高等院校本科生考研辅导教材

高等代数

解题思想与方法

周金土 编著

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

$$\cos < \alpha, \beta > = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$$

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等院校本科生考研辅导教材

高等代数解题思想与方法

周金土　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数解题思想与方法 / 周金土编著. —杭州：浙江大学出版社，2008.8
ISBN 978-7-308-06166-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 周… Ⅲ. 高等代数-高等学校-解题
Ⅳ. 015-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 128592 号

高等代数解题思想与方法

周金土　编著

责任编辑　杜希武
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail:　zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话: 0571—88925592，　88273066（传真）
排　　版　杭州好友排版工作室
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　15.75
字　　数　354 千字
版 印 次　2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06166-7
定　　价　29.00 元

前 言

高等代数是数学专业的一门重要基础课。该课程以线性空间为背景，以线性变换为方法，以矩阵为工具，着重研究线性代数的问题。

本书着重于高等代数基本内容的学习和基本方法的训练，重视基础知识的掌握和基本能力的培养，内容由浅入深，紧扣教材，针对性强；题目难易适中，立意深刻，构思巧妙；解法形式多样，思路开阔，启发性强，是学习高等代数的学生及有关科技人员必备的参考书。本书体现从具体到抽象的公理化思想，采用超几何观念与代数方法结合的形象化手段，着重于培养学生的逻辑推理论证能力，掌握解决代数问题的方法。

要掌握好高等代数的学习方法，不仅要掌握高等代数的内容，还要灵活运用自己所学到的知识，把各章的内容融汇贯通，使之前后联系，尝试并学会用典型方法和多种途径去解决同一个问题。

作者多年来为浙江师范大学学生讲授高等代数课程，本书是作者多年教授《高等代数选论》课程经验的积累和总结。内容涉及现行高等代数课程的几乎所有内容，适合学习高等代数课程的学生和相关科技人员学习和参考，特别适合报考研究生的读者作为参考书使用。

周 金 土

2008 年 10 月

目 录

第一章　一元多项式

多项式理论的主要内容是多项式的整除性、多项式的不可约性、最大公因式以及因式分解理论．常见的计算有：用辗转相除法求两个多项式的最大公因式以及判别多项式有无重因式；用综合除法求多项式函数值以及把多项式 $f(x)$ 展开成为 $x-a$ 的多项式；求整系数多项式的有理根以及判别有理系数多项式的不可约性．多项式的整除性、不可约性和因式分解理论是本章的重点．此外，把多项式与多项式函数理论结合起来是解决多项式问题的重要手段．

§1　多项式的整除性

基本概念和理论

1. $g(x)|f(x) \Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零．

$$x-a|f(x) \Leftrightarrow f(a)=0$$

2. 若 $g(x)|f(x)$，且 $f(x)|g(x)$，则 $f(x)=cg(x)$，$c\neq 0$．

3. 若 $g(x)|f(x)h(x)$，且 $(g(x), f(x))=1$，则 $g(x)|h(x)$．

4. $f(x)|h(x),\ g(x)|h(x),\ 且(f(x),\ g(x))=1, 则 f(x)g(x)|h(x)$．

5. 若 $p(x)$ 是不可约多项式，且 $p(x)|f(x)g(x)$，则 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$．

6. 若 $g(x)$ 的任一复根都是 $f(x)$ 的根，且 $g(x)$ 无重根，则 $g(x)|f(x)$．

7. 设 $\partial f(x)\leqslant n,\ \partial g(x)\leqslant n$，　$a_1,\cdots,a_{n+1}$ 互不相同，且 $f(a_i)=g(a_i), i=1,\cdots,n+1$，则 $f(x)=g(x)$．

8. 多项式的整除性不依数域的扩大而改变．亦即，如果两个数域有包含关系：$P\subseteq \overline{P}$，$g(x), f(x)\in P[x]$．如果在 P 上，$g(x)\nmid f(x)$，那么在 $\overline{P}$ 上，也有 $g(x)\nmid f(x)$．

例题

例 1　设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 有公共根 1，证明对任何多项式 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_s(x)$，

（$x^{n-1}+\cdots+x+1$）$\left|g_1(x)f_1(x^n)+g_2(x)f_2(x^n)+\cdots+g_s(x)f_s(x^n)\right.$.

证明　多项式的整除除了可用整除性质之外，利用多项式根的性质也是一种常用的方法.

