新课标

# 鼎尖教案

教材教案、教辅教案、习题教案

数学

必修4

人教B版

新课标·高中同步·鼎尖学案（个性化学案）

新课标·高中同步·鼎尖教案（通用型教案）

丛书主编：严治理　黄俊葵
马擒虎　刘芳芳

延边教育出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

鼎尖教案．数学．4：必修/唐益才，赵永主编．—延吉：延边教育出版社，2008.9

ISBN 978-7-5437-7372-1

Ⅰ．鼎… Ⅱ．①唐…②赵… Ⅲ．数学课—教案（教育）—高中 Ⅳ．G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 144209 号

□ **本册主编：** 唐益才　赵　永

□ **编　　著：** 唐恭学　廉开波　安田华　石　磊　王　芳　刘国斌　唐恭芳　彭京余　李清学　李兴国　武　岩　蒋胜博　李大健　彭玉安　亓振风

□ **责任编辑：** 严今石

□ **法律顾问：** 北京陈鹰律师事务所（010-64970501）

与 *人教 B 版* 普通高中课程标准实验教科书同步

**《鼎尖教案》数学　必修 4**

**出版发行：** 延边教育出版社

**地　　址：** 吉林省延吉市友谊路 363 号（133000）
北京市海淀区苏州街 18 号院长远天地 4 号楼 A1 座 1003（100080）

**网　　址：** http://www.topedu.org

**电　　话：** 0433-2913975　010-82608550

**传　　真：** 0433-2913971　010-82608856

**排　　版：** 北京鼎尖雷射图文设计有限公司

**印　　刷：** 北京季蜂印刷有限公司

**开　　本：** 890×1240　16 开本

**印　　张：** 23.75

**字　　数：** 925 千字

**版　　次：** 2008 年 9 月第 1 版

**印　　次：** 2008 年 9 月第 1 次印刷

**书　　号：** ISBN 978-7-5437-7372-1

**定　　价：** 47.50 元

# “鼎尖大家庭”QQ成立宣言

在这个越来越浮躁的世界，“认真”是一种奢侈的品质！

当有的人将出版看作是一个暴利产业的时候，鼎尖教育人，却以一种宗教般的虔诚笃信——出版是一门知识密集型的创意型人文科学！《鼎尖教案》系列丛书，就是他们这种高贵出版品质的最好证明。

《鼎尖教案》——以首创“复式教学案例”的模式，引领中国教辅出版的新标准！

**◎ 一语天然万古新，繁华落尽见真淳**——关于本套丛书的策划人

他们是一群有大智慧的人。他们坚信教辅不只是习题集和参考书，而应该是集“思维导图”、“学习方法”、“学术研究”、“成功励志”为一体的助学读物！他们在扩展教辅“内涵”的同时，让同质化的教辅变成了有个性的出版生命！

**◎ 为伊消得人憔悴，衣带渐宽终不悔**——关于本套丛书的编辑

他们是一群拥有远大使命的年轻出版人。他们发自内心喜欢出版，他们坚信创意是出版的灵魂，他们拒绝平庸的创意；如果好的创意没有得到好的执行，他们同样会愤怒，因为他们渴望成为出版行业中的英雄！

**◎ 问渠哪得清如许，为有源头活水来**——关于本套丛书的作者

他们是一群甘于寂寞的人。他们把自己教学的历练和思维的煎熬，毫无保留地奉献给了读者；他们以自己的倾情付出，无限延展了万千学子思维的空间！

**◎ 男儿何不带吴钩，收取关山五十州**——关于本套丛书的发行者

他们是一群血液中流淌着高贵品质的商人。他们在这个教辅“红海”市场中，象战士一样浴血奋战，开疆拓土，他们理应得到《鼎尖教案》全体出版人的尊重！

**◎ 落红不是无情物，化作春泥更护花**——关于本套丛书的读者

他们是一群甘于奉献的人。他们三尺讲台，激扬人生。他们呵护着年青的希望。他们耕耘着学子的梦想！愿《鼎尖教案》象一缕温馨的春风，让课堂更轻松！

不论您是谁，不论您是《鼎尖教案》的策划人、编辑、作者、发行者还是读者；不论您身在何方，不论您是在银装素裹的北国，还是在莺飞草长的江南，我们都有一个共同的家——鼎尖大家庭！编读在线沟通，名师解惑答疑，欢迎加为好友！

| | | |
|---|---|---|
| 语文：858050176　858050579 | 数学：858051781　858052189 | 英语：858038863 |
| 物理：858052659 | 化学：858038177 | 生物：858037990 |
| 历史：858038291 | 地理：858050159 | 政治：858039239 |

**教材教案**

- 教学目标
  - 知识与技能
  - 过程与方法
  - 情感、态度与价值观
- 重点难点
  - 重点
  - 难点
- 案例一、二（以课时为单位）
  - 教学过程
  - 板书设计
  - 教学反思（随机设置）

**教辅教案**

- 案例一　课时详解（以课时为单位）
  - 课堂导入
  - 课前自主学习
  - 课堂合作探究
    - 情景激疑
    - 知识点归纳
    - 典例剖析
  - 概括整合
- 案例二　精析精练（以节为单位）
  - 课堂合作探究
    - 重点难点突破
    - 典型例题分析
  - 规律方法总结
- 定时巩固检测
  - 基础训练
  - 能力提升

**习题教案**

- 案例一　同步练习（以课时为单位）
- 案例二　一课3练（以节为单位）
  - 基础巩固
  - 能力升级
  - 拓展探究

**单元末**

- 单元概括整合
  - 单元复习课
  - 单元测试卷

# 体 例 表 解

| 主要栏目名称 | | | | 栏目设计功能 | 栏目使用建议 |
|---|---|---|---|---|---|
| 教材教案 | ［教学目标］ | ［知识与技能］ | | 依据教材和课程标准，让学生了解本课时的“三维目标” | 两套案例体现了不同的教学思路和技巧，教师可根据自己的授课模式，自主选择一种教学案例，师生互动，完成教学 |
| | | ［过程与方法］ | | | |
| | | ［情感、态度与价值观］ | | | |
| | ［重点难点］ | ［重点］ | | 帮助教师、学生准确把握教材的深广度，明确本课时学习的重点、难点 | |
| | | ［难点］ | | | |
| | 案例一<br>案例二<br>（以课时为单位） | ［教学过程］ | | 体现情景设置、师生互动等课堂教学思路，既给教师以启发，又不束缚教师的创造性 | |
| | | ［板书设计］ | | 直观、清晰地呈现本课时的主要内容 | |
| | | ［教学反思］（机动） | | 对教学方法和教学过程的反思，提出改进设想 | |
| 教辅教案 | 案例一<br>课时详解<br>（以课时为单位） | ［课堂导入］ | | 激发学生学习兴趣，导入本课内容 | 学生课前自主完成 |
| | | ［课前自主学习］ | | 引导学生自学课本内容，培养自主学习能力 | |
| | | ［课堂合作探究］ | ［情景激疑］ | 提供课堂讨论材料，学生思考归纳出知识点 | 可供教师授课，学生自主学习时使用 |
| | | | ［知识点归纳］ | 通过情景激疑的讨论引出知识点内容，按知识分块讲解，各个击破 | |
| | | | ［典例剖析］ | 通过例题讲解、变式练习，理解、巩固知识点 | |
| | | ［概括整合］ | | 将本课时主要内容总结归纳，帮助学生形成知识网络 | |
| | 案例二<br>精析精练<br>（以节为单位） | ［课堂合作探究］ | ［重点难点突破］ | 对本节重点和难点知识进行详细全面讲解，按知识层次整体突破 | |
| | | | ［典型例题分析］ | 通过例题讲解、变式练习，理解、巩固知识点内容 | |
| | | ［规律方法总结］ | | 将本节主要规律、方法总结归纳，帮助学生形成知识网络 | |
| | ［定时巩固检测］ | | | 通过强化训练，巩固所学知识 | 教师可安排学生课堂集中检测和学生课后自主完成相结合 |
| 习题教案 | 案例一　同步练习（以课时为单位） | | | 用习题让学生对本课时所学知识进行检测 | 教师可安排学生课堂集中检测和学生课后自主完成相结合 |
| | 案例二　一课3练（以节为单位） | | | 将习题划分为“基础巩固——能力升级——拓展探究”，让学生对本节所学知识分层次进行检测 | |
| 单元末 | ［单元概括整合］ | ［单元复习课］ | | 通过例题分析导入，归纳总结知识规律或解题方法，提高解题能力 | 教师指导学生对本章内容进行回顾 |
| | | ［单元测试卷］ | | 以测试卷的形式对本章学习效果进行检测 | 教师安排学生课堂集中检测，或者学生课后自主完成 |

