leqslant -9$，即 $4a^2+9a-9\geqslant 0$，解得 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant\frac{3}{4}$（舍去）.

故满足条件的实数 a 的取值范围是 $a\leqslant -3$ 或 $a>\frac{9}{4}$.

【点评】通过集合的包含关系来判断条件与结论间的逻辑关系是常用的方法．一般地，设 p 包含的对象组成集合 A，q 包含的对象组成集合 B，则：若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分而不必要条件；若 $A\supsetneqq B$，则 p 是 q 的必要而不充分条件；若 $A=B$，则 p、q 互为充要条件；若 $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$，则 p、q 互为既不充分也不必要条件．

题型二：有关不等式的解法

解不等式的关键是等价转化，要掌握解不等式的转化方法：分式不等式转化为整式不等式；无理不等式转化为有理不等式；含绝对值的不等式转化为不含绝对值的不等式；指数、对数不等式转化为代数不等式；抽象函数的不等式在确定其单调性的前提下去掉函数符号转化为代数不等式；对含有参数的不等式应分类讨论．

1. 基本不等式的解法

【例 7】解下列关于 x 的不等式．

(1) $|2x-3|+|x+1|>6$；

(2) $\frac{a(x-1)}{x-2}>1(a>0)$；

(3) $\log_a(x^2+x-2)-\log_a 3>\log_a(x+\frac{1}{3})$，其中 $a>1$.

【分析】(1)解含有绝对值的不等式的指导思想是去绝对值；

(2)解分式不等式通常先移项，使一边为 0；

(3)根据对数函数的性质化为一般不等式．

【解析】(1)当 $x\leqslant -1$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow 3-2x-(x+1)>6$，

$\therefore x<-\frac{4}{3}$；

当 $-1<x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow 3-2x+x+1>6$，无解；

当 $x>\frac{3}{2}$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow 2x-3+x+1>6$，$\therefore x>\frac{8}{3}$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x<-\frac{4}{3}$ 或 $x>\frac{8}{3}\}$.

(2)原不等式 $\Leftrightarrow\frac{a(x-1)-(x-2)}{x-2}>0\Leftrightarrow\frac{(a-1)x-(a-2)}{x-2}>0$.

当 $a=1$ 时，$\frac{1}{x-2}>0$，解得 $x>2$.

当 $a>1$ 时，$\frac{x-\frac{a-2}{a-1}}{x-2}>0$，由 $\frac{a-2}{a-1}-2<0$ 得不等式的解集为 $\{x|x<\frac{a-2}{a-1}$ 或 $x>2\}$.

当 $0<a<1$ 时，$\frac{x-\frac{a-2}{a-1}}{x-2}<0$，由 $\frac{a-2}{a-1}-2=\frac{a}{1-a}>0$ 得不等式的解集为 $\{x|2<x<\frac{a-2}{a-1}\}$.

(3)原不等式化为 $\log_a(x^2+x-2)>\log_a(3x+1)$.

原不等式等价于 $\begin{cases}x^2+x-2>0,\\3x+1>0,\\x^2+x-2>3x+1,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x<-2\text{ 或 }x>1,\\x>-\frac{1}{3},\\x<-1\text{ 或 }x>3,\end{cases}\quad\therefore x>3.$

故原不等式的解集为 $\{x|x>3\}$.

【点评】解不等式的关键是等价转换．绝对值不等式去绝对值的方法主要有：①分段讨论；②利用绝对值不等式的性质；③平方．对于含参数的不等式要注意对参数的讨论不重不漏；指数、对数的运算是解指数、对数不等式的基础，指数、对数的单调性是解不等式的关键，同时不要忽略对数函数的定义域．

2. 抽象函数不等式的解法

【例 8】设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，且对一切正数 a、b，都有 $f(\frac{a}{b})=f(a)-f(b)$.

(1)求 $f(1)$ 的值；

(2)若 $f(4)=1$，解不等式 $f(x+6)-f(\frac{1}{x})>2$.

【分析】(1)令 $a=b=1$，可求得 $f(1)$；(2)由已知关系式把不等式变换、转化为关于 x 的代数不等式，但要注意函数的定义域．

【解析】(1)令 $a=b=1$，则 $f(1)=f(1)-f(1)=0$.

(2) $\because f(4)=1$，则 $f(x+6)-f(\frac{1}{x})>2f(4)$. ①

$\therefore f(\frac{x+6}{\frac{1}{x}})-f(4)>f(4)$，即 $f[\frac{x(x+6)}{4}]>f(4)$.

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，于是①等价于

$\begin{cases}\frac{1}{x}>0,\\x+6>0,\\\frac{x(x+6)}{4}<4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>0,\\x>-6,\\x^2+6x-16<0,\end{cases}$ 解得 $0<x<2$.

