最新版

全国硕士研究生入学统一考试历年试题

名家解析及预测

理工数学二

（修订本）

刘 斌 编

海洋出版社

最新版

全国硕士研究生入学统一考试

历年试题名家解析及预测

理工数学二

（修订本）

刘 斌 编

海洋出版社

2001年·北京

图书在版编目（CIP）数据

最新版全国硕士研究生入学统一考试历年试题名家解析及预测．理工数学二/刘斌编．－北京：海洋出版社，2001

ISBN 7－5027－4957－8

Ⅰ．最…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．高等数学－研究生－入学考试－试题　Ⅳ．G643－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 15330 号

海洋出版社 出版发行

（100081　北京市海淀区大慧寺路 8 号）

北京市房山印刷厂印刷　新华书店发行所经销

2001 年 2 月第 2 版　2001 年 2 月北京第 1 次印刷

开本：787×1092　1/16　印张：84.125（总）

字数：1920 千字（总）　印数：3000 册

共 7 册　定价：112.00 元（每册 16.00 元）

海洋版图书印、装错误可随时退换

本书特点

1. 全国考研辅导名家主笔。
2. 解析透彻，权威性强。
3 掌握命题规律，预测准确，切题率高。

★★★★★
名家解析及预测

责任编辑:田家作
总 策 划:谭隆全
封面设计:东　方

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

出版说明

本套丛书具有资料完整、分析详细、解剖透彻和技巧灵活的特点。首先，汇集了1987～2001年数学，1991～2001年政治、英语的历届研究生入学考试试题，包括理科政治、文科政治、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四，共七册；其次，真正做到了逐题解析，透彻详细，论证严密，特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程，还对命题思路、解题的重点、难点进行了深入解析，并注重解题思路和规律的分析—总结与方法—技巧的提炼；最后对命题趋势作出预测，切题率高。

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，至今已有15年，共命制试卷100余份，数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治方面知识、能力和水平的要求，展示出统考以来三门基础课考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届，所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如，2001年数学一的第一大题第(1)小题与2000年数学二第二大题第(5)小题，2001年数学一的第六大题与1997年数学一的第三大题第(2)小题，2001年数学一的第九大题与1996年数学三的第十大题，2001年数学二的第一大题第(5)小题与2000年数学一的第(4)小题，2001年数学三、四的第二大题第(1)小题与1996年数学一第二大题第(2)小题，2001年数学三、四第二大题第(3)小题与1995年数学一第二大题第(5)小题，2001年数学一第三大题与1992年数学三第四大题，2001年数学三、四第七大题与1996年数学三第六大题，2000年数学一的第三二大题第(2)小题与1988年数学一的第二大题第(3)小题，2000年数学三、四的第九大题与1991年数学一的第七大题、1998年数学二的第十三大题，2000年数学一的第七大题与1995年数学一的第一大题第(4)小题，2000年数学二的第二大题第(2)小题与1997年数学二的第二大题第(3)小题，2000年数学一的第三大题与1991年数学二的第一大题第(5)小题，2000年数学二的第二大题第(5)小题与1997年数学二的第三大题第(5)小题，2000年数学三、四的第五大题与1991年数学三的第七大题、数学四第八大题，2000

年数学二的第九大题与1998年数学三的第二大题第(1)小题,2000年数学二的第一大题第(3)小题与1998年数学四的第一大题第(3)小题,2000年数学四的第十大题与1999年数学四的第十大题,1999年数学一的第三大题与1995年数学一的第三大题第(1)小题,1999年数学一填空题第(2)小题与1998年选择题的第(1)小题,1999年数学一选择题第(3)小题与1989年选择题第(4)小题,1999年数学二第十二大题与1991年数学一第七大题,1999年数学三填空题第(1)小题与19994年数学四第五大题,1999年数学三、四选择题第(2)小题与1997年数学三、四填空题第(2)小题,1999年数学三第九大题与1997年数学一第七大题第(2)小题,1999年数学四第九大题与1994年数学三第十大题等等都是相同或非常相似的,且解题思路几乎完全一样,可见仅在最近两年的数学考题中就有多达20余道题是与往届考题雷同的,考生若把这些历年试题全部消化巩固,将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此,广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历年考试资料作为参考,共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作,现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本丛书的考点预测部分是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶,具有极高的切题率。比如,从去年版本来看,2001年数学试题中的有关曲率、梯度与散度以及弹性等等;在2001年英语试题中语法结构方面预测到第1题,第2题,第5题,第9题,第10题;词汇方面预测到第11题,第13题,第14题,第16题,第18题,第20题,第22题,第23题,第25题,第30题;阅读理解方面预测到第2篇;短文写作方面准确预测到不是图表题(而2000年准确预测到是图表作文题)。