CONTENTS 目录


## 第一章　基本初等函数(Ⅱ)—— 1

1.1　任意角的概念与弧度制 …… (1)
1.1.1　角的概念的推广(1 课时) …… (1)
第一教案　教材教案 …… (1)
案例(一) …… (1)
案例(二) …… (2)
第二教案　教辅教案 …… (3)
案例(一)——课时详解 …… (3)
案例(二)——精析精练 …… (6)
定时巩固检测 …… (7)
第三教案　习题教案 …… (8)
案例(一)——同步练习 …… (8)
案例(二)——一课 3 练 …… (9)
1.1.2　弧度制和弧度制与角度制的换算(1 课时) …… (10)
第一教案　教材教案 …… (10)
案例(一) …… (10)
案例(二) …… (11)
第二教案　教辅教案 …… (13)
案例(一)——课时详解 …… (13)
案例(二)——精析精练 …… (15)
定时巩固检测 …… (17)
第三教案　习题教案 …… (18)
案例(一)——同步练习 …… (18)
案例(二)——一课 3 练 …… (19)
1.2　任意角的三角函数 …… (20)
1.2.1　三角函数的定义(2 课时) …… (20)
第一教案　教材教案 …… (20)
第 1 课时　三角函数的定义 …… (20)
案例(一) …… (21)
案例(二) …… (22)
第 2 课时　三角函数在各象限的符号 …… (23)
案例(一) …… (24)
案例(二) …… (25)
第二教案　教辅教案 …… (26)
案例(一)——课时详解 …… (26)
第 1 课时　三角函数的定义 …… (26)
第 2 课时　三角函数在各象限的符号 …… (28)
案例(二)——精析精练 …… (30)
定时巩固检测 …… (32)
第三教案　习题教案 …… (34)
案例(一)——同步练习 …… (34)
案例(二)——一课 3 练 …… (36)
1.2.2　单位圆与三角函数线(1 课时) …… (37)
第一教案　教材教案 …… (37)
案例(一) …… (38)
案例(二) …… (39)
第二教案　教辅教案 …… (40)
案例(一)——课时详解 …… (40)
案例(二)——精析精练 …… (42)
定时巩固检测 …… (44)
第三教案　习题教案 …… (45)
案例(一)——同步练习 …… (45)
案例(二)——一课 3 练 …… (46)
1.2.3　同角三角函数的基本关系式(1 课时) …… (47)
第一教案　教材教案 …… (47)
案例(一) …… (47)
案例(二) …… (49)
第二教案　教辅教案 …… (50)
案例(一)——课时详解 …… (50)
案例(二)——精析精练 …… (54)
定时巩固检测 …… (56)
第三教案　习题教案 …… (58)
案例(一)——同步练习 …… (58)
案例(二)——一课 3 练 …… (59)
1.2.4　诱导公式(3 课时) …… (61)
第一教案　教材教案 …… (61)
第 1 课时　角 $\alpha$ 与 $\alpha+k\cdot 2\pi(k\in\mathbf{Z})$ 和 $-\alpha$ 的三角函数间的关系 …… (61)
案例(一) …… (61)
案例(二) …… (63)
第 2 课时　角 $\alpha$ 与 $\alpha+(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数间的关系 …… (64)
案例(一) …… (65)
案例(二) …… (66)
第 3 课时　$\alpha$ 与 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 的三角函数间的关系 …… (67)
案例(一) …… (68)
案例(二) …… (69)
第二教案　教辅教案 …… (71)
案例(一)——课时详解 …… (71)
第 1 课时　角 $\alpha$ 与 $\alpha+k\cdot 2\pi(k\in\mathbf{Z})$ 和 $-\alpha$ 的三角函数间的关系 …… (71)
第 2 课时　角 $\alpha$ 与 $\alpha+(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数间的关系 …… (73)
第 3 课时　$\alpha$ 与 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 的三角函数间的关系 …… (75)
案例(二)——精析精练 …… (78)
定时巩固检测 …… (79)

目录 CONTENTS


第三教案　习题教案 …… (82)
案例(一)——同步练习 …… (82)
案例(二)——一课3练 …… (84)
1.3　三角函数的图象与性质 …… (86)
1.3.1　正弦函数的图象与性质(3课时) …… (86)
第一教案　教材教案 …… (86)
第1课时　正弦函数的图象 …… (86)
案例(一) …… (86)
案例(二) …… (88)
第2课时　正弦函数的性质 …… (89)
案例(一) …… (90)
案例(二) …… (93)
第3课时　正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… (96)
案例(一) …… (96)
案例(二) …… (100)
第二教案　教辅教案 …… (102)
案例(一)——课时详解 …… (102)
第1课时　正弦函数的图象 …… (102)
第2课时　正弦函数的性质 …… (104)
第3课时　正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… (106)
案例(二)——精析精练 …… (110)
定时巩固检测 …… (114)
第三教案　习题教案 …… (116)
案例(一)——同步练习 …… (116)
案例(二)——一课3练 …… (120)
1.3.2　余弦函数、正切函数的图象与性质(2课时) …… (122)
第一教案　教材教案 …… (122)
第1课时　余弦函数的图象与性质 …… (122)
案例(一) …… (122)
案例(二) …… (124)
第2课时　正切函数的图象与性质 …… (125)
案例(一) …… (126)
案例(二) …… (128)
第二教案　教辅教案 …… (129)
案例(一)——课时详解 …… (129)
第1课时　余弦函数的图象与性质 …… (129)
第2课时　正切函数的图象与性质 …… (132)
案例(二)——精析精练 …… (134)
定时巩固检测 …… (136)
第三教案　习题教案 …… (138)
案例(一)——同步练习 …… (138)
案例(二)——一课3练 …… (140)
1.3.3　已知三角函数值求角(1课时) …… (142)
第一教案　教材教案 …… (142)
案例(一) …… (143)
案例(二) …… (144)
第二教案　教辅教案 …… (146)
案例(一)——课时详解 …… (146)
案例(二)——精析精练 …… (149)
定时巩固检测 …… (151)
第三教案　习题教案 …… (153)
案例(一)——同步练习 …… (153)
案例(二)——一课3练 …… (154)
单元概括整合 …… (156)
单元复习课 …… (156)
单元测试卷 …… (159)
第二章　平面向量 …… 162
2.1　向量的线性运算 …… (162)
2.1.1　向量的概念(1课时) …… (162)
第一教案　教材教案 …… (162)
案例(一) …… (162)
案例(二) …… (165)
第二教案　教辅教案 …… (166)
案例(一)——课时详解 …… (166)
案例(二)——精析精练 …… (169)
定时巩固检测 …… (170)
第三教案　习题教案 …… (172)
案例(一)——同步练习 …… (172)
案例(二)——一课3练 …… (172)
2.1.2　向量的加法　2.1.3　向量的减法(1课时) …… (175)
第一教案　教材教案 …… (175)
案例(一) …… (175)
案例(二) …… (178)
第二教案　教辅教案 …… (179)
案例(一)——课时详解 …… (179)
案例(二)——精析精练 …… (181)
定时巩固检测 …… (183)
第三教案　习题教案 …… (184)
案例(一)——同步练习 …… (184)
案例(二)——一课3练 …… (185)
2.1.4　数乘向量(1课时) …… (186)
第一教案　教材教案 …… (186)
案例(一) …… (187)
案例(二) …… (188)
第二教案　教辅教案 …… (189)
案例(一)——课时详解 …… (189)
案例(二)——精析精练 …… (190)

