中等职业学校规划教材

数学

曾繁京 主编 李平 主审

化学工业出版社

中等职业学校规划教材

数学

曾繁京 主编　李 平 主审

化学工业出版社

·北 京·

本书共分八章，主要介绍了集合与函数、简易逻辑、三角函数、解三角形、复数、数列、排列组合、平面解析几何、空间图形及其计算等方面的内容，各章穿插了数学在化工生产和机械、计算机、电工、物理等学科中的应用知识，让学生通过学习学会应用数学知识解决实际问题，提高学生解决问题的综合能力.

本书图文并茂，通俗易懂，内容安排上删除了繁杂的公式推导，突出了基础知识和基本技能，适合目前中职学生的基础知识和认知规律. 通过对本书的学习，使学生掌握化工中级工各专业（工种）所要求的数学基础知识.

本书为中等职业学校规划教材和全国化工中级工教材，也可作为企业中级工、高级工培训教材及其他相关专业基础课学习的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学/曾繁京主编. —北京：化学工业出版社，2008.5
中等职业学校规划教材
ISBN 978-7-122-02710-8

Ⅰ.数… Ⅱ.曾… Ⅲ.数学课-专业学校-教材 Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 056901 号

责任编辑：于 卉　　文字编辑：刘 静
责任校对：陶燕华　　装帧设计：尹琳琳

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm 1/16 印张 10 字数 243 千字 2008 年 7 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：18.00 元

前　言

本书是根据中国化工教育协会批准颁布的《全国化工中级技工教学计划》，由全国化工高级技工教育教学指导委员会组织编写的中等职业学校规划教材和全国化工中级技工教材，也可作为企业工人培训教材使用.

本书主要介绍集合与函数、简易逻辑、三角函数、解三角形、复数、数列、排列组合、平面解析几何、空间图形及其计算等方面的内容.

本书编写根据“够用、实用、适用”的原则，充分体现职业教育的特色，内容力求通俗易懂、涉及面宽，注重突出基础知识和基本技能. 本书尽可能包含《职业技能鉴定规范》中所有工种初、中级工所涵盖的基础知识，力求做到更好地为专业课服务，为今后的专业课打好基础. 每章末的复习题主要是为了检验学生掌握基础理论和综合知识而安排的练习内容，有助于培养学生分析和解决实际问题的能力.

本书由曾繁京主编、李平主审. 全书分为八章，第一章、第五章由曾繁京编写；第二章、第六章和第八章由黄华漫编写；第三章由张继奎编写；第四章由张建编写；第七章由梁占禄编写；全书由曾繁京统稿.

本教材在编写过程中得到了中国化工教育协会、全国化工高级工教育教学指导委员会、化学工业出版社及相关学校领导和同行们的大力支持和帮助；同时得到了广西石化高级技工学校、陕西石化高级技工学校、四川化工技校、山东化工高级技工学校、山西省工贸学校的关心和支持；广西石化高级技工学校王琳忠老师和杨巨恩老师分别在审稿和文字录入方面给予了很多帮助，在此一并表示感谢.

由于编写水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者和同行们批评指正.

编者

2008 年 2 月

目　录

第一章 集合与函数

第一节 集 合

一、集合与元素

引例 先考察下列几组对象：①某个班级的全体学生；②某个化工厂所有的化工设备；③1，3，5，7；④所有的直角三角形；⑤直线 $y=2x+1$ 上所有的点.

它们分别是由一些人、物、数、图形和点组成的整体，且每个整体中的对象都具有某种共同属性.

人们往往把具有共同性质的事物联合在一起研究，这就形成了集合的概念. 一般地，具有某种共同属性的确定对象的全体称为**集合**（简称**集**）. 集合里的各个确定对象称为这个集合的**元素**. 例如，③是由 1，3，5，7 这四个数组成的集合，其中对象 1，3，5，7 都是这个集合的元素，这些元素的共同属性是“小于 9 的正奇数”.