本丛书的文科政治和理科政治的4位作者中,有3位曾是教育部原政治命题组组长或命题组成员,1位是长期阅卷,并一直担任政治阅卷组组长。现在都是北京市和全国各大城市举办的大型考研辅导班和串讲班的主讲教授。所以,他们对历年试题的解析及预测的权威性强,可信度高。

本书对2002年的命题趋势作了新的预测,相信对即将参加研究生入学考试的广大同学具有重要的参考价值。

由于出版时间比较仓促,难免还有不当之处,恳请广大读者朋友批评指正,以使本系列丛书能不断完善。

考研试题研究组

目　录

第一篇　全国硕士研究生入学统一考试历年理工数学二试题、答案及解析 …… (1)

2001 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (1)

2001 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (4)

2000 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (12)

2000 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (15)

1999 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (26)

1999 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (29)

1998 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (39)

1998 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (42)

1997 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (53)

1997 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (56)

1996 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (66)

1996 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (69)

1995 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (78)

1995 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (81)

1994 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (88)

1994 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (91)

1993 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (99)

1993 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (102)

1992 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (109)

1992 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (112)

1991 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (118)

1991 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (121)

1990 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 …… (127)

1990 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 …… (130)

1989 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 ……………………… (136)
1989 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 ………… (139)
1988 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 ……………………… (149)
1988 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 ………… (152)
1987 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题 ……………………… (158)
1987 年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题答案及解析 ………… (160)
第二篇　全国硕士研究生入学统一考试理工数学二
试题分析及对 2002 年考研命题趋势的预测 ……………………… (165)

注:1987～1996 年理工数学二为原理工数学三

第一篇　全国硕士研究生入学统一考试 历年理工数学二试题、答案及解析

2001 年全国硕士研究生入学统一考试 理工数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} =$ ______.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为______.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,dx =$ ______.

(4) 过点 $(\dfrac{1}{2},0)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为______.

(5) 设方程 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解,则 $a=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|\leqslant 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$,则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A)0　　(B)1　　(C)$\begin{cases} 1 & |x|\leqslant 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$　　(D)$\begin{cases} 0 & |x|\leqslant 1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$

【　　】

(2) 设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

【　　】

(3) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

【　　】

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则

(A) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$

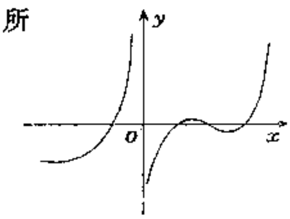
(B) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$

(C) 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)<x$，在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)>x$

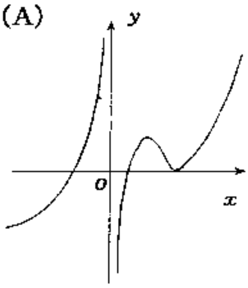
(D) 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$，在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)<x$

【　　】

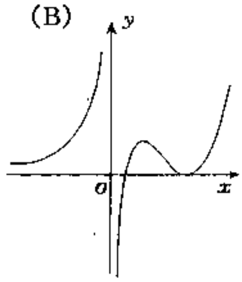
(5) 已知函数 $y=f(x)$ 在其定义域内可导，它的图形如右图所示，则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为



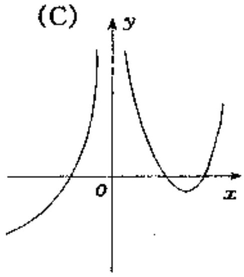
(A)



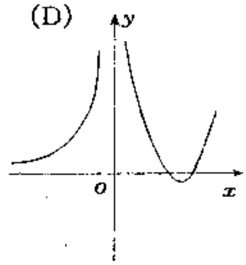
(B)



(C)



(D)



【　　】

三、(本题满分 6 分)

求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、(本题满分 7 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

五、(本题满分 7 分)

设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.(在直角坐标系下曲率公式为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$)

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$. 若

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2\mathrm{e}^x$$

求 $f(x)$.