【点评】抽象函数问题通常是指没有给出函数的具体解析式，只给出了其他一些条件、性质的函数问题．若题目中给出了抽象函数满足的关系式，应将所给的关系式看作是给定的运算法则，对某些变量进行适当的赋值，并且变量的赋值或变量及数值的分解与组合都应尽量与已知式或所给关系式及所求的结果相关联；或者通过函数的性质模拟出函数的图象，借助于形，探求解决问题的途径或直接得出答案；或者找出抽象函数的“原型”函数，通过它求解或探索解决问题的思路．

题型三：有关参数的取值范围

这类问题往往与函数、方程、导数等知识综合在一起，一般有三种情况，即求参数的取值范围、使含参数的不等式恒成立、恰成立和能成立．函数与方程思想是解决这类问题的关键．这是因为不等式、函数、方程三者密不可分，相互联系，又相互转化，只要用函数思想作指导，不仅会优化解题过程，

而且能迅速获得解题的途径.

【例 9】已知函数 $f(x)=x^2+x-2$.

(1)若 $f(x)>a$ 在$[1,3]$上有解,求实数 a 的取值范围;

(2)若 $f(x)>a$ 在$[1,3]$上恒成立,求实数 a 的取值范围.

【分析】(1)$f(x)>a$ 在$[1,3]$上有解,只要 a 小于 $f(x)$在$[1,3]$上的最大值即可;

(2)$f(x)>a$ 在$[1,3]$上恒成立,必须 a 小于 $f(x)$在 $[1,3]$上的最小值.

【解析】(1)$f(x)=x^2+x-2=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}$,又 $x\in[1,3]$,

$\therefore f(x)$在$[1,3]$上有最大值 $f(3)=10$,$\therefore a<10$.

(2)$f(x)=x^2+x-2$ 在$[1,3]$上有最小值 $f(1)=0$.

$\therefore a<0$.

【点评】一般地,$y=f(x)$在闭区间上有以下结论(a 为常数):(1)$a<f(x)$有解$\Leftrightarrow a<[f(x)]_{\max}$;(2)$a>f(x)$有解$\Leftrightarrow a>[f(x)]_{\min}$;(3)$a<f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a<[f(x)]_{\min}$;(4)$a>f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a>[f(x)]_{\max}$.

【例 10】已知两个函数 $f(x)=8x^2+16x-k$,$g(x)=2x^3+5x^2+4x$,其中 k 为实数.

(1)对任意 $x\in[-3,3]$,都有 $f(x)\leqslant g(x)$成立,求 k 的取值范围;

(2)存在 $x\in[-3,3]$,使 $f(x)\leqslant g(x)$,求 k 的取值范围;

(3)对任意 $x_1,x_2\in[-3,3]$,都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$,求 k 的取值范围.

【分析】设 $F(x)=g(x)-f(x)$运用导数的知识和方法.

【解析】设 $F(x)=g(x)-f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$.

(1)对任意 $x\in[-3,3]$,都有 $f(x)\leqslant g(x)$成立,转化为 $x\in[-3,3]$时,$F(x)\geqslant0$ 恒成立.故$[F(x)]_{\min}\geqslant0$.

令 $F'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)=0$,得 $x=-1$ 或 $x=2$.

$\therefore F(x)$在$[-3,-1]$和$[2,3]$上是增函数,在$[-1,2]$上是减函数,由 $F(-1)=7+k$,$F(2)=k-20$,$F(-3)=k-45$,$F(3)=k-9$.故$[F(x)]_{\min}=k-45$,由 $k-45\geqslant0$,得 $k\geqslant45$.

(2)存在 $x\in[-3,3]$,使 $f(x)\leqslant g(x)$成立,即 $F(x)\geqslant0$ 在$[-3,3]$内有解,故$[F(x)]_{\max}\geqslant0$.

由(1)知$[F(x)]_{\max}=k+7$.于是 $k+7\geqslant0$ 得 $k\geqslant-7$.

(3)该问与(1)虽然都是不等式恒成立问题,但有很大的区别,对任意 $x_1,x_2\in[-3,3]$都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$成立,不等式的左右两端函数的自变量不同,x_1、x_2 的取值在$[-3,3]$上具有任意性,因而要使原不等式恒成立的充要条件是$[f(x)]_{\max}\leqslant[g(x)]_{\min}$,$x\in[-3,3]$.由 $g'(x)=6x^2+10x+4=0$,得 $x=-\frac{2}{3}$或 $x=-1$.易知$[g(x)]_{\min}=g(-3)=-21$.

又 $f(x)=8(x+1)^2-8-k$,$x\in[-3,3]$,故$[f(x)]_{\max}=f(3)=120-k$,由 $120-k\leqslant-21$,

得 $k\geqslant141$.

【点评】本题的三个小题,表面形式非常相似,究其本质却大相径庭,应认真审题,深入思考,准确使用其成立的充要条件.解决不等式恒成立和有解问题的基本策略常常是构造辅助函数,借助函数的单调性、最值、图象求解.基本方法包括:分类讨论、数形结合、参数分离、变换主元等等.

题型四:有关不等式的证明

不等式的证明主要体现在不等式与函数、方程、数列、三角、解析几何等的综合性问题中,结合运用不等式的性质及证明不等式的技巧,同时发挥导数的工具作用,从而多层次、多角度、多视点地检测学生的数学素养和学习的潜能.在不等式的证明中,要注意比较法、综合法、分析法、放缩法、数学归纳法、函数单调性法和构造函数法等的使用,同时渗透函数与方程、分类与整合、化归与转化等思想方法.