集合中的元素可以是各种具体的或抽象的事物，但本章主要研究数的集合（简称**数集**）和点的集合（简称**点集**）.

通常，集合用大写拉丁字母 A，B，C…表示，元素用小写拉丁字母 a，b，c…表示，下面是一些常用的数集及其记法.

全体实数的集合简称为**实数集**，记作 **R**.

全体有理数的集合简称为**有理数集**，记作 **Q**.

全体整数的集合简称为**整数集**，记作 **Z**.

全体自然数的集合简称为**自然数集**，记作 **N**.

一般地，若 a 是集合 A 的元素，则称 a **属于A**，记作 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素，则称 a **不属于A**，记作 $a\notin A$. 例如，$3\in \mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin Q$.

由有限个元素组成的集合叫作有限集，如上面引例中的①、②、③都是有限集. 只含有一个元素的集合称为**单元素集**. 如方程 $x-6=0$ 的解组成的集合（简称**解集**）就是一个单元素集. 不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 由无限个元素组成的集合叫无限集. 如上面引例中的④、⑤都是无限集.

集合中的元素必须是确定的. 任何一个对象是或不是这个集合的元素就确定了，如给出小于 9 的正奇数集，它只有 1、3、5、7 这四个元素，其他对象都不是它的元素.

集合中的元素又是互异的. 集合中的元素是不相同的，任何相同的对象归入同一个集合时，只能算作这个集合的一个元素.

二、集合的表示法

表示集合的方法，常用列举法和描述法两种.

1. **列举法**

把集合的所有元素不分次序地一一列举出来，写在大括号内，彼此用逗号分开，这种表示集合的方法称为**列举法**.

例 1 绝对值小于 5 的整数组成的集合，可以表示为：

$$\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$$

注 a 表示一个元素，$\{a\}$ 表示一个集合——单元素集.

一般地，列举法多用于表示元素个数较少的集合，当元素的个数很多或者无限多时，可以在列举出有代表性的元素后，用省略号表示那些被省略的元素.

例 2 1000 以内的自然数组成的集合，可以表示为：

$$\{0,1,2,3,\cdots,999,1000\}$$

2. **描述法**

把集合中元素的共同属性用语言或数学表达式描述出来写在大括号内，这种表示集合的方法称为**描述法**.

例 3 不等式 $x^2-1>0$ 的解集，可以表示为：

$$\{x\in \mathbf{R} \mid x^2-\mathbf{1}>\mathbf{0}\}$$

例 4 直线 $y=x^3+1$ 上所有的坐标组成的集合（也称为点集），可以表示为：

$$\{(x,y) \mid y=x^3+1\}$$

为了简便，有时可以把集合中元素的共同属性直接写在大括号内，如所有等腰三角形的集合，可以表示为：

$$\{\text{等腰三角形}\}$$

三、集合与集合的关系

定义 设 A、B 是两个集合，若 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作 A 包含于 B（或 B 包含 A）.

对于任何一个集合 A，由于它的任何一个元素都属于 A 本身，所以 $\boldsymbol{A\subseteq A}$，**即任何一个元素是它本身的子集.**

当 A 不是 B 的子集（即至少有一个元素 $a\in A$，但 $a\notin B$）时，记作 $\boldsymbol{A\subseteq B}$（或 $\boldsymbol{B\supseteq A}$）.

注 符号 $\in$ 与 $\subseteq$ 不同：$\in$ 用于表示元素与集合之间的关系，$\subseteq$ 用于表示集合与集合之间的关系.

定义 设 A、B 是两个集合，若 A 是 B 的子集，且至少有一个元素 $a\in B$，但 $a\notin A$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$），读作 A 真包含于 B（或 B 真包含 A）. 当 A 不是 B 的真子集时，记作 $A\not\subset B$（或 $B\supset A$）.

当 A 是 B 的真子集时，可用图 1-1 表示.

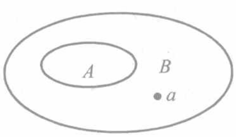

图 1-1 真子集图示

注 空集是任何集合的子集，而且空集是任何非空集的真子集.