CONTENTS 目录


定时巩固检测 …… (191)
第三教案　习题教案 …… (192)
案例(一)——同步练习 …… (192)
案例(二)——一课3练 …… (194)
2.1.5　向量共线的条件与轴上向量坐标运算(1课时) …… (195)
第一教案　教材教案 …… (195)
案例(一) …… (195)
案例(二) …… (197)
第二教案　教辅教案 …… (198)
案例(一)——课时详解 …… (198)
案例(二)——精析精练 …… (201)
定时巩固检测 …… (202)
第三教案　习题教案 …… (203)
案例(一)——同步练习 …… (203)
案例(二)——一课3练 …… (204)
2.2　向量的分解与向量的坐标运算 …… (206)
2.2.1　平面向量基本定理(1课时) …… (206)
第一教案　教材教案 …… (206)
案例(一) …… (206)
案例(二) …… (208)
第二教案　教辅教案 …… (209)
案例(一)——课时详解 …… (209)
案例(二)——精析精练 …… (211)
定时巩固检测 …… (212)
第三教案　习题教案 …… (213)
案例(一)——同步练习 …… (213)
案例(二)——一课3练 …… (214)
2.2.2　向量的正交分解与向量的直角坐标运算
2.2.3　用平面向量坐标表示向量共线条件(1课时) …… (215)
第一教案　教材教案 …… (215)
案例(一) …… (215)
案例(二) …… (219)
第二教案　教辅教案 …… (220)
案例(一)——课时详解 …… (220)
案例(二)——精析精练 …… (222)
定时巩固检测 …… (223)
第三教案　习题教案 …… (224)
案例(一)——同步练习 …… (224)
案例(二)——一课3练 …… (225)
2.3　平面向量的数量积 …… (227)
2.3.1　向量数量积的物理背景与定义
2.3.2　向量数量积的运算律(1课时)) …… (227)
第一教案　教材教案 …… (227)
案例(一) …… (227)
案例(二) …… (230)
第二教案　教辅教案 …… (232)
案例(一)——课时详解 …… (232)
案例(二)——精析精练 …… (235)
定时巩固检测 …… (237)
第三教案　习题教案 …… (239)
案例(一)——同步练习 …… (239)
案例(二)——一课3练 …… (240)
2.3.3　向量数量积的坐标运算与度量公式(1课时) …… (242)
第一教案　教材教案 …… (242)
案例(一) …… (242)
案例(二) …… (244)
第二教案　教辅教案 …… (245)
案例(一)——课时详解 …… (245)
案例(二)——精析精练 …… (248)
定时巩固检测 …… (250)
第三教案　习题教案 …… (251)
案例(一)——同步练习 …… (251)
案例(二)——一课3练 …… (252)
2.4　向量的应用 …… (254)
2.4.1　向量在几何中的应用(1课时) …… (254)
第一教案　教材教案 …… (254)
案例(一) …… (255)
案例(二) …… (256)
第二教案　教辅教案 …… (259)
案例(一)——课时详解 …… (259)
案例(二)——精析精练 …… (262)
定时巩固检测 …… (263)
第三教案　习题教案 …… (265)
案例(一)——同步练习 …… (265)
案例(二)——一课3练 …… (266)
2.4.2　向量在物理中的应用(1课时) …… (267)
第一教案　教材教案 …… (267)
案例(一) …… (268)
案例(二) …… (269)
第二教案　教辅教案 …… (271)
案例(一)——课时详解 …… (271)
案例(二)——精析精练 …… (273)
定时巩固检测 …… (275)
第三教案　习题教案 …… (276)
案例(一)——同步练习 …… (276)
案例(二)——一课3练 …… (277)
单元概括整合 …… (279)
单元复习课 …… (279)
单元测试卷 …… (282)

# 目录 CONTENTS


## 第三章　三角恒等变换 285

3.1　和角公式 …… (285)
3.1.1　两角和与差的余弦(1课时) …… (285)
第一教案　教材教案 …… (285)
案例(一) …… (285)
案例(二) …… (287)
第二教案　教辅教案 …… (289)
案例(一)——课时详解 …… (289)
案例(二)——精析精练 …… (291)
定时巩固检测 …… (292)
第三教案　习题教案 …… (293)
案例(一)——同步练习 …… (293)
案例(二)——一课3练 …… (294)
3.1.2　两角和与差的正弦(1课时) …… (295)
第一教案　教材教案 …… (295)
案例(一) …… (295)
案例(二) …… (297)
第二教案　教辅教案 …… (298)
案例(一)——课时详解 …… (298)
案例(二)——精析精练 …… (300)
定时巩固检测 …… (301)
第三教案　习题教案 …… (302)
案例(一)——同步练习 …… (302)
案例(二)——一课3练 …… (303)
3.1.3　两角和与差的正切(1课时) …… (304)
第一教案　教材教案 …… (304)
案例(一) …… (305)
案例(二) …… (306)
第二教案　教辅教案 …… (308)
案例(一)——课时详解 …… (308)
案例(二)——精析精练 …… (310)
定时巩固检测 …… (311)
第三教案　习题教案 …… (312)
案例(一)——同步练习 …… (312)
案例(二)——一课3练 …… (313)
3.2　倍角公式和半角公式 …… (315)
3.2.1　倍角公式(1课时) …… (315)
第一教案　教材教案 …… (315)
案例(一) …… (315)
案例(二) …… (317)
第二教案　教辅教案 …… (319)
案例(一)——课时详解 …… (319)
案例(二)——精析精练 …… (321)
定时巩固检测 …… (323)
第三教案　习题教案 …… (324)
案例(一)——同步练习 …… (324)
案例(二)——一课3练 …… (325)
3.2.2　半角的正弦、余弦和正切(1课时) …… (326)
第一教案　教材教案 …… (326)
案例(一) …… (327)
案例(二) …… (328)
第二教案　教辅教案 …… (330)
案例(一)——课时详解 …… (330)
案例(二)——精析精练 …… (332)
定时巩固检测 …… (333)
第三教案　习题教案 …… (334)
案例(一)——同步练习 …… (334)
案例(二)——一课3练 …… (335)
3.3　三角函数的积化和差与和差化积(1课时) …… (337)
第一教案　教材教案 …… (337)
案例(一) …… (337)
案例(二) …… (340)
第二教案　教辅教案 …… (341)
案例(一)——课时详解 …… (341)
案例(二)——精析精练 …… (343)
定时巩固检测 …… (344)
第三教案　习题教案 …… (345)
案例(一)——同步练习 …… (345)
案例(二)——一课3练 …… (347)
单元概括整合 …… (348)
单元复习课 …… (348)
单元测试卷 …… (352)

## 模块综合测试卷 355

## 附录　个性化学案模式说明

选择适合您的“学案”模式 …… (358)
个性化学案组合 …… (360)

# 第一章 基本初等函数(Ⅱ)

## 1.1 任意角的概念与弧度制

### 1.1.1 角的概念的推广(1课时)

**第一教案** **教材教案**

#### 教学目标

**☞知识与技能**

1. 理解任意角以及象限角的概念;

2. 学会建立直角坐标系讨论任意角,会判断象限角;

3. 掌握所有与 $\alpha$ 角终边相同的角(包括 $\alpha$ 角)的表示方法.

**☞过程与方法**

通过创设情境:"转体720°,逆(顺)时针旋转",角有大于360°的角、零角和旋转方向不同所形成的角等,引入正角、负角和零角的概念;角的概念得到推广以后,将角放入平面直角坐标系,引入象限角、非象限角的概念及象限角的判定方法;列出几个终边相同的角,画出终边所在的位置,找出它们的关系,探索具有相同终边的角的表示.

**☞情感、态度与价值观**

通过本节的学习,使同学们对角的概念有了一个新的认识,即有正角、负角和零角之分. 树立运动变化观点,深刻理解推广后的角的概念. 揭示知识背景,引发学生学习兴趣. 创设问题情景,激发学生分析、探求的学习态度,强化学生的参与意识.

#### 重点 难点

**☞重点**

理解正角、负角和零角的定义,掌握终边相同的角的表示法.

**☞难点**

判断已知角所在象限;终边相同的角的表示.

## 案例(一)

#### 教学过程

**一、创设情境**

思考:你的手表慢了5分钟,你是怎样将它校准的?假如你的手表快了1.25小时,你应当如何将它校准?当时间校准以后,分针转了多少度?

[取出一个钟表,实际操作]我们发现,校准过程中分针需要正向或反向旋转,有时转不到一周,有时转一周以上,这就是说角已不仅仅局限于0°~360°之间. 这正是我们这节课要研究的主要内容——任意角.

**二、探究新知**

1. 初中时,我们已学习了0°~360°角的概念,它是如何定义的呢?