设α是$g(x)=x^{n-1}+\cdots+x+1$的任一根，则$a^n=1$．因为1是$f_i(x)$的根，则0＝$f_i(1)$＝$f_i(a^n)$, i=1,2,⋯,n．因此α也是

$$f(x)=g_1(x)f_1(x^n)+g_2(x)f_2(x^n)+\cdots+g_s(x)f_s(x^n)$$

的根．因于$g(x)$无重根，所以$g(x)|f(x)$.

例2　求$x^4+x^2+1|x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3s+2}$的条件.

解　$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$．设 w是x^4+x^2+1的任一根，则$w^2+w+1=0$，或$w^2-w+1=0$，即$w^3=1$ 或$w^3=-1$.

当$w^3=1$时， $w^{3m}+w^{3n+1}+w^{3s+2}=w^2+w+1=0$，对任何非负整数$m,n,s$都成立.

当$w^3=-1$时，要使

$$0=w^{3m}+w^{3n+1}+w^{3s+2}=(-1)^m+(-1)^n w+(-1)^s w^2$$

即$w^2+(-1)^{n-s}w+(-1)^{m-s}=0$．由于$w^2-w+1=0$，所以$n-s$是奇数，$m-s$是偶数，于是条件为：$n$与$s$齐奇偶性相反，$m$与$s$的奇偶性相同.

例3　求多项式$f(x)$，使$x^2+1|f(x)$，$(x^3+x^2+1)|f(x)+1$

解　设

$$f(x)+1=(x^3+x^2+1)h(x),$$

则$f(x)=(x^2+1)h(x)+x^3h(x)-1$，所以

$$(x^2+1)(g(x)-h(x))=x^3h(x)-1$$

取$g(x)-h(x)=x^2-1$,$h(x)=x$，则上式成立．于是$g(x)=x^2+x+1$，$h(x)=x$，$f(x)+1=(x^3+x^2+1)x$，所以

$$f(x)=x^4+x^3+x-1$$

例4　求实系数多项式$f(x), g(x)$，$\partial f(x)\neq\partial g(x)$，使

$$f(x)^2-g(x)^2=x^4+x^3+x^2+x+1$$

解 因为$x^4+x^3+x^2+x+1$没有实数一次式，所以从所给条件可设

$$[f(x)+g(x)][(f(x)-g(x)]=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$$

得到$a+b=1$, 2+ab=1，解得$a=(1+\sqrt{5})/2$，$b=(1-\sqrt{5})/2$，

$$f(x)+g(x)=x^2+ax+1=a=x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1$$

$$f(x)-g(x)=x^2+bx+1=x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1$$

得到

$$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1, \qquad g(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

例 5　设 $g(x)\neq 0$，则以下条件等价：

（1）$g(x)\mid f(x)$

（2）$g(x)^k \mid f(x)^k$ 对一切正整数数 k 成立.

（3）存在正整数数 m，使 $g(x)^m \mid f(x)^m$.

证明　只证 $(3)\Rightarrow(1)$ 设

$$g(x)=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$$
$$f(x)=p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_r^{s_r}(x) \qquad k_i\geqslant 0,\ s_i\geqslant 0$$

$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_r(x)$ 在 $P[x]$ 中不可约，由 $g(x)^m\mid f(x)^m$ 知 $k_im\leqslant s_im,\ i=1,2,\cdots,r$，故有 $k_i\leqslant s_i$，因此 $g(x)\mid f(x)$.

例 6　$f(x)=(x+1)^{k+n}+(2x)(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$，证明 $x^{k+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$.

证明　从 $f(x)$ 的构成易使人联想到公式

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n)$$

所以

$$[(x+1)^{n+k}+(2x)(x+1)^{n+k-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n]((x+1)-2x)=(x+1)^{n+k+1}-(2x)^{k+1}$$

即 $f(x)(1-x)=(x+1)^{k+n+1}-(2x)^{k+1}$，因此有

$$f(x)(x-1)+(x+1)^{k+n+1}=(2x)^{k+1}$$

所以 $x^{k+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$.

例 7　求 $f(x)=(x+1)^m-x^m-1$ 能被 x^2+x+1 整除的条件.