例 5 写出集合 $\{2,3\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是真子集.

解 $\{2,3\}$ 的所有子集为：$\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{2,3\}$. 其中 $\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$ 是 $\{2,3\}$ 的真子集.

定义 设 A、B 两个集合，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称这两个**集合相等**，记作 $A=B$，读作 A 等于 B.

由集合相等的定义知，两个集合相等时，它们是由完全相同的元素组成的.

例如，设 $A=\{2,3\}$，$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$，则 $A=B$.

四、交集、并集

1. 交集

引例 已知两个集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 和 $B=\{b,d,e,f\}$，容易看出，集合 $C=\{b,d\}$ 是由 A、B 所有公共元素组成的集合.

定义 设 A，B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A，且 x\in B\}$，读作 A 交 B.

图 1-2 中的阴影部分表示 A 与 B 的交集 $A\cap B$.

对于任何集合 A 与 B，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则称 A 与 B **相交**；若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B **不相交**；显然 $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

例 6 设 $A=\{6 的正约数\}$，$B=\{8 的正约数\}$，用列举法写出 6 与 8 的正公约数集.

解 因为 $A=\{1,2,3,6\}$，

$B=\{1,2,4,8\}$

由交的定义知，6 与 8 的正公约数集是：

$$A\cap B=\{1,2,3,6\}\cap\{1,2,4,8\}=\{1,2\}.$$

例 7 设 $A=\{x \mid x\geqslant-3\}$，$B=\{x \mid x<2\}$，$C=\{x \mid x<0\}$，求 $A\cap B\cap C$.

解 $A\cap B\cap C=\{x \mid x\geqslant-3\}\cap\{x \mid x<2\}\cap\{x \mid x<0\}=\{-3\leqslant x<0\}$.

其几何意义如图 1-3 所示.

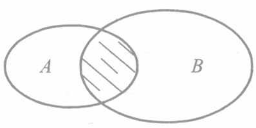

图 1-2 交集的图示

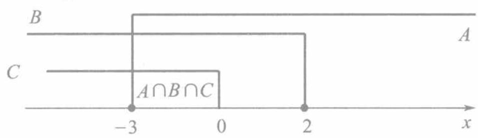

图 1-3 例 7 中交集的几何意义

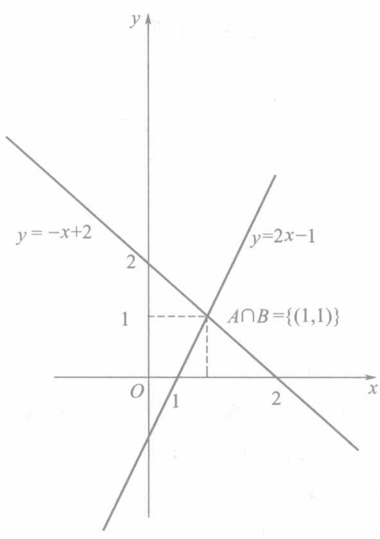

图 1-4 例 8 中解的几何意义

例 8 设 $A=\{(x,y) \mid y=2x-1\}$，$B=\{(x,y) \mid y=-x+2\}$，求解 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{(x,y) \mid y=2x-1\}\cap\{(x,y) \mid y=-x+2\}$

$$=\left\{(x,y) \middle| \begin{cases} y=2x-1 \\ y=-x+2 \end{cases}\right\}=\{(1,1)\}.$$

这是一个单元素集，其几何意义如图 1-4 所示，是两条直线的交点.

2. 并集

引例 两个集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 和 $B=\{b,d,e,f\}$.

容易看出，集合 $C=\{a,b,c,d,e,f\}$ 是属于 A 或者 B 的所有元素组成的集合.

定义 设 A、B 是两个集合，由属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（**简称并**），记作：

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}，读作 A 并 B.$$

图 1-5 中的阴影部分表示 A 与 B 的并集 $A\cup B$，其中包括 A 与 B 相交和不相交两种情形.