[展示投影]角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形. 如教材图1-1,一条射线由原来的位置 $OA$,绕着它的端点 $O$ 按逆时针方向旋转到终止位置 $OB$,就形成角 $\alpha$. 旋转开始时的射线 $OA$ 叫做角的始边,$OB$ 叫终边,射线的端点 $O$ 叫做角 $\alpha$ 的顶点.

2. 如上述情境中所说的校准时钟问题以及在体操比赛中我们经常听到这样的术语:"转体720°"(即转体2周),"转体1 080°"(即转体3周)等,都是遇到大于360°的角以及按不同方向旋转而成的角. 同学们思考一下:能否再举出几个现实生活中"大于360°的角或按不同方向旋转而成的角"的例子,这些说明了什么问题,又该如何区分和表示这些角呢?

[展示课件]如自行车车轮、螺丝扳手等按不同方向旋转时成不同的角,这些都说明了我们研究推广角的概念的必要性. 为了区别起见,我们规定:按逆时针方向旋转所形成的角叫正角,按顺时针方向旋转所形成的角叫负角. 如果一条射线没有做任何旋转,我们称它形成了一个零角.

[展示课件]如教材图1-2左面的角是一个正角,它等于450°;图1-2中右面的角是一个负角,等于-630°. 这样,我们就把角的概念推广到了任意角,包括正角、负角和零角. 为了简单起见,在不引起混淆的前提下,"角 $\alpha$"或"$\angle\alpha$"可简记为 $\alpha$.

3. 在今后的学习中,我们常在直角坐标系内讨论角,为此我们必须了解象限角这个概念.

角的顶点与原点重合,角的始边与 $x$ 轴的非负半轴重合. 那么,角的终边(除端点外)在第几象限,我们就说这个角是第几象限角. 如教材图1-5中的45°角、210°角分别是第一象限角和第三象限角. 要特别注意:如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何一个象限,称为非象限角.

4. [展示投影]练习:

(1)(口答)锐角是第几象限角?第一象限角一定是锐角吗?再分别就直角、钝角来回答这两个问题.

(2)(口答)今天是星期三,那么 $7k(k\in\mathbf{Z})$ 天后的那一天是星期几? $7k(k\in\mathbf{Z})$ 天前的那一天是星期几?100天后的那一天是星期几?

5. 探究:将角按上述方法放在直角坐标系中后,给定一个角,就有唯一的一条终边与之对应. 反之,对于直角坐标系中任意一条射线,以它为终边的角是否唯一?如果不唯一,那么终边相同的角有什么关系?请结合4.(2)口答加以分析.

[展示课件]不难发现,在教材图1-5中,45°的终边是$OA$,405°的终边也是$OA$,而$405°=45°+1\times360°$,405°的终边也是$OA$.

设$S=\{\beta|\beta=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,则405°角也是$S$的元素.因此,所有与45°角终边相同的角,连同45°角在内,都是集合$S$的元素;反过来,集合$S$的任一元素显然与45°角终边相同.

一般地,我们有:所有与角$\alpha$终边相同的角,连同角$\alpha$在内,可构成一个集合$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,即任一与角$\alpha$终边相同的角,都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和.

6.[展示投影]例题讲评

例1　在0°～360°范围内,找出与$-950°12'$角终边相同的角,并判定它是第几象限角.(注:0°～360°是指$0°\leqslant\beta<360°$)

例2　写出终边在$y$轴上的角的集合.

例3　写出终边直线在$y=x$上的角的集合$S$,并把$S$中适合不等式$-360°\leqslant\alpha<720°$的元素$\beta$写出来.

7.[展示投影]练习

教材$P_6$练习A　第1至6题.

注意:(1)$k\in\mathbf{Z}$;(2)$\alpha$是任意角(正角、负角、零角);(3)终边相同的角不一定相等;但相等的角,终边一定相同;终边相同的角有无数多个,它们相差360°的整数倍.

**三、学习小结**

(1) 你知道角是如何推广的吗?

(2) 象限角是如何定义的呢?

(3) 你熟练掌握具有相同终边角的表示了吗?会写终边落在$x$轴、$y$轴、直线$y=x$上的角的集合吗?

**四、作业**:1.习题1-1　A组第1,2题.

2.多举出一些日常生活中的“大于360°的角和负角”的例子,熟练掌握它们的表示,进一步理解具有相同终边的角的特点.

## 板书设计

| | | |
|---|---|---|
| 1.1.1　角的概念的推广<br>一、引入<br>二、新知:<br>1.任意角:正角、负角、零角<br>2.象限角:<br>3.终边相同的角: | 例1<br><br>例2<br><br>例3 | 练习<br><br>小结 |

# 案例(二)

## 教学过程

**一、复习引入**

1.初中所学角的概念.

2.实际生活中出现一系列关于角的问题.

**二、新课讲解**

1.角的定义:一条射线绕着它的端点$O$,从起始位置$OA$旋转到终止位置$OB$,形成一个角$\alpha$,点$O$是角的顶点,射线$OA$,$OB$分别是角$\alpha$的终边、始边.

说明:在不引起混淆的前提下,“角$\alpha$”或“$\angle\alpha$”可以简记为$\alpha$.

2.角的分类:

正角:按逆时针方向旋转形成的角叫做正角;

负角:按顺时针方向旋转形成的角叫做负角;

零角:如果一条射线没有做任何旋转,我们称它为零角;

说明:零角的始边和终边重合.

3.象限角:

在直角坐标系中,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与$x$轴的非负半轴重合,则:

(1)象限角:若角的终边(端点除外)在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.

例如:30°,390°,$-330°$都是第一象限角;330°,$-60°$是第四象限角.

(2)非象限角(也称象限间角、轴线角):如角的终边落在坐标轴上,就认为这个角不属于任何象限.例如:90°,180°,270°等.

说明:角的始边“与$x$轴的非负半轴重合”不能说成是“与$x$轴的正半轴重合”.因为$x$轴的正半轴不包括原点,就不完全包括角的始边,角的始边是以角的顶点为其端点的射线.

4.终边相同的角的集合:由特殊角30°看出:所有与30°角终边相同的角,连同30°角自身在内,都可以写成$30°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$的形式;反之,所有形如$30°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$的角都与30°角的终边相同.从而得出一般规律:

所有与角$\alpha$终边相同的角,连同角$\alpha$在内,可构成一个集合,

$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,

即:任一与角$\alpha$终边相同的角,都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和.

说明:终边相同的角不一定相等,相等的角终边一定相同.

5.例题分析:

例1　在0°～360°范围内,找出与下列各角终边相同的角,并判断它们是第几象限角?

(1)$-120°$;(2)640°;(3)$-950°12'$.

解:(1)$-120°=240°-360°$,

所以,与$-120°$角终边相同的角是240°角,它是第三象限角;

(2)$640°=280°+360°$,

所以,与640°角终边相同的角是280°角,它是第四象限角;

(3)$-950°12'=129°48'-3\times360°$,

所以,与$-950°12'$角终边相同的角是$129°48'$角,它是第二象限角.

例2　若$\alpha=k\cdot360°-1\ 575°,k\in\mathbf{Z}$,试判断角$\alpha$所在象限.

解:∵ $\alpha=k\cdot360°-1\ 575°=(k-5)\cdot360°+225°,(k-5)\in\mathbf{Z}$

∴$\alpha$ 与 225°终边相同,所以,$\alpha$ 在第三象限.

例 3 写出下列终边相同的角的集合 $S$,并把 $S$ 中适合不等式 $-360°\leqslant\beta\leqslant720°$ 的元素 $\beta$ 写出来:

(1)60°;(2)−21°;(3)363°14′.

解:(1)$S=\{\beta|\beta=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,

$S$ 中适合 $-360°\leqslant\beta\leqslant720°$ 的元素是

$$60°-1\times360°=-300°,$$
$$60°+0\times360°=60°,$$
$$60°+1\times360°=420°.$$

(2)$S=\{\beta|\beta=-21°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

$S$ 中适合 $-360°\leqslant\beta\leqslant720°$ 的元素是

$$-21°+0\times360°=-21°,$$
$$-21°+1\times360°=339°,$$
$$-21°+2\times360°=699°.$$

(3)$S=\{\beta|\beta=363°14'+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,

$S$ 中适合 $-360°\leqslant\beta\leqslant720$ 的元素是

$$363°14'-2\times360°=-356°46',$$
$$363°14'-1\times360°=3°14',$$
$$363°14'+0\times360°=363°14'.$$

**三、课堂练习:**

1. 教材练习 A 第 1 至 6 题,练习 B 第 1 至 5 题.