解　设 ω 是 x^2+x+1 的任一根，则 $\omega+1=-\omega^2$，要使 $x^2+x+1\mid f(x)$，必

$$f(\omega)=(\omega+1)^m-\omega^m-1=(-1)^{m+1}\omega^{2m}+\omega^m+1=0$$

$-\omega^2$ 是 1 的 6 次原根，所以当 $m=6k+1$ 或 $6k+5$ 时，$f(\omega)=0$，其余情形 $f(\omega)\neq 0$.

例 8(浙江大学)　设 $p(x)$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约多项式，$f(x)\in\mathbf{Q}[x]$，如果 $f(x)$ 与 $p(x)$ 有一个公共复根 α，那么在 $\mathbf{Q}[x]$ 中，$p(x)\mid f(x)$.

证法 1　α 是 $f(x)$ 与 $p(x)$ 的公共复根，则 $f(x)$ 与 $p(x)$ 在复数域上的最大公因式 $(p(x),f(x))=d(x)$ 不是常数．由于 $f(x)$，$p(x)$ 都在 $\mathbf{Q}[x]$ 中，所以它们的最大公因式 $d(x)$ 也在 $\mathbf{Q}[x]$ 中．由 $p(x)$ 的不可约性以及 $d(x)\mid p(x)$，得到 $p(x)=cd(x)$，其中常数 $c\neq 0$，因此 $p(x)\mid f(x)$.

证法 2　用反证法．假如 $p(x)\nmid f(x)$，由多项式 $p(x)$ 的不可约性，必有 $(p(x),f(x))=1$，

因此存在多项式$u(x),v(x)\in\mathbf{Q}[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)p(x)=1$$

因为$p(\alpha)=f(\alpha)=0$，用$x=\alpha$代入上式得 0＝1，得到矛盾．所以$p(x)|f(x)$．

例 9 $f(x),g(x)\in\mathbf{R}[x]$，若有$h(x)\in\mathbf{R}[x]$，

$$(x+a)f(x)+(x+b)g(x)=(x^2+c)h(x) \tag{1}$$

$$(x-a)f(x)+(x-b)g(x)=(x^2+c)h(x) \tag{2}$$

其中$a,b,c\in\mathbf{R},c\neq 0,\quad a\neq b$，则$x^2+c|f(x),\ x^2+c|g(x)$．

证明 把（1)，（2）两式相加得

$$2x(f(x)+g(x))=2(x^2+c)h(x)$$

因为$c\neq 0,$所以$x^2+c|f(x)+g(x)$，由此得到

$$x^2+c|(x+b)(f(x)+g(x))=(x+b)f(x)+(x+b)g(x) \tag{3}$$

由（1），（3）得 $x^2+c|(a-b)f(x)$ ，$a\neq b,\Rightarrow x^2+c|f(x)$，故有$x^2+c|g(x)$．

例 10 设$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$都是次数$\leq n-2$的多项式，$a_1,a_2,\cdots a_n$是$n$个互不相同的数，证明

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_k) & \cdots & f_1(a_n)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ f_k(a_1) & f_k(a_k) & \cdots & f_k(a_n)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ f_n(a_1) & f_n(a_k) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix}=0$$

证明 作多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_k(x) & f_k(a_2) & \cdots & f_k(a_n)\\ \vdots & & & \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(x)\end{vmatrix}$$

若$f(x)$不恒为零，则$\partial f(x)\leqslant n-2$，而$f(a_2)=f(a_3)=\cdots=f(a_n)=0$，$f(x)$有 $n-1$ 个不同的根，这是不可能的．所以$f(x)\equiv 0$，从而$f(a_1)=0$，因此原行列式为零．

例 11 (美国数学竞赛题) 求所有满足$f(f(x))=f(x)^n$的多项式$f(x)$．

解法 1 若$f(x)=c$是常数，由$f(f(x))=f(x)^n$可得$c=c^n$，则$c=0$或c是$n-1$次单位根．

设$\partial f(x)\geqslant 1$，并设

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

则

$$f(f(x))=a_m(a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0)^m$$

$$+\cdots+a_1(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0)+a_0$$

$$=(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0)^n$$

得到$nm=m^2$,即$m=n$，所以

$$a_n f(x)^n + a_{n-1}f(x)^{n-1}+\cdots+a_1 f(x)+a_0 = f(x)^n$$

即

$$(a_n-1)f(x)^n + a_{n-1}f(x)^{n-1}+\cdots+a_1 f(x)+a_0 = 0$$

从而得到$a_n=1, a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$，于是

$$f(x)=x^n$$

解法 2　设$\partial f(x)\geqslant 1$，并设$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_k x^k$．设$\alpha$是$f(x)$的根，$f(\alpha)=0$，那么