(a) A与B相交　　(b) A与B不相交

图 1-5　并集的图示

显然，对于任何集合 A 与 B，有 $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$.

例 9　设 $A=\{-2,-1,0,2\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，求 $A\cup B$.

解
$$\begin{aligned}A\cup B&=\{-2,-1,0,2\}\cup\{0,1,2,3\}\\&=\{-2,-1,0,1,2,3\}.\end{aligned}$$

例 10　设 $A=\{x \mid x\leqslant -3\}$，$B=\{x \mid x>2\}$，求 $A\cup B$、$A\cap B$.

解
$$\begin{aligned}A\cup B&=\{x \mid x\leqslant -3\}\cup\{x \mid x>2\}\\&=\{x \mid x\leqslant -3 \text{ 或 } x>2\}.\end{aligned}$$

其几何意义如图 1-6 所示.

$$A\cap B=\{x \mid x\leqslant -3\}\cap\{x \mid x>2\}=\varnothing$$

图 1-6　$A\cup B$ 的图示

课堂练习 1-1

1. 用列举法表示下列各集合

(1) 绝对值不超过 3 的整数组成的集合；

(2) 14 的正约数集；

(3) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的解集；

(4) $\{x \mid -10\leqslant x\leqslant 10,\ x\in \mathbf{Z}\}$；

(5) $\{(x,y) \mid x^2+y^2=8,\ x\in \mathbf{Z},\ y\in \mathbf{Z}\}$；

(6) $\{x \mid x^2-4<0,\ x\in \mathbf{R}\}$.

2. 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d,e,f\}$，用适当的符号（$\in,\notin,\subseteq,\nsubseteq,\not\subset,\subset,=$）填空.

(1) a ________ A；　　(2) b ________ $\{b\}$；

(3) d ________ A；　　(4) a ________ $\{b\}$；

(5) $\{b,c,a\}$ ________ A；　　(6) 0 ________ A；

(7) $\{0\}$ ________ B；　　(8) 0 ________ B；

(9) A ________ B；　　　　　　(10) $\varnothing$ ________ A；

(11) 0 ________ $\varnothing$；　　　　　　(12) $\varnothing$ ________ B.

3. 回答下列问题

(1) 所有胖人能不能构成一个集合？为什么？

(2) 到一条线段两个端点的距离相等的点集是什么？

(3) 空集$\varnothing$有多少个子集？有没有真子集？

(4) 空集$\varnothing$与单元素集 $\{0\}$ 的区别是什么？

4. $A=\{0,1,2,3\}$，试写出 A 的所有子集和真子集.

5. 设 $A=\{1,2,4,8\}$，$B=\{1,2,3,4,6,8,12\}$，$C=\{$小于 8 的自然数$\}$，

求 $A\cap B$、$A\cup B$、$A\cup C$、$B\cap C$、$(A\cap B)\cap C$、$A\cap(B\cap C)$、$A\cup B\cup C$.

6. 设 $A=\{x\mid -3<x<5\}$，$B=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$，求 $A\cap B$、$A\cup B$.

7. 设 $A=\{(x,y)\mid x+y=5\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=1\}$，求 $A\cap B$、$A\cup B$.

8. 设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

第二节　简单的不等式与区间

一、不等式及其性质

1. 不等式

用不等号“$<$”、“$>$”或“$\leqslant$”、“$\geqslant$”连接两个代数式所成的式子叫作不等式. 几个含有相同未知数的不等式连接起来，叫作不等式组.

不等式的性质如下.

(1) $a<b\Leftrightarrow b-a>0$；

(2) $a>b\Leftrightarrow b<a$；

(3) $a>b$，$b>c\Leftrightarrow a>c$；

(4) $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$（其中 c 是一个数或代数式）；

(5) $a>b$，$c>0\Leftrightarrow ac>bc$；$a>b$，$c<0\Leftrightarrow ac<bc$（其中 c 是一个数或代数式）.