1.有关"三个二次"的问题

【例 11】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+bx^2+cx$,$b,c\in\mathbf{R}$,且函数$f(x)$在区间$(-1,1)$上单调递增,在区间$(1,3)$上单调递减.

(1)求证:$c\geqslant3$;

(2)设函数 $g(x)=f'(x)$,当 $x\in[-1,3]$时,$g(x)$的最小值是-1,求 b、c 的值.

【分析】利用导数研究函数,根据二次函数的图象特征和单调性,以及一元二次方程实根的的分布情况与相应的函数图象的关系求解.

【解析】由已知可得 $f'(1)=0$,又 $f'(x)=x^2+2bx+c$.

$\therefore f'(1)=1+2b+c=0$,$\therefore b=-\frac{c+1}{2}$.

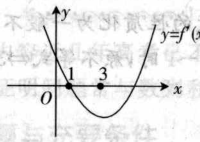
把 $b=-\frac{c+1}{2}$代入 $f'(x)$可得 $f'(x)=x^2-(c+1)x+c$,

令 $f'(x)=0$.

则 $x_1=1$,$x_2=c$.

又当$-1<x<1$ 时,$f'(x)\geqslant0$,

当 $1<x<3$ 时,$f'(x)\leqslant0$.如图所示



易知 $c\geqslant3$.

(2)$\because g(x)=x^2+2bx+c$.

若 $1\leqslant-b\leqslant3$,则 $g(x)_{\min}=g(-b)=b^2-2b^2+c=-1$.

又 $1+2b+c=0$,得 $b=-2$ 或 $b=0$(舍),$c=3$;

若$-b\geqslant3$,则 $g(x)_{\min}=g(3)=9+6b+c=-1$.

又 $1+2b+c=0$,得 $b=-\frac{9}{4}$(舍).

综上,$b=-2$,$c=3$.

【点评】一元二次方程、一元二次不等式与二次函数的相互转化反映了函数、方程、不等式之间的关系,要深刻理解并能灵活运用这种相互转化的方法解决有关的问题.

2.函数(曲线)与不等式的联系

【例 12】设函数 $f(x)=ax^3-2bx^2+cx+4d$($a,b,c,d\in\mathbf{R}$)的图象关于原点对称,且当 $x=1$ 时,$f(x)$取得极小值$-\frac{2}{3}$.

(1)求 a、b、c、d 的值;

(2)当 $x\in[-1,1]$时，图象上是否存在两点，使得过此两点处的切线互相垂直？试证明你的结论；

(3)若 $x_1,x_2\in[-1,1]$，求证：$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{4}{3}$.

【分析】本题是关于函数图象的切线以及函数与不等式的联系问题，这类问题一方面要考虑函数的导数与切线的联系，另一方面要考虑不等式有关性质的应用及函数的单调性与不等式的联系.

【解析】(1)∵$f(x)$为奇函数，∴$b=d=0$，

则 $f(x)=ax^3+cx$，$f'(x)=3ax^2+c$.

由题意知 $x=1$ 时，$f(x)$取得极小值$-\frac{2}{3}$，

则 $f'(1)=3a+c=0$，$f(1)=a+c=-\frac{2}{3}$，

解得 $a=\frac{1}{3}$，$c=-1$，即 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$.

(2)当 $x\in[-1,1]$时，图象上不存在两点，使得过此两点处的切线互相垂直.

假如存在点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$使得过此两点处的切线互相垂直，则由 $f'(x)=x^2-1$ 知两点处的切线斜率分别为 $k_1=x_1^2-1$，$k_2=x_2^2-1$，且$(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1$.

又 $x_1,x_2\in[-1,1]$，∴$x_1^2-1\leqslant0$，$x_2^2-1\leqslant0$.从而与$(x_1^2-1)(x_2^2-1)\geqslant0$矛盾，所以假设不成立.

(3)∵$f'(x)=x^2-1$，令 $f'(x)=x^2-1=0$，得 $x=\pm1$.

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(-1,1)$时，$f'(x)<0$.

所以，$f(x)$在$[-1,1]$上是减函数，

且 $f(x)_{\max}=f(-1)=\frac{2}{3}$，$f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{2}{3}$，

∴在$[-1,1]$上，$|f(x)|\leqslant\frac{2}{3}$.

则当 $x_1,x_2\in[-1,1]$时，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)|+|f(x_2)|\leqslant\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，

∴$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{4}{3}$.

【点评】本题考查的重点是导数的概念和计算、切线的概念和方程、不等式的基本性质和证明.以导数为工具研究函数的变化率，为解决函数极值问题提供了一条有效的途径.将新课程新增加的内容(导数)和一些传统内容(不等式证明)有机地结合在一起设问，这是一种新颖的命题模式.

3.比较函数值的大小

【例 13】定义在 **R** 上的函数 $f(x)$满足 $f(x+4)=f(x)$，当 $2\leqslant x\leqslant6$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{|x-a|}+b$，$f(4)=31$.

(1)求 a、b 的值；

(2)比较 $f(\log_3a)$与 $f(\log_3b)$的大小.