$$a_0+\sum_{k=1}^{m}a_k f(\alpha)^k = f[(f(\alpha)]=f(\alpha)^n=0$$

得到$a_0=0$，所以

$$f(x)=x(\sum_{k=1}^{m}a_k x^k)=xf_1(x)$$

又

$$(xf_1(x))^n=f(x)^n=f(f(x))=f(xf_1(x))$$

$$=xf_1(x)f_1(xf_1(x)]=xf_1(x)f_1(f(x)) \qquad (1)$$

所以$f_1(f(x))=(xf_1(x))^{n-1}$，从而

$$a_1=a_1+\sum_{k=2}^{m}a_k f(\alpha)^k=f_1(f(\alpha))=(\alpha f_1(\alpha))^{n-1}=f(\alpha)^{n-1}=0$$

得到

$$f(x)=x^2(\sum_{k=2}^{m}a_k x^k)=x^2 f_2(x)$$

用与（1）相同的方法又可得$f_2(f(x))=(x^2 f_2(x))^{n-2}$，继而得到

$$f(x)=x^3 f_3(x)$$

如此继续，可推出

$$f(x)=ax^m$$

由于$f(f(x))=f(x)^n$，代入后有

$$(ax^m)^n=f(x)^n=f(f(x))=a(ax^m)^m$$

最后得到$n=m, a=1$，

$$f(x)=x^n$$

例 12　求所有满足

$$f(x^2)=f(x)f(x+1)$$

的多项式 $f(x)$.

解 若 $f(x)=c$ 是常数，由 $f(x^2)=f(x)f(x+1)$ 可得 $c=c^2$，则 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$.

设 $\partial f(x)\geqslant 1$. 如果 α 是 $f(x)$ 的根，$f(\alpha)=0$，那么

$$f(\alpha^2)=f(\alpha)f(\alpha+1)=0$$
$$f((\alpha-1)^2)=f(\alpha-1)f(\alpha)=0$$

这说明 α^2 和 $(\alpha-1)^2$ 都是 $f(x)$ 的根，所以 $\alpha,\alpha^2,\alpha^4,\cdots$，都是 $f(x)$ 的根. 那么至少有两个 $\alpha^{2s}=\alpha^{2k}$, $s\neq k$，所以 $\alpha=0$，或者存在正整数 n，使得 $\alpha^n=1$，即 α 是单位根. 同理 $\alpha-1$ 也是单位根.

如果 $f(x)$ 只有零根，那么 $f(x)=x^n$，则 $f(x^2)=f(x)f(x+1)$ 不能成立，所以 $f(x)$ 不仅只有零根，于是设 $\alpha\neq 0$.

设 $\alpha=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\neq 1$，因为 $\alpha-1$ 也是单位根，所以 $|\alpha-1|^2=1$，则 $(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=1$，得到 $2\cos\theta=1$, $\theta=\pi/3$ 或 $5\pi/3$，所以 $\alpha=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 但

$$|\alpha-1|^2=(-\frac{1}{2}-1)^2+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\neq 1$$

所以 $\alpha\neq 1$ 不是 $f(x)$ 的根，因此 $f(x)$ 的根只有 0，1 和 -1. 但是 $-1-1=-2$ 不是单位根，所以 -1 也不是 $f(x)$ 的根. 于是可设

$$f(x)=ax^m(x-1)^n$$

由 $f(x^2)=f(x)f(x+1)$ 可得 $m=n$，$a=1$. 所以

$$f(x)=x^n(x-1)^n$$

例 13 设

$$f(x)=1-x+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{n!}$$

计算 $f(x)$ 在 $x=1,2,\cdots,n$ 时的值，并化简 $f(x)$.

解 易见 $f(1)=0, f(2)=0$，并且

$$f(k)=1-k+\frac{k(k-1)}{2!}-\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-(k-1))}{k!}$$

就是二项展开式

$$(1-x)^k=1-x+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-(k-1))}{k!}x^k$$

中 $x=1$ 时的值，所以 $f(k)=0$，$k=1,2,\cdots,n$.