2. 一元一次不等式

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是一次的不等式叫作**一元一次不等式**. 任何一个一元一次不等式都可以利用不等式的性质，化成 $ax>b$ 的形式，且：

当 $a>0$ 时，原不等式的解为 $x>\dfrac{b}{a}$；

当 $a<0$ 时，原不等式的解为 $x<\dfrac{b}{a}$.

例 11　解不等式 $2x+x>4x-1$.

解　移项、合并同类项得：

$$2x<4$$

两边同除以 2，得

$$x<2.$$

3. 一元一次不等式组

几个含有相同未知数的一元一次不等式联立起来，叫作**一元一次不等式组**.

解一元一次不等式组，就是解不等式组里的每个不等式，然后取各不等式的公共部分，即得不等式的解. 由两个一元一次不等式组成的不等式组的解为表 1-1 所列的四种情况.

表 1-1　一元一次不等式组的解

两个不等式的解	不等式组的解	两个不等式的解	不等式组的解
$x>a$，$x>b$　$(a<b)$	$x>b$	$x>a$，$x<b$　$(a<b)$	$a<x<b$
$x<a$，$x<b$　$(a<b)$	$x<a$	$x<a$，$x>b$　$(a<b)$	无解

例 12　解不等式组

$$\begin{cases} 2x-1>x+1, \\ x+9>3x-1. \end{cases}$$

解　不等式 $2x-1>x+1$ 的解是 $x>2$，不等式 $x+9>3x-1$ 的解是 $x<5$，所以不等式的解是 $2<x<5$.

4. 一元二次不等式

含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的不等式，叫作**一元二次不等式**. 它的一般形式是：

$$ax^2+bx+c>0\ (a\neq 0)$$

或

$$ax^2+bx+c<0\ (a\neq 0)$$

下面利用二次函数的图像来讨论一元二次不等式的解法. 此处只考虑 $a>0$ 的情形，(当 $a<0$ 时，不等式两边同乘以 -1，也就变成了 $a>0$).

设 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$，在直角坐标系中该函数的图像分为下面三种情况.

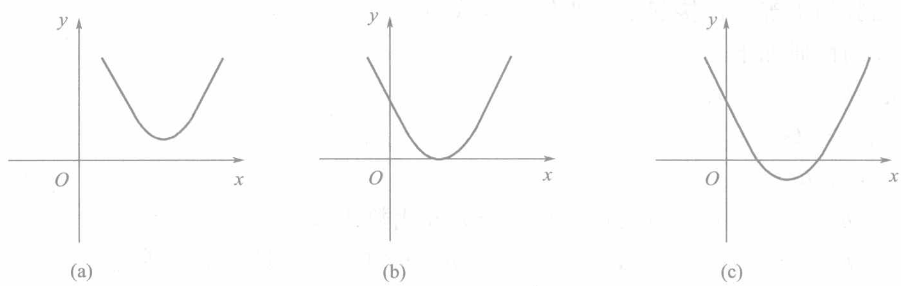

图 1-7　$y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 的图像

① 当 $b^2-4ac<0$ 时，由图 1-7(a) 可知，$y>0$ 的解是任意实数，$y<0$ 无解.

② 当 $b^2-4ac=0$ 时，由图 1-7(b) 可知，$y>0$ 的解是 $x\neq -\dfrac{b}{2a}$ 的任意实数，$y<0$ 无解.

③ 当 $b^2-4ac>0$ 时，由图 1-7(c) 可知，$y>0$ 的解是 $x<x_1$ 或 $x>x_2$，$y<0$ 的解是 $x_1<x<x_2$（其中 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根). 为简便起见，可列表 1-2 如下.

表 1-2　方程根的不同情况

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c>0$ 的解	$ax^2+bx+c<0$ 的解
$\Delta<0$	一切实数	无解
$\Delta=0$	$x\neq -\dfrac{b}{2a}$ 的一切实数	无解
$\Delta>0(x_1<x_2)$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x_1<x<x_2$

例 13　解不等式 $2x^2-3x-2>0$.