【分析】(1)由已知有 $f(6)=f(2)$，又 $f(4)=31$，可求得 a、b；(2)由指数函数的单调性判断，注意 $f(x)$的周期性.

【解析】(1)∵$f(x)$在 **R** 上满足 $f(x+4)=f(x)$，

∴$f(2)=f(6)$，即$(\frac{1}{2})^{|2-a|}+b=(\frac{1}{2})^{|6-a|}+b$，

∴$|2-a|=|6-a|$，解得 $a=4$.

又∵$f(4)=31$，即$(\frac{1}{2})^{|4-4|}+b=31$，∴$b=30$.

(2)由(1)可知 $f(x)=(\frac{1}{2})^{|x-4|}+30$，$x\in[2,6]$.

∵$1<\log_34<2$，∴$5<\log_34+4<6$，

于是 $f(\log_3a)=f(\log_34)=f(\log_34+4)=(\frac{1}{2})^{|\log_34+4-4|}+30=(\frac{1}{2})^{|\log_34|}+30$.而 $3<\log_330<4$，

∴$f(\log_3b)=f(\log_330)=(\frac{1}{2})^{|\log_330-4|}+30$

$=(\frac{1}{2})^{4-\log_330}+30=(\frac{1}{2})^{\log_3\frac{81}{30}}+30$，

由于 $\log_3\frac{81}{30}<\log_34$，∴$(\frac{1}{2})^{\log_34}+30<(\frac{1}{2})^{\log_3\frac{81}{30}}+30$，

即 $f(\log_3a)<f(\log_3b)$.

【点评】比较函数值的大小通常是利用函数的单调性判断，关键是确定自变量在函数的同一单调区间内的大小，往往结合均值不等式，函数的最值，有时还可以运用函数的图象求解或探索解题途径.

高考命题趋势

1.集合问题高考一般还是以选择题、填空题的形式出现，常涉及集合的范围、元素的个数等，主要考查对集合概念的理解和集合的运算，以及对集合语言的理解与应用.由于中学数学里主要研究数集和点集，所以常与函数、不等式、曲线、平面区域等知识结合.

2.简易逻辑与四种命题主要出现在选择题、填空题中，常见有判断复合命题的真假、四种命题.充要条件是数学中的一个重要概念，选择题、填空题中常见有充要条件的判定、寻求充分、必要条件.由于它与其他内容有着密切的联系，如函数、数列、三角、向量、不等式、解析几何、立体几何等都可能涉及，也要注意运用复合命题的真假求参数范围、证明充要条件的解答题.

3.映射多在选择题、填空题中，以映射的概念为主，包括象、原象、映射的个数等.

4.不等式是中学数学的重要内容，可以渗透到中学数学的各个章节，是解决其他数学问题的有力工具，再加上它在实际问题中的广泛应用，决定了它是永不衰退的考试热点.

选择题、填空题以不等式的性质、解基本不等式、运用均值不等式求最值等为主，也可以是实际应用问题.

解答题多与函数、数列、解析几何等知识综合，有关不等式的证明常涉及函数的单调性、数列求和等，有一定的难度.对于函数、数列、不等式等内容交汇处的较为活跃的知识点，一些与自然对数和指数函数的不等式恒成立与有解问题，将新增内容与传统知识有机融合，不仅考查函数、不等式等有关传统知识和方法，而且考查导数等新增内容的掌握和灵活运用，渗透化归转化，分类讨论、数形结合等数学思想方法，体现能力立意的原则，带有时代特征，突出高考试题与时俱进的改革方向，越来越受到命题者的青睐，因此应予以高度关注.

考题预测与训练

一、选择题

1. 设 A、B 是非空集合，定义 $A*B=\{x|x\in(A\cup B)$ 但 $x\notin(A\cap B)\}$. 已知 $A=\{x|y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$B=\{y|y=2^x(x>0)\}$，则 $A*B$ 等于（　　）

(A) $[0,1]\cup(2,+\infty)$.　(B) $[0,1)\cup(2,+\infty)$.

(C) $[0,1]$.　(D) $[0,2]$.

2. 已知 a、b、c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中不一定成立的是（　　）

(A) $ab>ac$.　(B) $c(b-a)>0$.

(C) $cb^2<ab^2$.　(D) $ac(a-c)<0$.

3. 已知映射 $f:A\to B$，其中 $A=B=\mathbf{R}$，对应法则 $f:x\to y=-x^2+2x$. 对于实数 $k\in B$ 在集合 A 中存在两个不同的原象，则 k 的取值范围是（　　）

(A) $k>1$.　(B) $k\leqslant1$.　(C) $k\geqslant1$.　(D) $k<1$.

4. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$：$x\otimes y=\dfrac{x}{2-y}$，若关于 x 的不等式 $(x-a)\otimes(x+1-a)>0$ 的解集是集合 $\{x|-2\leqslant x\leqslant2,x\in\mathbf{R}\}$ 的子集，则实数 a 的取值范围是（　　）

(A) $-2\leqslant a\leqslant2$.　(B) $-1\leqslant a\leqslant1$.

(C) $-2\leqslant a\leqslant1$.　(D) $1\leqslant a\leqslant2$.