2. 补充练习:把下列各角写成 $k\cdot360°+\alpha(0°\leqslant\alpha<360°)$ 的形式,并指出它们所在的象限或终边位置.

(1)−135°;　(2)1110°;　(3)−540°.

**答案** (1)$-135°=-360°+225°$,第三象限角.

(2)$1\ 110°=3\cdot360°+30°$,第一象限角.

(3)$-540°=(-2)\cdot360°+180°$,终边在 $x$ 轴非正半轴.

**四、小结**

1. 角的分类:按旋转方向分;按终边所在位置分.

2. 与角 $\alpha$ 同终边的角的集合表示.

3. 正角、负角、零角的定义,象限角、非象限角的定义.

**五、作业**

教材习题 1~1A 组第 1,2 题.

### 板书 设计

| | | |
|---|---|---|
| 1.1.1 角的概念的推广<br>任意角:正角、负角、零角<br>象限角<br>终边相同的角: | 例 1<br>例 2<br>例 3 | 练习<br>小结 |

# 第二教案　　教辅教案

## 案例(一)——课时详解

### 课堂 导入

设 $OA$ 为自行车车轮的一个半径,轮子按逆时针方向旋转一周过程中,$OA$ 形成 0°~360°的所有角,如果继续旋转第二周,第三周,则 $OA$ 形成了更大范围内的角,这些角又该如何表示及分类呢?

本节我们将要学习正角、负角、零角、象限角,以及终边相同的角.

### 课前 自主 学习

1. 角的概念

(1)规定,按照________方向旋转而成的角叫正角;按照________方向旋转而成的角叫做负角;当射线________时,我们也把它看成一个角,叫做零角.

(2)旋转生成的角,又常叫做________. 各角和的旋转量等于____________.

2. 象限角、轴线角

我们在直角坐标系中讨论角,是使角的顶点与____________,角的始边与____________. 角的终边在第几象限,就把这个角叫做____________,即称象限角. 如果终边在坐标轴上,就认为这个角____________,即称轴线角.

3. 终边相同的角

设 $\alpha$ 表示任意角,所有与 $\alpha$ 终边相同的角以及 $\alpha$ 本身组成一个集合,这个集合可记为____________. 集合 $S$ 的每一个元素都与 $\alpha$ 的终边________,当 $k=0$ 时,对应元素为________.

4. 象限角的集合

(1)第一象限角的集合为________________________.

(2)第二象限角的集合为________________________.

(3)第三象限角的集合为________________________.

(4)第四象限角的集合为________________________.

**答案** 1.(1)逆时针,顺时针,没有旋转

(2)转角,各角旋转量的和

2. 坐标原点重合,$x$ 轴的非负半轴重合,第几象限的角,不属于任何象限

3. $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,相同,$\alpha$

4. (1)$\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

(2)$\{\alpha|k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$

(3)$\{\alpha|k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$

(4)$\{\alpha|k\cdot360°+270°<\alpha<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$

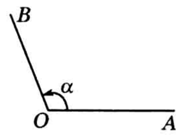
## 课堂 合作 探究

### 知识点一 正角、负角、零角

**知识点归纳**

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置形成的图形.

如右图,一条射线的端点是 $O$,它从起始位置 $OA$ 按逆时针方向旋转到终止位置 $OB$,形成了一个角 $\alpha$,点 $O$ 是角的顶点,射线 $OA$ 是角 $\alpha$ 的始边,射线 $OB$ 是角 $\alpha$ 的终边.




在平面内,一条射线绕它的端点旋转有两个相反的方向,顺时针方向和逆时针方向,习惯上规定,按照逆时针方向旋转而成的角叫正角;按照顺时针方向旋转而成的角叫负角;当射线没有旋转时,我们也把它看成一个角,叫做零角.

**典例剖析**

**【例 1】** (1)一角为 30°,其终边按逆时针方向旋转三周后的角度是多少?

(2)时针走过了 3 小时 20 分,则分针所转过的角的度数为________,时针所转过的角的度数为________.

**解析** 角旋转一周为 360°,时钟中时针每小时是 $\frac{1}{12}$ 周,分针每分钟走 $\frac{1}{60}$ 周.

**答案** (1)终边按逆时针方向旋转三周,转过的角度为 $360°\times3=1\ 080°$. 再加这一角原本是 30°,所以旋转后的角度数是 1 110°.

(2)时针、分针都是顺时针方向旋转,故所转过的角度数为负. 3 小时 20 分,分针转了 $3\frac{1}{3}$ 周,故转过的角度数为 $-360°\times3\frac{1}{3}=-1\ 200°$;时针转了 $\frac{5}{18}$ 周,故转过的角度数为 $-360°\times\frac{5}{18}=-100°$.

**方法指导** 有关时针的题目,极易因为忘了时针的旋转方向而掉了负号.

### 知识点二 终边相同的角及象限角

**知识点归纳**

所有与 $\alpha$ 终边相同的角,包括 $\alpha$ 本身构成一个集合,这个集合可记为 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$. 集合 $S$ 的每一个元素都与 $\alpha$ 的终边相同,当 $k=0$ 时,对应元素为 $\alpha$.

**方法指导** (1)$k\in\mathbf{Z}$;

(2)$\alpha$ 是任意角;

(3)$k\cdot360°$ 与 $\alpha$ 之间用"+"连接,如 $k\cdot360°-30°$ 应看做 $(-30°)+k\cdot360°$;

(4)终边相同的角不一定相等,但相等的角终边必相同,终边相同的角有无数个,它们彼此相差 360°的整数倍;

(5)检查两角 $\alpha_1,\alpha_2$ 终边是否相同,只要看 $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{360°}$ 是否为整数.

平面内任一个角都可以通过移动,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 $x$ 轴非负半轴重合,这时,角的终边在第几象限,就把这个角叫做第几象限的角,如果终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何象限,习惯上称其为轴线角.

**典例剖析**

**【例 2】** 若 $\alpha=1\ 590°$,(1)把 $\alpha$ 改写成 $k\cdot360°+\beta(k\in\mathbf{Z},0°\leqslant\beta<360°)$ 的形式为________;

(2)若 $\theta$ 与 $\alpha=150°$ 的终边相同,且 $-360°<\theta<360°$,则 $\theta=$________,$\theta$ 所属象限为________.

**解析** (1)用 $\alpha\div360°$ 确定商及余数,按要求确定 $\beta$;(2)借助终边相同的角的表示方法.

**答案** (1)$\alpha=4\times360°+150°(k=4,\beta=150°)$,

∴应填 $4\times360°+150°$.

(2)∵$\theta$ 与 $\alpha$ 终边相同.

∴$\theta$ 角可写成 $k\cdot360°+150°(k\in\mathbf{Z})$.

由 $-360°<k\cdot360°+150°<360°(k\in\mathbf{Z})$ 解得 $k=-1,0$.

∴$\theta=-210°$ 或 150°,故 $\theta$ 属于第二象限.

∴应填 $-210°$ 或 150°,第二象限.

**规律总结** (1)欲判断某一个角属于第几象限,常常将这个角表示为 $k\cdot360°+\alpha(0°\leqslant\alpha<360°,k\in\mathbf{Z})$ 的形式,只需判断 $\alpha$ 所在象限即可.

(2)在一定条件下,求与 $\alpha$ 角终边相同的角,首先将这样的角表示成 $k\cdot360°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的形式,然后确定 $k$ 的值,求出适合条件的角.

**【变式训练 1】** $A=\{$小于 90°的角$\}$;$B=\{$第一象限的角$\}$;$C=\{$锐角$\}$;$D=\{0°\sim90°$间的角$\}$.

下列选项中正确的有________.

①$A=C=D\subsetneqq B$;②$C\subsetneqq D\subsetneqq A$;③$C\subsetneqq D\subsetneqq B$;④$C\subsetneqq D\subsetneqq B\subsetneqq A$;⑤$B\cap D=C$;⑥$A\cap B=C$.