解　因为 $\Delta=(-3)^2-4\times2\times(-2)=25>0$，方程 $2x^2-3x-2=0$ 的根是

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=2.$$

所以，不等式的解是：$x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>2$.

5. 绝对值不等式

绝对值不等式的一般形式是

$$|f(x)|<a \text{ 或 } |f(x)|>a\ (a>0,\ f(x)\text{是 } x \text{ 的函数}).$$

绝对值不等式要根据绝对值的意义，设法去掉绝对值的符号，化为不含绝对值符号的一般不等式或不等式组来解.

(1)　$|f(x)|<a$ 可化为　$-a<f(x)<a$.

(2)　$|f(x)|>a$ 可化为　$f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$.

例 14　解不等式　$|x-6|<9$.

解　由原不等式可得：　$-9<x-6<9$，

各加上 6，得　$-3<x<15$

所以原不等式的解是　$-3<x<15$

二、区间的概念

在研究数的集合的时候，往往指在一定范围内的全体实数，这里把介于两个实数 a 和 b 之间的实数集叫作区间，这两个实数叫区间的端点．由于实数与数轴上的点是一一对应的，所以区间也可以用数轴上以 a，b 为端点的一段线来表示，线段两端就是区间的端点，端点距离称为区间的长.

定义　设 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，

(1)　数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 $(a,\ b)$，如图 1-8(a) 所示；

(2)　数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,\ b]$，如图 1-8(b) 所示；

(3)　数集 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为**左开右闭区间**，记作 $(a,\ b]$，如图 1-8(c) 所示；

(4)　数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 称为**左闭右开区间**，记作 $[a,\ b)$，如图 1-8(d) 所示.

由于实数与数轴上的点是一一对应的，所以上述四种区分区间分别可以用数轴上以 a，b 为端点的一段线段来表示．a，b 称为**区间的端点**，两个端点间的距离称为**区间的长**.

上述四种区间统称为**有限区间**．它们在数轴上的表示如图 1-8 所示，其中，包含在区间内的端点用实心表示，不包括在区间内的端点用空心点表示.

定义　设 a，$b\in\mathbf{R}$，

(1)　数集 $\{x\mid x>a\}=\{a<x<+\infty\}$，记作 $(a,\ +\infty)$；

(2)　数集 $\{x\mid x\geqslant a\}=\{a\leqslant x<+\infty\}$，记作 $[a,\ +\infty)$；

(3)　数集 $\{x\mid x<b\}=\{-\infty<x<b\}$，记作 $(-\infty,b)$；

(4)　数集 $\{x\mid x\leqslant b\}=\{-\infty<x\leqslant b\}$，记作 $(-\infty,b]$；

(5)　数集 $\mathrm{R}=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$ 记作 $(-\infty,+\infty)$.

符号 $-\infty$ 和 $+\infty$ 分别读作**负无穷大**和**正无穷大**．它们并不代表某个确定的数，而是描述了实数在正、负两个方向上的变化趋势.

上述五种区间统称为**无限区间**，同样可以在数轴上的表示，如图 1-9 所示.