5. 第一象限内有一动点 P 在过点 $A(3,2)$ 且方向向量 $\boldsymbol{n}=(-1,2)$ 的直线 l 上运动，则 $\log_2x+\log_2y$ 的最大值为（　　）

(A) 1.　(B) 2.

(C) 3.　(D) $2\log_27-3$.

6. 若不等式 $(-1)^na<2+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对任意正偶数 n 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

(A) $(-\infty,\dfrac{3}{2}]$.　(B) $(-2,\dfrac{3}{2})$.

(C) $[-2,\dfrac{3}{2}]$.　(D) $(-\infty,\dfrac{3}{2})$.

7. 已知实数 $a>1$，命题 p：函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x+a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$；命题 q：$|x|<1$ 是 $x<a$ 的充分不必要条件，则（　　）

(A) "p 或 q"为真命题.

(B) "p 且 q"为假命题.

(C) "$\neg p$ 且 q"为真命题.

(D) "$\neg p$ 或 $\neg q$"为真命题.

8. 若方程 $2ax^2-x-1=0$ 在 $x\in(0,1)$ 内恰有一解，则 a 的取值范围是（　　）

(A) $a<-1$.　(B) $a>1$.

(C) $-1<a<1$.　(D) $0\leqslant a<1$.

9. 设集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant16\}$，$B=\{(x,y)|x^2+(y-2)^2\leqslant a-1\}$ 且 $A\cap B=B$. 则实数 a 的取值范围是（　　）

(A) $a\leqslant1$.　(B) $a\geqslant5$.

(C) $1\leqslant a\leqslant5$.　(D) $a\leqslant5$.

10. 对于 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $2x^2-a\sqrt{x^2+1}+3>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

(A) $a<2\sqrt{2}$.　(B) $a\leqslant2\sqrt{2}$.

(C) $a<3$.　(D) $a\leqslant3$.

11. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $f(x)$ 的图象经过点 $A(0,4)$ 和点 $B(3,-2)$，则当不等式 $|f(x+t)-1|<3$ 的解集为 $(-1,2)$ 时，实数 t 的值为（　　）

(A) 0.　(B) -1.　(C) 1.　(D) 2.

12. 设 x_1、x_2 是函数 $f(x)=e^x$ 定义域内的两个变量，且 $x_1<x_2$，若 $\alpha=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$，则下列不等式恒成立的是（　　）

(A) $|f(\alpha)-f(x_1)|>|f(x_2)-f(\alpha)|$.

(B) $|f(\alpha)-f(x_1)|<|f(x_2)-f(\alpha)|$.

(C) $|f(\alpha)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(\alpha)|$.

(D) $f(x_1)\cdot f(x_2)>f^2(\alpha)$.

二、填空题

13. 已知在整数集合内，关于 x 的不等式 $2^{x^2-4}<2^{2x-2a}$ 的解集为 $\{1\}$，则实数 a 的取值范围是______.

14. 集合 $A=\{x|\dfrac{x-1}{x+1}<0\}$，$B=\{x||x-b|<a\}$，若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充要条件，则 b 的取值范围是______.

15. 设 $x+y=1$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，则 x^2+y^2 的取值范围是______.

16. 已知开口向上的二次函数 $f(x)$，对一切实数 x 都有 $f(2-x)=f(2+x)$ 成立. 设向量 $\boldsymbol{a}=(|x+2|+|2x-1|,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，则不等式 $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(5)$ 的解集为______.

三、解答题

17. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|\log_3(x^2-2x-15)>2\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|(\dfrac{1}{2})^{x^2-mx-2m^2}>1\}$. 若 $B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=B$，求实数 m 的取值范围.

18. 已知 $p:\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件. 求实数 m 的取值范围.

19. 已知命题 p：方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解；命题 q：只有一个实数 x 满足不等式 $x^2+2ax+2a\leqslant 0$，若命题"p 或 q"是假命题，求 a 的取值范围.

20. 已知 $f(x)=\begin{cases}-x^2+10 & (x>0),\\ x^2-10 & (x<0).\end{cases}$

(1)解不等式 $1\leqslant f(x)\leqslant 6$；

(2)设 $mn<0$，$m+n>0$，判断 $f(m)+f(n)$ 能否小于 0.

21. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{ax+b}$（a、b 为常数），且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根为 $x_1=3$，$x_2=4$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)设 $k>0$，解关于 x 的不等式 $f(x)<\frac{(k+6)x-k^2}{1-x}$.

22. 已知奇函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的增函数.