七、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$,且 $f(0)=0,g(0)=2$,求 $\int_0^\pi\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$.

八、(本题满分 9 分)

设 L 是一条平面曲线,其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离,恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距,且 L 经过点$(\frac{1}{2},0)$.

(1) 试求曲线 L 的方程;

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线,使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

九、(本题满分 7 分)

一个半球体状的雪堆,其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比,比例常数 $K>0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状,已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的3小时内,融化了其体积的$\frac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少小时?.

十、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间$[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数,$f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在$[-a,a]$ 上至少存在一点 η,使

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

十一、(本题满分 6 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位阵,求 $\boldsymbol{X}$.

十二、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$,讨论实数 t 满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

2001年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题答案及解析

一、填空题

(1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

[解析]

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=-\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})(x^2+x-2)}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2) $x-2y+2=0$.

[解析]

等式两边对 x 求导,得

$$e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$$

将 $x=0,y=1$ 代入上式,得 $y'(0)=-2$

所以过点(0,1)处法线方程的斜率为$\dfrac{1}{2}$,故所求法线方程为

$$y-1=\frac{1}{2}(x-0)$$

即

$$x-2y+2=0$$

(3) $\dfrac{\pi}{8}$.

[解析]

注意利用对称区间上积分的性质.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2x)\cos^2x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^22x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{4}\sin4x\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$$

(4) $y\arcsin x=x-\dfrac{1}{2}$.

[解析]

$$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$$

可改写为 $$(y\arcsin x)' = 1$$
两边积分得 $$y\arcsin x = x + C$$
再由 $y(\frac{1}{2}) = 0$ 得 $$C = -\frac{1}{2}$$
故所求曲线方程为 $$y\arcsin x = x - \frac{1}{2}$$
[注] 本题也可直接按一阶线性微分方程求解.

(5) $\underline{-2}$.

[解析]

因为
$$\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & -(a-1) & 3 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & 2(a+2) \end{array}\right)$$
可见,当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时,$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 3$,方程组有惟一解;

当 $a = 1$ 时,$R(\mathbf{A}) \neq R(\bar{\mathbf{A}})$,方程组无解;

当 $a = -2$ 时,$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 2 < 3$,方程组有无穷多解.

故 $a = -2$.

二、选择题

(1) 应选(B).

[解析]

$\because |f(x)| \leqslant 1, \therefore f[f(x)] = 1$,从而 $f\{f[f(x)]\} = 1$.

(2) 应选(B).

[解析]

$\because (1 - \cos x)\ln(1 + x^2) = o(x^4), x\sin x^n = o(x^{n+1}), e^{x^2} - 1 = o(x^2)$

由题设,有 $4 > n + 1 > 2$,即 $3 > n > 1$,故 $n = 2$.

(3) 应选(C).

[解析]

$$y' = 2(x-1)(x-3)^2 + (x-1)^2 \cdot 2(x-3) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$y'' = 4(x-2)(x-3) + 4(x-1)(x-3) + 4(x-1)(x-2) = 4(3x^2 - 12x + 11)$$
显然令 $y'' = 0$,可得两个零点 $x_1 < x_2$,即 y'' 可写成 $y'' = 12(x - x_1)(x - x_2)$

可见在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 两侧 y'' 变号,故此曲线一定存在两个拐点.

(4) 应选(A).

[解析]

由题设 $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2$,其中 $\xi \in (1-\delta, 1+\delta)$

由于 $f'(x)$ 严格单调减少,因此 $f''(x) < 0$,故有

$$f(x) < f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + (x-1) = x$$

即(A) 成立.

(5) 应选(D).

[解析]

由题设 $f(x)$ 在 $x<0$ 内严格单调递增,故当 $x<0$ 时,一定有 $f'(x)>0$(即与 x 轴无交点).