作 $g(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$，则 $f(k)=g(k)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n$，而 $\partial f(x)=\partial g(x)=n$，所以

$$f(x)=(-1)^{n-1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$$

例 14 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的 n 个根是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求以下多项式的根：

（1）$a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n a_n$

（2）$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

（3）$f(a)+\dfrac{f'(a)}{1}x+\dfrac{f''(a)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$

（4）$a_0x^n+a_1bx^{n-1}+a_2b^2x^{n-2}+\cdots+a_nb^n$

解 根据根与系数的韦达定理，

$$\sum_{i=1}^n x_i=-\frac{a_1}{a_0},\quad \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_k}{a_0},\ \cdots,\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

（1）记 $y_i=-x_i$, i=1,2,⋯,n，则

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_k}=\begin{cases}-(-1)^k\dfrac{a_k}{a_0} & k\text{为奇数}\\ (-1)^k\dfrac{a_k}{a_0} & k\text{为偶数}\end{cases}$$

所以 $-x_1,-x_2,\cdots,-x_n$ 是 $a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n a_n$ 的 n 个根.

（2）
$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\frac{1}{x_{i_1}}\frac{1}{x_{i_2}}\cdots\frac{1}{x_{i_k}}=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\frac{1}{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}}$$
$$=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{n-k}\leqslant n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{n-k}}$$
$$=\frac{1}{(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}}\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{n-k}\leqslant n}(-1)^{n-k}\frac{a_{n-k}}{a_0}$$
$$=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{n-k}\leqslant n}(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

所以 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的 n 个根是 $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\cdots,\dfrac{1}{x_n}$.

（3）$f(x)$ 在 $x=a$ 的泰劳展开式是

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

记 $y=x-a$，则

$$f(x)=g(y)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}y+\frac{f''(a)}{2!}y^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}y^n$$

因为 $f(x)$ 的根是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，所以 $f(a)+\dfrac{f'(a)}{1}x+\dfrac{f''(a)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ 的 n 个根是

$x_1-a, x_2-a, \cdots, x_n-a$.

（4） 因为

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(bx_{i_1})(bx_{i_2})\cdots(bx_{i_k})=(-1)^k b^k\frac{a_k}{a_0},$$

所以$a_0x^n+a_1bx^{n-1}+a_2b^2x^{n-2}+\cdots+a_nb^n$的$n$个根是$bx_1,bx_2,\cdots,bx_n$.

§2　最大公因式·重因式

基本概念和理论

1. 如果$P[x]$中$m\,(\geqslant 1)$次多项式$p(x)$没有次数$<m$的非常数因式，那么$p(x)$称为$P[x]$中的不可约多项式.

2. 多项式$p(x)$在$P[x]$中不可约$\Leftrightarrow$ $p(x)$的因式只有常数$c\neq 0$和$cp(x)$.

3. $p(x)$在$P[x]$中不可约$\Leftrightarrow \forall f(x)\in P[x]$, $(p(x),f(x))=1$或$p(x)|f(x)$.

4. 因式分解定理：$P[x]$中次数$\geqslant 1$的多项式$f(x)$可以分解为$P[x]$中若干个不可约多项式的乘积:

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)$$

5. $P[x]$中任意两个多项式$f(x)与g(x)$必有最大公因式$(f(x),\ g(x))$，并且存在$u(x),v(x)\in P\,[x]$ ，使

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

对于$(f(x),g(x))=1$的情形，有$(f(x),g(x))=1\Leftrightarrow$存在$u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

6. 数域P上两个多项式的最大公因式$(f(x),g(x))$仍是数域P上的多项式.

7. 若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的$k\geqslant 1$重因式，则$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式.
反之不然．即$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式，不能推出$p(x)$是$f(x)$的k重因式.

8. 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式

$$\Leftrightarrow p(x)|f(x)且p(x)|f'(x)$$

特别α是$f(x)$的重根$\Leftrightarrow x-\alpha|f(x)$，且$x-\alpha|f'(x)$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=0$$

9. 在$P[x]$中$f(x)$有重因式$\Leftrightarrow (f(x),f'(x))=d(x)\neq$ 常数.

10. $f(x)$在复数域中有重根$\Leftrightarrow (f(x),f'(x))\neq$常数.

注意：在一般数域P中，$(f(x),f'(x))\neq 1$，不能推出$f(x)$在数域P中有重根.

11. $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$与$f(x)$有相同不可约因式，且没有重因式.