(1)求实数 b 的取值范围；

(2)若 $b^2-tb+1\geqslant f(x)$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

第二专题　高考函数与导数题型分析与预测

考题特征剖析

函数是高中数学的重要内容，是进一步学习高等数学知识的基础，是历年高考命题的重点．高考对函数(包括导数)问题的考查主要涉及函数、导数的基本概念；函数的图象与性质(单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值等)；以函数为背景的方程、不等式问题；以函数为模型(运用导数解决)的应用问题．

函数问题中蕴含着丰富的数学思想与方法：函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化与化归思想等；以及待定系数法、配方法、换元法、构造法等数学方法．近几年全国各地高考都对函数进行重点考查，题型有选择题、填空题和解答题，分值约占卷面总分的20%，考查内容全面、设计新颖、形式多样、综合性强．考题设计的特点是：稳中求变、变中求新，从传统的套用定义、简单地使用性质，发展到挖掘概念本质、创设问题情境、灵活运用性质．重点考查学生的逻辑推理、运算、分析与解决问题的能力．

导数是初等数学与高等数学的重要衔接点，是高考的热点，高考对导数的考查定位于作为解决初等数学问题的工具出现，仍会以导数的应用为主，如利用导数处理函数的极值、最值、单调性及曲线的切线等问题．分值约占卷面总分的10%～15%．从题型上看主要有以下几个特点：

①以填空、选择题考查导数的概念，求函数的单调区间、极值与最值，属于中档题；

②解答题主要考查利用导数为工具解决函数、方程、数列、不等式、解析几何及应用等问题，有中档题，也有难题．

考点题型再现与分析

A　客观题

高考中本专题的客观题的考查以基础知识为主，主要考查的内容有：函数的解析式、定义域、值域、反函数、单调性、奇偶性、周期性、对称性和函数的图象、导数的基本概念、求函数的单调区间、极值与最值函数应用题等，通常有2～3道题．

考点1：函数的基本概念

1.函数的定义域与值域

【例1】已知函数 $f(x)=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$，$g(x)=\ln(ax^2+2x+a)$．若函数 $y=f(\dfrac{x}{2})+f(\dfrac{2}{x})$ 的定义域为 A，使函数 $g(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 的实数 a 的取值集合为 B，则 $A\cup B$ 等于　(　　)

(A)$(-4,4)$．　　(B)$(-2,2)$．

(C)$(-2,-1)\cup[0,2)$．　　(D)$(-4,-1)\cup[0,4)$．

【解析】由 $\dfrac{2+x}{2-x}>0$ 得 $-2<x<2$．

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$．

$\therefore\begin{cases}-2<\dfrac{x}{2}<2,\\-2<\dfrac{2}{x}<2,\end{cases}$ 解得：$-4<x<-1$ 或 $1<x<4$．

$\therefore A=(-4,-1)\cup(1,4)$．

要使 $g(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，即要满足 $a=0$

或 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=4-4a^2\geqslant 0,\end{cases}$

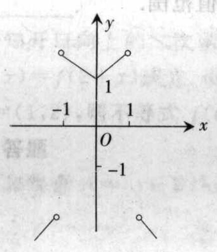
解得 $0\leqslant a\leqslant 1$．$\therefore B=[0,1]$．

故 $A\cup B=(-4,-1)\cup[0,4)$．

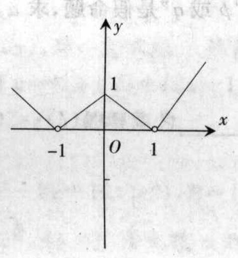
【答案】D

2.函数的解析式与图象

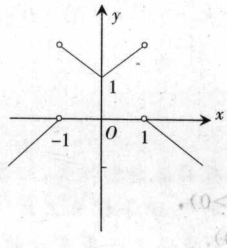
【例2】函数 $f(x)=\dfrac{|1-x^2|}{1-|x|}$ 的图象是　(　　)



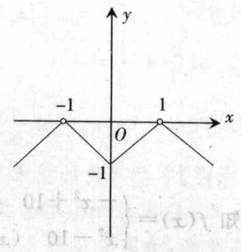
A



B



C



D

【分析】可将 $f(x)$ 的解析式写成分段函数形式(去掉绝对值)得出结论，也可以取特殊值用排除法来解．

【解析】(法一) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<-1,\\1-x, & -1<x\leqslant 0,\\1+x, & 0<x<1,\\-(1+x), & x>1,\end{cases}$

由 $x<-1$ 时的图象可知选A．

(法二)取 $x=2$，得 $f(2)=-3$ 排除B、C、D．

【答案】A

考点2：函数的性质

主要考查函数的单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值等知识点，有时同时涉及几个性质，要注意抓住性质的定义与有关结论解题．

【例 3】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 同时满足下列三个条件：①对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=-f(x)$；②对于任意的 $x_1,x_2\in[0,2]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；③函数 $y=f(x+2)$ 的图象关于 y 轴对称，则下列结论中正确的是　　(　　)

(A) $f(4.5)<f(6.5)<f(7)$.

(B) $f(4.5)<f(7)<f(6.5)$.

(C) $f(7)<f(4.5)<f(6.5)$.

(D) $f(7)<f(6.5)<f(4.5)$.

【分析】由条件①可推出 $f(x)$ 的周期，由②可得到函数为增函数，再根据对称性可得答案.

【解析】由①知 $f(x+4)=f(x)$，可得 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数；由②知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增；由③知 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称. 结合上述结论，知 $f(4.5)=f(0.5)$，$f(7)=f(3)=f(1)$，$f(6.5)=f(2.5)=f(1.5)$，且 $f(0.5)<f(1)<f(1.5)$.

【答案】B

考点 3：反函数

反函数是每年高考必考的内容，涉及到反函数的求法、图象的对称性等.