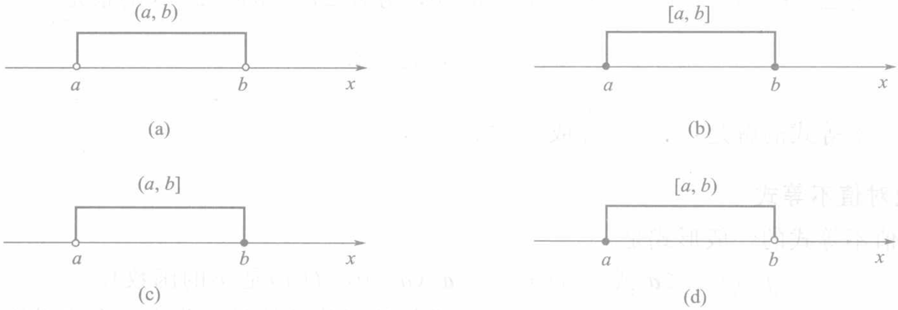

图 1-8　有限区间图示

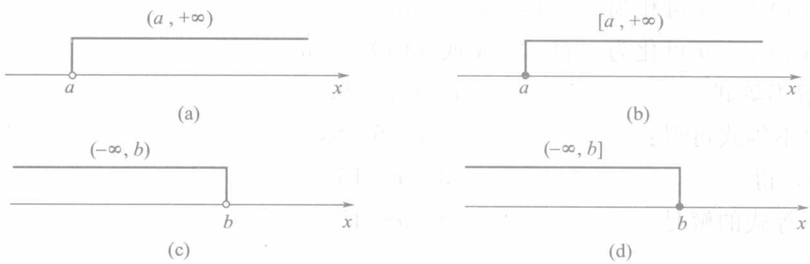

图 1-9　无限区间图示

显然，区间是实数集 R 的子集的另一种表示形式.

课堂练习 1-2

1. 用不等号填空

(1) 如果 $-a<6$，那么 a ________ -6.

(2) $a>b$，$b>0$ 时，ab ____ 0，$a+b$ ____ 0.

(3) $a>b$，$b<0$ 时，ab ____ 0.

(4) $a<b$，$b<0$ 时，ab ____ 0，$a+b$ ____ 0.

2. 解下列不等式或不等式组

(1) $5x-3\leqslant 4x-1$；　　(2) $7+2x>6+3x$；

(3) $\begin{cases}5x>-4,\\ x<2.\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x<7,\\ x<-1.\end{cases}$

(5) $|x+4|>9$；　　(6) $3x^2-7x+2<0$.

3. 解下列不等式，并将解集在数轴上表示出来：

(1) $x^2-8x+12>0$；　　(2) $x^2-16\leqslant 0$；

(3) $x^2-25>0$；　　(4) $3-x\geqslant 2x^2$.

第三节　函数的概念及性质

一、函数的概念

在初中，我们学过函数的概念，其定义为：设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如

果对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定值与它对应，则称 **y 是 x 的函数**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，x 的取值范围称为**函数的定义域**，与 x 对应的 y 的值称为**函数值**，函数值的全体称为**函数的值域**.

如图 1-10 所示，现在用非空数集 D 表示函数的定义域，用非空数集 M 表示函数的值域，用字母表示对应法则，于是函数就是由 D、M、f 这三者组成的，记作 $y=y(x)$.

例如，对于函数 $y=\sqrt{x-3}$，其定义域 $D=\{x\geqslant 3\}$，值域 $M=\{y\mid y\geqslant 0\}$，对应法则 f 为自变量的值先减 3，再开平方，最后取算术根.

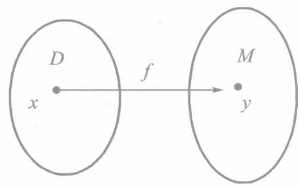

图 1-10　函数图示

如果同时研究多个函数，则用不同符号表示它们，如 $f(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$、$F(x)$ 等.

对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，当自变量 x 在定义域 D 内取一个确定的值 x_0 时，对应的函数值记作 $f(x_0)$.

例 15　设 $f(x)=x^2+x-6$，求 $f(2)$、$f(a)$、$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

解

$$f(2)=2^2+2-6=0;$$
$$f(a)=a^2+a-6;$$
$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}-6=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}-6.$$

函数的定义域要根据实际情况去确定．对于用数学式子表示的函数，如果不加说明，则函数的定义域就是使得数学式子有意义的数集.

例 16　求 $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$ 函数的定义域.

解　使根式 $\sqrt{x+1}$ 有意义的集合为 $\{x\mid x\geqslant -1\}$，使分式 $\dfrac{1}{2-x}$ 有意义的集合为 $\{x\mid x\neq 2\}$，所以所求函数的定义域为

$$\{x\mid x\geqslant -1\}\cap\{x\mid x\neq 2\}=\{x\mid x\geqslant -1\text{ 且 }x\neq 2\}=[-1,2)\cup(2,+\infty).$$

二、函数的表示方法

在函数的定义中，并没有规定用什么方法来表示函数，为了能更好地研究函数关系，就采取适当的方法把它们表示出来．函数的表示方法通常有三种：**表格法、图示法和公式法**.