例题

例 1 $P[x]$ 中，证明 $(f(x),g(x))=1 \Leftrightarrow \forall\varphi(x)\in P[x]$，存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使 $\varphi(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

例 2 若 $(f(x),g(x))=1$，则

$$(f(x)h(x),g(x))=(h(x),g(x)).$$

证明 显然 $(h(x),g(x))$ 是 $f(x)h(x)$ 和 $g(x)$ 的一个公因式．假设 $\varphi(x)\,|\,f(x)h(x),\varphi(x)\,|\,g(x)$，由 $(f(x),g(x))=1$ 得到 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，及

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)h(x)g(x)=h(x)$$

所以 $\varphi(x)\,|\,h(x)$，又 $\varphi(x)\,|\,g(x)$，故有 $\varphi(x)\,|\,(h(x),g(x))$，因此 $(h(x),g(x))$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

例 3 设 $(f(x),g(x))=1$，且 $(f(x),h(x))=1$，证明 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

证法 1 由 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，存在 $u_1(x),v_1(x),u_2(x),v_2(x)$，使

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1\quad,\quad u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1$$

两式相乘得

$$\left[u_1(x)u_2(x)f(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)+v_1(x)u_2(x)g(x)\right]f(x)$$
$$+(v_1(x)v_2(x))g(x)h(x)=1$$

所以 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

证法 2 假如 $(f(x),g(x)h(x))=d(x)\neq1$，取 $d(x)$ 的一个不可约因式 $p(x)$，则

$$p(x)\,|\,g(x)h(x)\ \Rightarrow\ p(x)\,|\,g(x)\text{或}p(x)\,|\,h(x)$$

又 $p(x)\,|\,f(x)\Rightarrow$

$$p(x)\,|\,(f(x),g(x))=1\text{或}p(x)\,|\,(f(x),h(x))=1$$

得到矛盾．所以 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

例 4(浙江师范大学,2003 年) 若 $(f(x),g(x))=1$，则 $(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$.

证法 1 由等式 $f(x)+g(x)=f(x)\cdot1+g(x)$ 以及

$$f(x)+g(x)=g(x)\cdot1+f(x)$$

可得

$$(f(x)+g(x),f(x))=(f(x),g(x))=1$$
$$(f(x)+g(x),g(x))=(f(x),g(x))=1$$

由例 3 知 $(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$.

证法 2 设 $\varphi(x)\,|\,(f(x)+g(x),f(x))$，则 $\varphi(x)\,|\,f(x)+g(x)$, $\varphi(x)\,|\,f(x)\Rightarrow\varphi(x)\,|\,(f(x),g(x))=1$．因此

$$(f(x)+g(x),f(x))=1$$

同理 $(f(x)+g(x),g(x))=1$，所以

$$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$$

证法 3 假设$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=d(x)\neq 1$，取$d(x)$的不可约因式$p(x)$，则

$$p(x)\big|f(x)g(x),\ 且\ p(x)\big|f(x)+g(x)$$

当 $p(x)\big|f(x)$时,由$p(x)\big|f(x)+g(x)$可得 $p(x)\big|g(x)$，所以$p(x)\ \big|(f(x),g(x))=1$，得到矛盾.

对于 $p(x)\big|g(x)$时 也将得到矛盾．故有$(f(x)+g(x),\ f(x)\cdot g(x))=1$.

例 5 把分式$\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$有理化.

解 记$\alpha=\sqrt[3]{2}$，α是有理系数不可约多项式$p(x)=x^3-2$的根．作

$$f(x)=2x^2+x+1$$

$$2p(x)=f(x)(x-\frac{1}{2})+r_1(x),\quad r_1(x)=-\frac{1}{2}(x+7),\quad f(x)=r_1(x)(-4x+26)+92$$

$$92=f(x)-r_1(x)(-4x+26)=f(x)-[2p(x)-f(x)(x-\frac{1}{2})](-4x+26)$$

$$=f(x)[1+(x-\frac{1}{2})(-4x+26)]-2p(x)(-4x+26)$$

将$\alpha=\sqrt[3]{2}$代入上式，得

$$92=f(\sqrt[3]{2})[1+(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{2})(-4\sqrt[3]{2}+26)]$$

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{f(\sqrt[3]{2})}=\frac{1}{92}[1+(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{2})(-4\sqrt[3]{2}+26)]$$

$$=\frac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$$

例 6 证明$(f_1,g_1)(f_2,g_2)=(f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2)$.