【例 4】设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数，则以下不等式中恒成立的是　　(　　)

(A) $f^{-1}(x)\leqslant 2x-1$.　　(B) $f^{-1}(x)\leqslant 2x+1$.

(C) $f^{-1}(x)\geqslant 2x-1$.　　(D) $f^{-1}(x)\geqslant 2x+1$.

【分析】可先求反函数，再根据图象得到.

【解析】先求得 $f^{-1}(x)=x^2(x\geqslant 0)$.

分别作出 $f^{-1}(x)=x^2$ 与 $y=2x-1$ 和 $y=2x+1$ 的图象，显然 C 成立.

【答案】C

【点评】本题考查反函数的概念以及数形结合的能力.

考点 4：导数的概念与应用

主要考查函数在某一点处的导数值、导数的几何意义、导函数的概念以及导数的应用.

【例 5】函数 $f(x)=-x^3+3x^2+1$ 在下列哪个区间上为增函数　　(　　)

(A) $(-\infty,2),(2,+\infty)$.　　(B) $(-\infty,2)$.

(C) $(-2,0)$.　　(D) $(0,2)$.

【分析】先求出函数的导数，再代入答案验证.

【解析】$f'(x)=-3x^2+6x$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<2$.

【答案】D

【例 6】曲线 $y=x^3$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=-2$ 所围成的三角形的面积为________.

【解析】$\because y'=3x^2$，$\therefore$ 曲线在 $(-1,-1)$ 处的切线方程为 $y+1=3(x+1)$，令 $y=0$，得切线与 x 轴的交点为 $(-\frac{2}{3},0)$，切线与直线 $x=-2$ 交于点 $(-2,-4)$，$\therefore$ 曲线 $y=x^3$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=-2$ 所围成的三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot(2-\frac{2}{3})\cdot 4=\frac{8}{3}$.

【答案】$\frac{8}{3}$

考点 5：函数的综合应用

【例 7】已知函数 $f(x)=x\sin x$，若 x_1、$x_2\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，且 $f(x_1)>f(x_2)$，则下列结论中必成立的是　　(　　)

(A) $x_1>x_2$.　　(B) $x_1+x_2>0$.

(C) $x_1<x_2$.　　(D) $|x_1|>|x_2|$.

【分析】先由 $f(x)=x\sin x$ 知其为偶函数，再在单调区间上解决问题.

【解析】(法一) 由函数 $f(x)$ 为偶函数，x_1、$x_2\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，知 $|x_1|$、$|x_2|\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是增函数，

所以由 $f(|x_1|)>f(|x_2|)$，可得 $|x_1|>|x_2|$.

(法二) 特殊值淘汰法.

取 $x_1=-\frac{\pi}{3}$，$x_2=\frac{\pi}{4}$，则有 $f(x_1)>f(x_2)$.

但此时 $x_1<x_2$，且 $x_1+x_2<0$，故 A、B 不成立.

又取 $x_1=\frac{\pi}{3}$，$x_2=\frac{\pi}{4}$，故 C 也不成立.

【答案】D

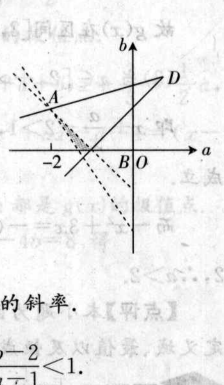
【例 8】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+2bx+c$ 在 $(0,1)$ 内取得极大值，在 $(1,2)$ 内取得极小值，则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是________.

【分析】通过对函数 $f(x)$ 求导，将 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得极大值、在 $(1,2)$ 内取得极小值的问题转化为研究二次方程 $f'(x)=x^2+ax+2b=0$ 的根的分布问题，利用二元一次不等式组的几何背景，联系斜率公式，运用数形结合的数学思想求得取值范围.

【解析】$f'(x)=x^2+ax+2b$.

依题意，方程 $x^2+ax+2b=0$ 的一个根大于 0 且小于 1，另一个根大于 1 且小于 2，

$$\therefore\begin{cases}f'(0)>0,\\f'(1)<0,\\f'(2)>0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}b>0,\\a+b+2>0,\\a+2b+1<0.\end{cases}$$



不等式组表示的平面区域如图所示，其中 $A(-2,1)$，$B(-1,0)$，$D(1,2)$.

设 $C(a,b)$ 为可行域（阴影部分）内任一点，而 $\frac{b-2}{a-1}$ 的几何意义为直线 CD 的斜率.

由图可知 $k_{BD}>k_{CD}>k_{AD}$，故 $\frac{1}{4}<\frac{b-2}{a-1}<1$.

【答案】$(\frac{1}{4},1)$

B 主观题

高考主观题中，一般有一道函数题，考查的内容通常是函数的基本概念、函数的图象和性质、函数与数学其它知识的交汇(如导数、数列、不等式、解析几何等)函数应用题等.

题型一：函数的基本概念

函数的基本概念包括映射、函数的"三要素"、函数的图象等.求函数的定义域与解析式是每年必考的内容，解题时要强化定义域优先的意识. 函数的图象是函数"形"的体现，解函数题要注意运用基本初等函数的图象.