**解析** 小于 90°的角由锐角、零角、负角组成,而第一象限角包含有锐角及其他终边在第一象限的角. 而 $0°\sim90°$间的角包括 0°,不包括 90°.

**答案** ②⑤

### 知识点三 各象限角的集合与轴上角的集合

**知识点归纳**

(1)象限角的集合:

第一象限角集合为 $\{x|k\cdot360°<x<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第二象限角集合为 $\{x|k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第三象限角集合为 $\{x|k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第四象限角集合为 $\{x|k\cdot360°+270°<x<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)轴上角的集合:

终边在 $x$ 轴的正半轴上,角的集合为 $\{x|x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边在 $x$ 轴的负半轴上,角的集合为 $\{x|x=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边在 $x$ 轴上,角的集合为 $\{x|x=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边在 $y$ 轴的正半轴上,角的集合为 $\{x|x=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边在 $y$ 轴的负半轴上,角的集合为 $\{x|x=k\cdot360°-90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边在 $y$ 轴上,角的集合为 $\{x|x=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边在坐标轴上,角的集合为 $\{x|x=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

### 典例剖析

**【例3】** 终边与坐标轴重合的角的集合是　　(　　)

A. $\{\theta|\theta=k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\theta|\theta=k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\theta|\theta=k\cdot 90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{\theta|\theta=k\cdot 180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

**解析** 终边与 $x$ 轴重合的角 $\theta$ 的集合是 $\{\theta|\theta=k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$,终边与 $y$ 轴重合的角 $\theta$ 的集合是 $\{\theta|\theta=k\cdot 180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$,从而终边与坐标轴重合的角 $\alpha$ 的集合是 $\{\theta|\theta=k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\theta|\theta=k\cdot 180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\theta|\theta=2k\cdot 90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\theta|\theta=2k\cdot 90^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\theta|\theta=k\cdot 90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

**答案** C

**规律总结** (1)象限角与轴上角的集合的表示形式不唯一.如:终边在 $y$ 轴的负半轴上的角的集合还可表示为 $\{x|x=k\cdot 360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)紧紧抓住角的集合表示以及 $\mathbf{Z}=\{$奇数$\}\cup\{$偶数$\}$.即 $\mathbf{Z}=\{r|r=2n,n\in\mathbf{Z}\}\cup\{r|r=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$这一点作为突破口.

**【变式训练2】** 若 $\alpha$ 是第四象限角,则 $180^\circ-\alpha$ 是第________象限角.

**解析** 可先根据象限角的表示方法写出 $\alpha$ 的范围,再求出 $180^\circ-\alpha$ 的范围,从而可知 $180^\circ-\alpha$ 所在象限,也可利用对称的方法求解;因为是填空题,还可用域值法解.

**答案** 解法一 ∵$\alpha$ 为第四象限角,

∴$k\cdot 360^\circ-90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$,

∴$-k\cdot 360^\circ<-\alpha<-k\cdot 360^\circ+90^\circ(k\in\mathbf{Z})$,

∴$-k\cdot 360^\circ+180^\circ<180^\circ-\alpha<-k\cdot 360^\circ+270^\circ(k\in\mathbf{Z})$,

∴$180^\circ-\alpha$ 是第三象限角.

解法二 ∵角 $\alpha$ 与角 $-\alpha$ 的终边关于 $x$ 轴对称,

又∵角 $\alpha$ 的终边在第四象限,

∴角 $-\alpha$ 终边在第一象限.

又∵角 $-\alpha$ 与 $180^\circ-\alpha$ 的终边关于原点对称,

∴角 $180^\circ-\alpha$ 的终边在第三象限.

解法三 ∵$\alpha$ 为第四象限角,∴可令 $\alpha=-60^\circ$.

∴$180^\circ-\alpha=240^\circ$,在第三象限,

∴角 $180^\circ-\alpha$ 在第三象限.

## 知识点四 等分角、倍角所在象限问题

### 知识点归纳

已知角 $\alpha$ 所在象限,如何确定 $\alpha$ 的半角、倍角所在象限呢?

已知 $\alpha$ 角的象限,确定 $-\alpha,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{3},2\alpha$ 等角的范围是学习和、差、倍、半三角公式的基础,解决这类问题往往是根据终边相同的角的集合表示,再通过分类讨论的方法进行,从而得出结论.

### 典例剖析

**【例4】** 如果 $\alpha$ 是第三象限角,那么 $-\alpha,\frac{\alpha}{2},2\alpha$ 的终边落在何处?

**解析** 本题给出一角的范围,确定与其有关的角的范围,应用集合表示该角,再进行运算.

**答案** ∵$\alpha$ 是第三象限角,

∴$k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}$,　　(＊)

∴$-k\cdot 360^\circ-270^\circ<-\alpha<-k\cdot 360^\circ-180^\circ$,

∴$-\alpha$ 为第二象限角.

又由(＊)得 $k\cdot 180^\circ+90^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

∴$k$ 为偶数时,$\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角,

$k$ 为奇数时,$\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

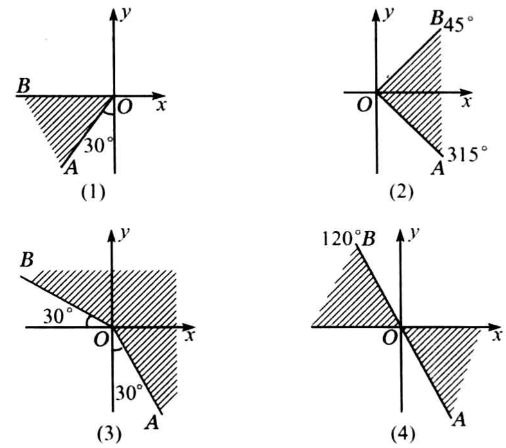
又由(＊)得 $k\cdot 720^\circ+360^\circ<2\alpha<k\cdot 720^\circ+540^\circ$.

即 $(2k+1)\cdot 360^\circ<2\alpha<(2k+1)\cdot 360^\circ+180^\circ$.

∴$2\alpha$ 的终边在第一、二象限或 $y$ 轴的正半轴上.

**方法指导** 本例中判断 $\frac{\alpha}{2}$ 的象限时易忽视 $k$ 的值为奇、偶两种情况,判断 $2\alpha$ 的象限时易漏掉 $y$ 轴正半轴.

**【变式训练3】** 写出顶点在原点,始边重合于 $x$ 轴的正半轴,终边落在阴影部分的角的集合(如图所示,不包括边界).




**答案** (1)选定 $OB$,在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 间,把图中以 $OB$ 为终边的角看成 $180^\circ$,则以 $OA$ 为终边的角看成 $240^\circ$,则有

$\{\alpha|180^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<240^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)选定 $OA$,在 $360^\circ\sim 720^\circ$间(若取 $0^\circ\sim 360^\circ$,则无法表示出以 $OB$ 为终边的角),把图中以 $OA$ 为终边的角看成 $315^\circ$,则以 $OB$ 为终边的角看成 $405^\circ$,则有

$\{\alpha|315^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<405^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

或选定 $OB$,在 $-180^\circ\sim 180^\circ$间,把图中以 $OB$ 为终边的角看成 $45^\circ$,则以 $OA$ 为终边的角看成 $-45^\circ$,则有

$\{\alpha|-45^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<45^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

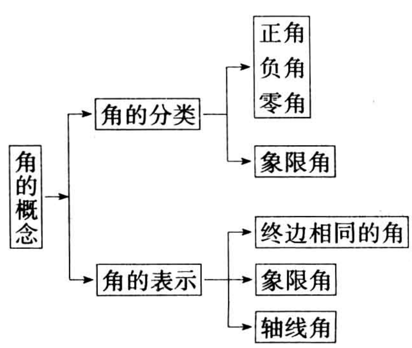
(3)选定 $OA$,在 $-180^\circ\sim 180^\circ$间,把图中以 $OA$ 为终边的角看成 $-60^\circ$,则以 $OB$ 为终边的角看成 $150^\circ$,则有

$\{\alpha|-60^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<150^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

(4)把图中 $x$ 轴下方的阴影部分看成是由 $x$ 轴上方的阴影部分旋转 $180^\circ$得到的,则有

$\{\alpha|120^\circ+k\cdot 180^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

### 概括·整合



# 案例(二)——精析精练

## 课堂 合作 探究

### 重点难点突破

**知识点一　任意角的概念**

(1)角的概念推广到了任意角,包括正角、负角和零角.