证明 记$d(x)=(f_1(x),g_1(x))$，则

$$f_1(x)=d(x)F_1(x),\quad g_1(x)=d(x)G_1(x),\quad (F_1(x),G_1(x))=1$$

存在$u(x),v(x)$，使$u(x)F_1(x)+v(x)G_1(x)=1$，因此

$$u(x)f_2(x)F_1(x)+v(x)f_2(x)G_1(x)=f_2(x) \tag{1}$$

$$u(x)g_2(x)F_1(x)+v(x)g_2(x)G_1(x)=g_2(x) \tag{2}$$

要证原式，只须证$(f_2,g_2)=(F_1f_2,F_1g_2,G_1f_2,G_1g_2)$.

设$\varphi(x)$是$F_1f_2,F_1g_2,G_1f_2,G_1g_2$的任一公因式，则

$\varphi(x)\big|F_1f_2$，$\varphi(x)\big|G_1f_2$，由（1）$\Rightarrow$ $\varphi(x)\ \big|f_2(x)$.

$\varphi(x)\big|F_1g_2$，$\varphi(x)\big|G_1g_2$ 由（2）$\Rightarrow\varphi(x)\big|g_2(x)$

因此$\varphi(x)\big|(f_2(x),g_2(x))$，而$(f_2(x),g_2(x))$显然是$F_1f_2,F_1g_2,\ G_1f_2,\ G_1g_2$的一个公因式，从而$(f_2(x),g_2(x))$是$F_1f_2,F_1g_2,G_1f_2\ ,G_1g_2$的一个最大公因式.

例 7 设$d(x)=(f(x),f'(x))$，如果α是$d(x)$的$k-1$（$k\geqslant 2$）重根，那么α是$f(x)$的k重根.

证明 设α是$d(x)$的$k-1$（$k\geqslant 2$）重根，则$x-\alpha|f(x)$，且$x-\alpha|f'(x)$，所以α是$f(x)$的重根．设α是$f(x)$的s（$s\geqslant 2$）重根，则α是$f'(x)$的$s-1$重根，因此α是$d(x)$的$s-1$重根，故$s-1=k-1$，即$s=k$．所以α是$f(x)$的k重根．

例 8 多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$能被$(x-1)^{k+1}$整除的充分必要条件是

$$\begin{cases} a_0+a_1+\ \ a_2+\cdots+\ a_n=0 \\ \qquad a_1+2a_2+\cdots+na_n=0 \\ \qquad a_1+4a_2+\cdots+n^2a_n=0 \\ \qquad \cdots \\ \qquad a_1+2^ka_2+\cdots+n^ka_n=0 \end{cases}$$

证明 因为$(x-1)^{k+1}|f(x)\Leftrightarrow(x-1)^k|f'(x),x-1|f(x)$，所以

$$(x-1)^{k+1}|f(x)\Leftrightarrow(x-1)^k|xf'(x),x-1|f(x).$$

因此$(x-1)^{k+1}$是$f(x)$的k+1重因式$\Leftrightarrow 1$是$xf'(x)$的k重根，且$f(1)=0$．而$xf'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kx^k$，$f'(1)=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k$，即

$$a_0+a_1+\ \ a_2+\cdots+\ a_n=0$$
$$a_1+2a_2+\cdots+na_n=0$$

同理，1是$f_1(x)=xf'(x)$的k重根$\Leftrightarrow 1$是$xf_1'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2a_kx^k$的$k-1$重根，并且$f_1(1)=0$，即

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n=0$$
$$a_1+4a_2+\cdots+n^2a_n=0$$

以此类推即可．

例 9 证明

$$f(x)=x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n(n-1)\cdots 2\cdot x+n!$$

没有重因式．

证法 1 考虑微商

$$f'(x)=nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n(n-1)\cdots 2\cdot x+n!=f(x)-x^n,$$

则$f(x)=f'(x)+x^n$．而

$$(f(x),f'(x))=(f(x),f(x)-x^n)$$

所以$f(x)$与$f'(x)$的因式都是x^n的因式，形式为$x^k,0\leqslant k\leqslant n$．由于$f(x)$的常数项$\neq 0$，所以$x^k=1$(即$k=0$)，因此$(f(x),f'(x))=1$，$f(x)$没有重因式．

证法 2 假如$f(x)$有重根α，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$，由$f'(x)+x^n=f(x)$，得$\alpha^n=0$，即$\alpha=0$．但0显然不是$f(x)$的根，得到矛盾．所以$f(x)$无重根．