【例 9】已知函数 $f(x)=\lg(x+\frac{a}{x}-2)$，其中 a 是大于零的常数.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2)当 $a\in(1,4)$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上的最小值；

(3)若对于任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒有 $f(x)>0$，试确定 a 的取值范围.

【分析】由对数的真数大于 0，通过分类讨论可求得定义域；求函数的最值可利用函数的单调性，对于函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a\neq 0)$ 通常用导数考虑.

【解析】(1)由已知得 $x^2-2x+a>0$.

当 $a>1$ 时，$\Delta<0$，$\therefore x^2-2x+a>0$ 恒成立，

$\therefore$ 只需 $x>0$.

当 $0<a\leqslant 1$ 时，$0<1-\sqrt{1-a}<1+\sqrt{1-a}$，

则 $0<x<1-\sqrt{1-a}$ 或 $x>1+\sqrt{1-a}$，

综上：当 $a>1$ 时，函数的定义域为 $(0,+\infty)$；

当 $0<a\leqslant 1$ 时，函数的定义域为

$(0,1-\sqrt{1-a})\cup(1+\sqrt{1-a},+\infty)$.

(2)当 $1<a<4$ 时，令 $g(x)=x+\frac{a}{x}$，

$\therefore g'(x)=1-\frac{a}{x^2}$，在区间 $[2,+\infty)$ 上恒有 $g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数，易得 $f(x)_{\min}=\lg\frac{a}{2}$.

(3)当 $x\in[2,+\infty)$ 时，恒有 $f(x)>0$，

即 $x+\frac{a}{x}-2>1$，$a>-x^2+3x$ 对一切 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立.

而 $-x^2+3x=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，当 $x=2$ 时取得最大值 2，$\therefore a>2$.

【点评】本小题为函数背景下的不等式问题，考查函数的定义域、最值以及恒成立问题.

题型二：函数的性质

【例 10】已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}(x-\frac{1}{x})$.

(1)求 $f(x)$ 的表达式；

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性与单调性；

(3)当 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ 时，求满足 $f(1-m)+f(1-m^2)<0$ 的 m 的取值范围.

【分析】令 $t=\log_a x$，可求出 $f(t)$，再利用定义判断函数的奇偶性与单调性. 对于(3)，可利用(2)的结果"脱"去 f，但不能忽视函数的定义域.

【解析】(1)令 $t=\log_a x$，则 $x=a^t$，

$\therefore f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$，

$\therefore f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})\ (x\in\mathbf{R})$.

(2) $\because x\in\mathbf{R}$，由 $f(-x)=-f(x)$ 知 $f(x)$ 为奇函数；

当 $a>1$ 时，$a^2-1>0$，a^x、$-a^{-x}$ 递增，

$\therefore f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数；

当 $0<a<1$ 时，$a^2-1<0$，a^x、$-a^{-x}$ 递减，

$\therefore f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(3)由(2)知 $f(1-m)+f(1-m^2)<0$

可化为 $f(1-m)<f(m^2-1)$，

即 $\begin{cases}1-m<m^2-1,\\-1<1-m<1,\\-1<m^2-1<1,\end{cases}$ 解得 $1<m<\sqrt{2}$.

【点评】求函数的解析式常用换元法. 判断函数的奇偶性要先考虑函数的定义域. 判断函数的单调性可用定义法与导数法，也可借助基本初等函数的单调性. 解决抽象不等式要注意等价转换.

【例 11】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$.

(1)试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(2)试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2008,2008]$ 上的根的个数，并证明你的结论.

【分析】先由条件得出函数的周期，然后判断奇偶性；根据 $f(x)=0$ 在一个周期内的根的个数，再求出在闭区间 $[-2008,2008]$ 上的根的个数.

【解析】(1)在区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$，

故 $f(0)\neq 0$. 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$，矛盾.

即 $f(x)$ 不是奇函数.

由 $f(2-x)=f(2+x)\Rightarrow f(x)=f(4-x)$，

$f(7-x)=f(7+x)\Rightarrow f(x)=f(14-x)$，

$\therefore f(4-x)=f(14-x)$，

$\therefore f(x)=f(x+10)$，

从而知函数 $y=f(x)$ 是以 $T=10$ 为周期的函数.

由题意，$f(-3)=f(7)\neq 0$，即 $f(-3)\neq f(3)$，故 $f(x)$ 不是偶函数.

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 是非奇非偶函数.

(2)若存在 $x_0\in(7,10)$ 使得 $f(x_0)=0$，则 $f(14-x_0)=f(x_0)=0$ 而 $14-x_0\in(4,7)$ 这与已知矛盾，

$\therefore f(x)=0$ 在区间 $(0,10)$ 有且只有两个解，并且 $f(0)\neq 0$.

又 $y=f(x)$ 是以 $T=10$ 为周期的函数，故 $f(10k)\neq 0,(k\in\mathbf{Z})$.

则在区间 $[-2000,2000]$ 上，

方程 $f(x)=0$ 共有 $\frac{4000}{10}\times 2=800$ 个解.

在区间 $[2000,2008]$ 上，方程 $f(x)=0$ 有且只有两个