(2)要正确理解正角、负角和零角的概念,由定义可知,关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动.

(3)角的定义不仅仅注重结果,更注重过程,即确定角既要知道旋转量,又要知道旋转方向.因此,针对过程便得到角的如下分类:

| | | |
|---|---|---|
| 角的分类 | 1.由旋转方向不同而产生的角 | 正角:按逆时针方向旋转所形成的角,规定为正角<br>零角:当一条射线没有作任何旋转时,规定为零角<br>负角:按顺时针方向旋转所形成的角,规定为负角 |
| | 2.由终边旋转的周数不同而产生的角 | 0°～360°的角<br>小于0°的角<br>大小360°的角 |
| | 3.旋转周数和终边位置 | 所有和角$\alpha$终边相同的角,连同角$\alpha$在内可表示为:$k\cdot360°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ |
| | 4.由于终边位置不同而产生的角 | 象限角:角的终边在第几象限,叫做第几象限角<br>轴线角:角的终边落在坐标轴上,叫做轴线角 |

**知识点二　终边相同的角**

所有与角$\alpha$终边相同的角,包括$\alpha$本身构成一个集合,它们彼此相差$k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$,即$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

**知识点三　象限角和轴线角**

(1)象限角

当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与$x$轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,就说这个角是第几象限角.

(2)轴线角

当角的顶点与坐标原点重合,角的始边与$x$轴的非负半轴重合,那么角的终边落在坐标轴上时,称做轴线角,这时这个角不属于任何象限.

### 典型例题分析

**题型1　象限角的判定**

**【例1】** $A=\{$小于90°的角$\}$,$B=\{$第一象限的角$\}$,则$A\cap B$等于(　　)

A.{锐角}　　B.{小于90°的角}

C.{第一象限的角}　　D.以上都不对

**解析**　小于90°的角由锐角、零角、负角组成,而第一象限角包含有锐角及其他终边在第一象限的角,所以$A\cap B$是由锐角和终边在第一象限的负角组成;故上述A、B、C都不对.

**答案**　D

**规律总结**　小于90°的角不都是锐角,它还包括有零角、负角,只有小于90°的正角才是锐角,要注意从现在开始角已经推广到了零角和负角,注意区分以下各角的不同:

(1)锐角$\alpha:0°<\alpha<90°$;

(2)小于90°的角$\alpha:\alpha<90°$;

(3)第一象限角$\alpha:\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

(4)0°到90°的角$\alpha:0°\leqslant\alpha<90°$.

**【例2】** 已知$\alpha$为第一象限角,求$2\alpha,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{3}$所在的象限.

**解析**　用不等式表示象限的角后再求范围.

**答案**　$\because\alpha$是第一象限角,

$\therefore k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

①$\because 2k\cdot360°<2\alpha<2k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore 2\alpha$是第一或第二象限角,或是终边在$y$轴的非负半轴上的角.

②$k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$当$k=2n,n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}$.

则$\frac{\alpha}{2}$为第一象限角.

当$k=2n+1,n\cdot360°+180°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+225°,n\in\mathbf{Z}$.

则$\frac{\alpha}{2}$为第三象限角.

$\therefore\frac{\alpha}{2}$为第一象限角或第三象限角.

③$k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+30°,k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$当$k=3n(n\in\mathbf{Z})$,

$n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+30°,n\in\mathbf{Z}$.

$\therefore\frac{\alpha}{3}$为第一象限角.

当$k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$,

$n\cdot360°+120°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+150°,n\in\mathbf{Z}$.

$\therefore\frac{\alpha}{3}$为第二象限角.

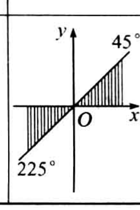
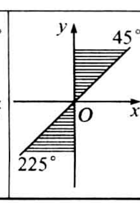
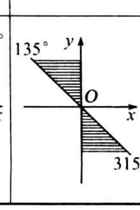
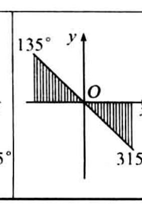
当$k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$,

$240°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+270°,n\in\mathbf{Z}$.

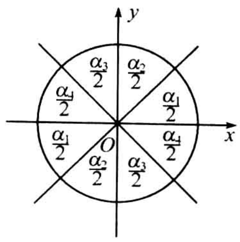
$\therefore\frac{\alpha}{3}$为第三象限角.

$\therefore\frac{\alpha}{3}$为第一、第二、第三象限角.

**规律总结**　已知角$\alpha$所在象限,应熟练地确定$\frac{\alpha}{2}$所在象限:

| $\alpha$ | 第一象限 | 第二象限 | 第三象限 | 第四象限 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\alpha}{2}$ | 第一或第三象限 | | 第二或第四象限 | |
| 区域 |   |   |   |   |

如果用 $\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$、$\alpha_4$ 表示第一、二、三、四象限的角，则 $\frac{\alpha_1}{2}$，$\frac{\alpha_2}{2}$，$\frac{\alpha_3}{2}$，$\frac{\alpha_4}{2}$ 分布如右图，即第一象限的角的半角是第一或第三象限的角(其余略)，熟记右图解有关问题就方便多了，同理也可来求 $\frac{\alpha}{3}$ 所在的位置.




**题型 2　终边相同角的表示**

**【例 3】** 与 $-457°$ 角终边相同的角的集合是　(　　)

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+457°, k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360+97°, k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+263°, k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°-263°, k\in\mathbf{Z}\}$

**解析**　分析一：当 $k=-2$ 时，有 $-457°=-2\times 360°+263°$，应选C.

分析二：∵$-457°$的角与$-97°$角终边相同，

又$-97°$角与$263°$角终边相同，

∴$263°$角应与 $k\cdot 360°+263°$ 角终边相同，应选 C.

分析三：由于$-457°$角与$-97°$角终边相同，易知应排除 A、B、D，应选 C.

**答案**　C

**规律总结**　本例考查终边相同的角的表示方法，可用特殊值法去研究，也可用定义去分析解决，还可用排除法加以排除.

终边相同的角的表示方法要记熟，特别是各象限的角与轴线角的集合，要在理解的基础上合理应用.

**题型 3　区域角的表示**

**【例 4】** 写出 $y=\pm x(x\geqslant 0)$ 所夹的小区域内的角的集合.

**解析**　角 $\alpha$ 的终边落在 $y=x(x\geqslant 0)$ 上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+45°, k\in\mathbf{Z}\}$，角 $\alpha$ 的终边落在 $y=-x(x\geqslant 0)$ 上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°-45°, k\in\mathbf{Z}\}$.

**答案**　所求角的集合为 $\{\alpha|k\cdot 360°-45°<\alpha<k\cdot 360°+45°, k\in\mathbf{Z}\}$.

**规律总结**　注意题目中的"小区域"以及要按逆时针方向旋转，请同学们思考：为什么不是 $\{\alpha|k\cdot 360°+315°<\alpha<k\cdot 360°+45°, k\in\mathbf{Z}\}$ 这个集合呢？

## 规律 方法 总结

1. 角的旋转定义给出以后，就将原来的 $0°\sim 360°$ 间的角扩展为任意的正角、负角和零角，从而为角和实数之间建立对应关系奠定了基础.

2. 要明确象限角的概念及其内涵，并能依据概念判断一个角是哪一个象限角或象限界角.

3. 会用集合表示终边相同的角，并要深刻理解终边相同角的含义，会利用概念求得符合某种条件的角.

4. 解决与角有关的集合问题的关键是弄清集合含有哪些元素. 其方法有：一是将集合中表示角的式子进行适当的变形；二是用列举法把集合具体化；三是运用数形结合的思想，即在直角坐标系中分别作出这些角.

## 定时 巩固 检测

### 基础训练

1. 已知 $\alpha$ 是锐角，那么 $2\alpha$ 是　(　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 小于 $180°$ 的正角　　D. 不大于直角的正角

**【答案】** C(点拨：$\alpha$ 是锐角，故 $0°<\alpha<90°$，则 $0°<2\alpha<180°$，故选 C.)

2. 与 $120°$ 角终边相同的角是　(　　)

A. $-600°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$

B. $-120°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$

C. $120°+(2k+1)180°(k\in\mathbf{Z})$

D. $660°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$

**【答案】** A(点拨：根据终边相同的定义进行判断.)

3. 若 $\alpha$ 为锐角，则 $k\cdot 180°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 所在的象限是　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第一、三象限　　D. 第一、四象限

**【答案】** C(点拨：$k=2n(n\in\mathbf{Z})$，$n\cdot 360+\alpha$ 在第一象限；$k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，$n\cdot 360°+180°+\alpha$ 在第三象限，故选 C.)