又 $f(x)$ 在 $x>0$ 内有三个零点,根据拉格朗日中值定理知 $f'(x)$ 在 $x>0$ 内有两个零点.

综上分析知,(D) 为正确选项.

三、[解析]

设 $x = \tan u$,则 $\mathrm{d}x = \sec^2 u\mathrm{d}u$

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u \cdot (2\tan^2 u + 1)} = \int \frac{\cos u\mathrm{d}u}{2\sin^2 u + \cos^2 u} = \int \frac{\mathrm{d}\sin u}{1+\sin^2 u} = \arctan(\sin u) + C$$

$$= \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$$

[注] 答案中缺任意常数 C 扣 1 分.

四、[解析]

先求出 $f(x)$ 的表达式,再求 $f(x)$ 的间断点.

因为
$$f(x) = \exp\left\{\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t - \sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}\right\}$$

而
$$\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t - \sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x} = \lim_{t\to x} x\frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\cos t} = \frac{x}{\sin x}$$

故
$$f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$$

由于
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$$

所以,$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类(或可去)间断点;

$x = k\pi(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是 $f(x)$ 的第二类(或无穷)间断点.

五、[解析]

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

抛物线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$$

抛物线上$\overset{\frown}{AM}$的弧长

$$s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\mathrm{d}x$$

故
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = 6\sqrt{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} = \frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\sqrt{4x+1}}$$

因此 $3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2} - \left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 3\cdot\dfrac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{4x+1}} - 36x = 9$

六、[解析]

含有变限积分等式,可考虑先对等式两边求导.

等式两边对 x 求导得

$$g[f(x)]f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

而
$$g[f(x)] = x$$

故
$$xf'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

当 $x \neq 0$ 时
$$f'(x) = 2e^x + xe^x$$

积分得
$$f(x) = (x+1)e^x + C$$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,故由

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[(x+1)e^x + C] = 0$$

得
$$C = -1$$

因此
$$f(x) = (x+1)e^x - 1$$

七、[解析]

方法一

由
$$f'(x) = g(x)$$

得
$$f''(x) = g'(x) = 2e^x - f(x)$$

于是有
$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2e^x \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 2 \end{cases}$$

解之得
$$f(x) = \sin x - \cos x + e^x$$

又 $\displaystyle\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{g(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \int_0^\pi \frac{f'(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{d}\frac{f(x)}{1+x}$

$$= \frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi} = \frac{f(\pi)}{1+\pi} - f(0) = \frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$$

方法二

同方法一，得 $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$

又 $\int_0^{\pi}[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}]dx = \int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx + \int_0^{\pi}f(x)d\frac{1}{1+x}$

$$= \int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx + f(x)\cdot\frac{1}{1+x}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}dx$$

$$= \frac{f(\pi)}{1+\pi} - f(0) + \int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx - \int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx$$

$$= \frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$$

八、[解析]

(1) 设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$

令 $X = 0$，则得该切线在 y 轴上的截距为 $y - xy'$

由题设知 $\sqrt{x^2+y^2} = y - xy'$

令 $u = \frac{y}{x}$，则此方程可化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$

解之得 $y + \sqrt{x^2+y^2} = C$

由 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$，知 $C = \frac{1}{2}$，于是 L 方程为

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

即 $y = \frac{1}{4} - x^2$

(2) 设第一象限内曲线 $y = \frac{1}{4} - x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y - (\frac{1}{4} - x^2) = -2x(X - x)$$

即 $Y = -2xX + x^2 + \frac{1}{4} \quad (0 < x \leqslant \frac{1}{2})$

它与 x 轴及 y 轴交点分别为 $(\frac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0)$ 与 $(0,x^2+\frac{1}{4})$. 所求面积为

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+\frac{1}{4})^2}{2x} - \int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4} - x^2)dx.$$

对 x 求导得 $S'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2(x^2+\frac{1}{4}) - (x^2+\frac{1}{4})^2}{x^2} = \frac{1}{4x^2}(x^2+\frac{1}{4})(3x^2 - \frac{1}{4})$

令 $S'(x) = 0$，解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com