(1) **表格法**　表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出来，这样函数关系就用表格表示出来了．例如大家熟悉的对数表、开平方表和三角函数表都是用表格来表示函数的.

表格法表示函数的优点是使用方便，可以直接得到函数值，缺点是数据不全，不能查出函数的任意值，当表很大时，变量变化的全部情况不易从表上看清楚，不便于进行运算和分析.

(2) **图示法**　函数 $y=f(x)$ 的图形（见图 1-11）直观地表达了自变量 x 和因变量 y 之间的关系．图示法的优点是直观性强，函数的主要特性在图上都一目了然．例如，因变量的增减情况及因变量的增减快慢等都可以通过曲线的升、降及陡、缓表示出来.

例 17　某河道的一个断面函数如图 1-12 所示，在断面 Oxy 上，离岸边距离为 x 处的深度为 y．x，y 之间的函数关系由图 1-12 表示，函数的定义域为 $[0，b]$.

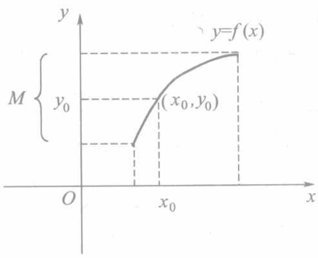

图 1-11　函数 $y=f(x)$ 图示

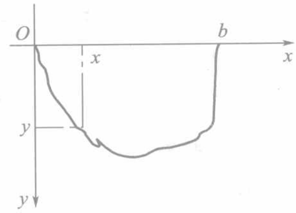

图 1-12　河道断面函数图

图示法的缺点是不便于理论上的分析、推导和运算.

(3) **公式法**　用数学公式表示自变量和因变量之间的关系，是函数的公式表示法．用公式法表达函数的优点是简明准确，便于理论分析，缺点是不够直观，并且有些实际问题中遇到的函数关系，很难甚至不能用公式法来表示.

函数的三种表示法各有优点和缺点，针对不同的问题可以采取不同的表示法，有时为了把函数关系表达清楚，往往同时使用两种以上的表示法．本书一般采用公式法表示函数，为了直观经常辅之以图示法（即画出函数的图形）.

用公式法表示函数，通常用一个公式就可以了，如 $x=\sin x$，$s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 等，但是有些函数，当自变量在不同的范围内取值时，对应法则不能用同一个表达式，而要用两个或两个以上的表达式来表示，这类函数称为**分段函数**.

例 18　旅客携带行李乘飞机时，行李的重量不超过 20 千克时不收费，若超过 20 千克，每超过 1 千克收运费 a 元，试建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系.

解　因为，当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，运费 $y=0$，而当 $x>20$ 时，只有超过的部分 $x-20$ 按每千克收运费 a 元，此时，$y=a(x-20)$．于是函数 y 写成：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ a(x-20), & x>20.\end{cases}$$

这样便建立了行李重量与行李运费之间的函数关系.

分段函数是公式法表达函数的一种方式．在理论分析和实际应用方面都是很有用的，需要注意的是，分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

三、函数的增减性

引例　函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内，随着 x 的增大而减小；在区间 $(0,+\infty)$ 内，随着 x 的增大而增大．一般地，对函数的增减性有下述定义.

定义　设区间 G 是函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 的一个子集（即 $G\subseteq D$），任取 x_1、$x_2\in G$，当 $x_1<x_2$ 时，

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 G 上是增函数 [见图 1-13(a)]；

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 G 上是减函数 [见图 1-13(b)].

如果 $y=f(x)$ 在某个区间 G 上是增函数或减函数，那么就说 $f(x)$ 在区间 G 上具有（严格的）**单调性**，区间 G 称为 $f(x)$ 的**单调区间**.