4. 终边与坐标轴重合的角 $\alpha$ 的集合是　(　　)

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$

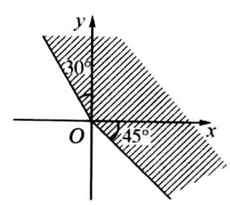
B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°, k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 90°, k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°+90°, k\in\mathbf{Z}\}$

**【答案】** C(点拨：根据终边为坐标轴角的集合进行判断.)

5. 如右图，终边落在阴影部分的角的集合是　(　　)




A. $\{\alpha|-45°\leqslant\alpha\leqslant 120°\}$

B. $\{\alpha|120°\leqslant\alpha\leqslant 315°\}$

C. $\{\alpha|k\cdot 360°-45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+120°, k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|k\cdot 360°+120°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+315°, k\in\mathbf{Z}\}$

**【答案】** C(点拨：根据终边相同的定义进行判断，从而找出范围.)

### 能力提升

6. 若角 $\alpha$、$\beta$ 的终边互为反向延长线，则 $\alpha$ 与 $\beta$ 之间的关系一定是　(　　)

A. $\alpha=-\beta$

B. $\alpha=-2\cdot 360°+\beta$

C. $\alpha=180°+\beta$

D. $\alpha=(2k+1)\cdot 180°+\beta(k\in\mathbf{Z})$

**【答案】** D(点拨：根据角的有关概念进行判断.)

7. 已知角 $\alpha$ 与 $x+45°$ 有相同的终边，角 $\beta$ 与 $x-45°$ 有相同的终边，那么 $\alpha$ 与 $\beta$ 之间的关系是　(　　)

A. $\alpha+\beta=0$

B. $\alpha-\beta=0$

C. $\alpha+\beta=k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$

D. $\alpha-\beta=k\cdot 360°+90°(k\in\mathbf{Z})$

**【答案】** D(点拨：依据题意 $\alpha=n\cdot 360°+x+45°(n\in\mathbf{Z})$，$\beta=$

$m\cdot360°+x-45°(m\in\mathbf{Z})$，则 $\alpha-\beta=(n-m)\cdot360°+90°$.）

8. 终边在直线 $y=-\sqrt{3}x$ 上的所有角的集合是__________；上述集合中介于$-180°$到$180°$之间的角是________.

**【答案】** $\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+120°,n\in\mathbf{Z}\}$；$\{-60°,120°\}$（点拨：终边在 $y=-\sqrt{3}x$ 上的所有角的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+300°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=n\cdot180°+120°,n\in\mathbf{Z}\}$，当 $n$ 取$-1$，0 时，即取得上述介于$-180°$到$180°$之间的角有$-60°$，$120°$.）

9. 给出下列命题：①$30°$和$-30°$的角的终边关于原点对称；②$-330°$和$390°$的角的终边相同；③$\alpha=(2k+1)\cdot180°$与$\beta=(4k\pm1)\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$的终边相同；④设 $M=\{x|x=45°+k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y|y=90°+k\cdot45°,k\in\mathbf{Z}\}$，则$M\subsetneqq N$. 其中所有正确命题的序号是________.

**【答案】** ②③④（点拨：由于$30°$与$-30°$的角的终边关于$x$轴对称，故①不正确；由于$-330°=390-720°$，故②正确；由于$4k\pm1$表示所有的奇数，故③正确；由于$M=\{x|x=(2k+1)\cdot45°,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y|y=(k+2)\cdot45°,k\in\mathbf{Z}\}$，因此$M\subsetneqq N$，故④正确.）

10. 把下列各角化成 $k\cdot360°+\alpha$ 的形式，并指出是第几象限角.

(1)$480°$；　(2)$-1\ 485°$；　(3)$-580°$；　(4)$1\ 286°$.

**【答案】** (1)$480°=1\times360°+120°$. 第二象限角.

(2)$-1\ 485°=-5\times360°+315°$. 第四象限角.

(3)$-580°=-2\times360°+140°$. 第二象限角.

(4)$1\ 286°=3\times360°+206°$. 第三象限角.

# 第三教案　　习题教案

## 案例(一)——同步练习

1. 下列命题中正确的是　（　　）

A. 第一象限角一定不是负角

B. 小于$90°$的角一定是锐角

C. 钝角一定是第二象限角

D. 终边相同的角一定相等

**【答案】** C（点拨：钝角在$90°$到$180°$之间，故钝角是第二象限角，角的概念推广之后，考虑问题要全面.）

2. 以原点为角的顶点，$x$轴的非负半轴为角的始边，终边在$x$轴上的角等于　（　　）

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

**【答案】** C（点拨：$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.）

3. 在直角坐标系中，若角$\alpha$与角$\beta$的终边互为反向延长线，则角$\alpha$与角$\beta$的关系是　（　　）

A. $\alpha=-\beta$

B. $\alpha=-k\cdot360°+\beta(k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha=180°+\beta$

D. $\alpha=k\cdot360°+180°+\beta(k\in\mathbf{Z})$

**【答案】** D（点拨：因为角$\alpha$与角$\beta$的终边互为反向延长线，故它们相差$180°$.）

4. 若集合$M=\{\alpha|\alpha=\pm30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{\alpha|\alpha=(-1)^k\cdot30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，则　（　　）

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\not\subseteq N$且$N\not\subseteq M$

**【答案】** C（点拨：$\because M=\{\alpha|\alpha=-30°+k\cdot360°$或$\alpha=30°+k\cdot360°$或$\alpha=150°+k\cdot360°$或$\alpha=210°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{\alpha|\alpha=30°+k\cdot360°$或$\alpha=150°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$\therefore M\supsetneqq N$.）

5. 若$\alpha$为锐角，$-\alpha+k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$所在的象限是________.

**【答案】** 第二、四象限（点拨：因为$\alpha$为锐角，$-\alpha$的终边在第四象限，所以$-\alpha+k\cdot180°$的终边在第二、四象限）

6. 设$-180°<\alpha<\beta<180°$，则$\alpha-\beta$的取值范围是______.

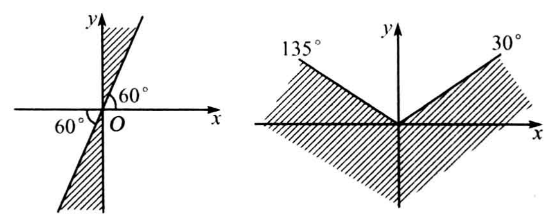
**【答案】** $-360°<\alpha-\beta<0°$（点拨：$-180°<\alpha<180°$，$-180°<-\beta<180°$，$\therefore-360°<\alpha-\beta<360°$，又$\because\alpha<\beta$，$\alpha-\beta<0°$，$\therefore-360°<\alpha-\beta<0°$.）

7. 已知角$\alpha$的终边与$y$轴的正半轴所夹的角为$30°$，且终边在第二象限，又$-720°<\alpha<0°$，求$\alpha$.

**【答案】** 因为$\alpha=120°+k\cdot360°$，$-720°<\alpha<0°$.

所以$\alpha=-240°$，$-600°$.

8. 写出顶点在原点，始边重合于$x$轴正半轴，终边落在阴影部分的角的集合（包括边界）.




(1)　　(2)

**【答案】** (1)$\{\alpha|60°+k\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2)$\{\alpha|-225°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant30°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

9. 若$\alpha$是第二象限时，则$2\alpha$、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$分别是第几象限角？

**【答案】** (1)由$\{k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$，所以$k\cdot720°+180°<2\alpha<k\cdot720°+360°(k\in\mathbf{Z})$，故$2\alpha$是第三或第四象限的角，或角的终边在$y$轴的负半轴上.

(2)由$k\cdot180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+90°(k\in\mathbf{Z})$，当$k=2n(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+45°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+90°$，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限的角；当$k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+270°$，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限的角. 所以$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限的角.

(3)因为$k\cdot120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+60°$，当$k=3n(n\in\mathbf{Z})$时，$n\cdot360°+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+60°$，$\frac{\alpha}{3}$是第一象限的角；当